Л.К. Кусаинова, А.Ж. Монашова

О спектре сингулярных операторов, порождаемых дифференциальным выражением высокого порядка

(Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, г. Астана, Казахстан)

В работе рассматриваюся сингулярные дифференциальные операторы, порождаемые дифференциальным выражением высокого порядка. Получены условия дискретности спектра и двусторонние оценки распределения собственных чисел.

Пусть $\rho(\cdot)$, $v(\cdot)$ и $p_k(\cdot)$ $(k = 1 \dots n-1)$ - неотрицательные локально суммируемые в интервале $\Omega = (a, b)$ $(-\infty \le a < b \le +\infty)$ функции.

Рассмотрим дифференциальное выражение

$$l(y) = (-1)^n \left(\rho(t)\, y^{(n)}\right)^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \left(p_k(t)\, y^{(k)}\right)^{(k)} + v(t)\, y. \tag{9}$$

Целью данной работы является оценка асимптотик операторов, порожденных диференциальным выражением (1). Данная задача была поставлена М.Отелбаевым в работе [1].

На классе D_0 финитных бесконечно дифференцируемых в Ω функций:

$$l[y, y] \overset{def}{=} (l(y), y) = \int_\Omega l(y)\, y dt = a_{\rho,v}[y, y] + b[y, y],$$

где

$$a_{\rho,v}[y, y] = \int_\Omega \left|y^{(n)}\right|^2 \rho(t)\, dt + \int_\Omega |y|^2 v(t)\, dt = \|y\|_W^2, \tag{10}$$

$$b[y, y] = \sum_{k=1}^{n-1} \int_\Omega \left|y^{(k)}\right|^2 p_k(t)\, dt. \tag{11}$$

Пусть $W = W_{\rho,v}^n(\Omega)$ - замыкание класса D_0 по норме

$$\|y\|_W = \left\|y; W_{\rho,v}^n\right\| = \sqrt{a_{\rho,v}[y, y]}.$$

Всюду ниже будем предполагать, что $\rho(x) > 0$ почти всюду в Ω и что функция $\frac{1}{\rho}$ локально суммируема в Ω.

Обозначим через A самосопряженный оператор, порождающий замкнутую форму

$$\bar{a}_{\rho,v}[y, y] = \|y\|_W^2, \quad D[\bar{a}_{\rho,v}] = W.$$

Пусть B - оператор, ассоциированный с формой $b[y, y]$. Будем считать, что форма $b[y, y]$ определена на множестве $D[b]$ всех $y(x)$, имеющих в Ω абсолютно непрерывную производную $y^{(n-1)}$ и таких, что

$$\sum_{k=1}^{n-1} \int_\Omega p_k(x) \left|y^{(k)}\right|^2 dx < \infty.$$

Пусть $\Delta_h(x) = \left(x - \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}\right) \subset \Omega$, $0 < \delta < 1$, $0 \le \epsilon < 1$ ($\epsilon = 0$ только для $\Omega = \mathbb{R}$). Положим

$$M_{\delta,\epsilon}(x, h) = M_{\delta,\epsilon}(x, h|\rho, v) = h^{n-1} \left(\int_\Delta \frac{dt}{\rho(t)}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\inf_{\{e\}} \int_{\Delta \setminus e} v(t)\, dt\right)^{\frac{1}{2}},$$

где инфимум берется по всем $e \subset \Delta = \left(x - \frac{(1-\epsilon)h}{2}, x + \frac{(1-\epsilon)h}{2}\right)$ с мерой $|e| \leq \delta\,|\Delta| = \delta\,(1-\epsilon)\,h$. Заметим, что $M_{\delta,\epsilon}(x,h) \leq 1$ для достаточно малых $h > 0$ $(\Delta_h(x) \subset \Omega)$ и в силу этого для любого $x \in \Omega$

$$h^*(x) = h^*_{(\delta,\epsilon)}(x,|\rho,v) = \sup_{x\in\Omega}\{h > 0: \ \Delta_h(x) \subset \Omega \text{ и } M_{\delta,\epsilon}(x,h) \leq 1\} > 0.$$

Пару (ρ, v) на Ω будем называть *допустимой*, если выполнены условия:

1) $h^*(x) < \infty \ \ \forall x \in \Omega$,

2) $\inf\Omega < x - \frac{h^*(x)}{2} < x + \frac{h^*(x)}{2} < \sup\Omega \ \ \forall x \in \Omega.$

Введем следующую запись для допустимый пары (ρ, v):

$$(\rho, v) \in \pi^* = \pi^*_{(\delta,\epsilon)}(\Omega).$$

Пусть

$$\Delta^*(x) = \left(x - \frac{(1-\epsilon)\,h^*(x)}{2}, x + \frac{(1-\epsilon)\,h^*(x)}{2}\right).$$

Обозначим через J^* множество всех интервалов $\Delta = (c,d) \subset \Delta^*(t)$, $t \in \Omega$, т.е.

$$J^* = \bigcup_{t\in\Omega}\{\Delta = (c,d): \ \Delta \subset \Delta^*(t)\}.$$

Все последующие утверждения формулируются в терминах следующих функций:

$$M^*\frac{1}{\rho}(x) = \sup_{x\in\Delta\in J^*}\frac{1}{|\Delta|}\int\limits_{\Delta}\frac{dt}{\rho(t)},$$

$$\mathcal{K}_k(x|\rho,r) = h^*(x)^{n-k-1}\left(\int\limits_{\Delta^*(x)}\frac{dt}{\rho(t)}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int\limits_{\Delta^*(x)} r(t)\right)^{\frac{1}{2}},$$

где $k = 0,\ldots,n-1$, $r(\cdot) \geq 0$ - локально суммируемая в Ω функция.

Ниже нами будет использована одна теорема об асимптотике собственных чисел компактных возмущений полуограниченных операторов, действующих в гильбертовом пространстве.

Теорема 1 [2] *Пусть $S[f,f] \geq \mu[f,f]$, $\mu > 0$ - квадратичная форма в гильбертовом пространстве H с дискретным спектром; вещественная квадратичная форма $T[f,f]$ компактна относительно $S[f,f]$. Тогда форма $Q[f,f] = S[f,f] + T[f,f]$ имеет дискретный спектр и*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\lambda_k(Q)}{\lambda_k(S)} = 1.$$

Под *спектром* неотрицательной формы понимается спектр оператора, порождающего данную форму. См. [3,6.1].

По определению, форма $T[\cdot,\cdot]$ *компактна* относительно $S[\cdot,\cdot]$, если $D[S] \subset D[T]$ и из множества $\{S[f,f] \leq 1\}$ можно выделить подпоследовательность $\{f_j\}$ такую, что

$$T[f_j - f_m, f_n - f_m] \to 0 \text{ при } j,m \to \infty.$$

Ниже запись $\lim\limits_{x\to\partial\Omega}\Phi(x) = 0$ следует понимать, как одновременное выполнение условий:

$$\lim_{x\to a}\Phi(x) = 0, \ \ \lim_{x\to b}\Phi(x) = 0.$$

Лемма 1 [4] *Пусть* $(\rho, v) \in \pi^*$, *а* $r(\cdot)$ - *неотрицательная, локально суммируемая в* Ω *функция. Пусть выполнены условия:*

$$\sup \mathcal{K}_k\left(x|\rho, r\right) < \infty, \quad \lim_{x \to \partial\Omega} \mathcal{K}_k\left(x|\rho, r\right) = 0.$$

Тогда

a) *Существует такая не зависящая от* ρ, v *и* $r(\cdot)$ *постоянная* $C > 0$, *что*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|y^{(k)}\right|^2 r\left(x\right) dx \le C \left\|y\right\|_W^2 \quad \forall y \in D_0.$$

b) *Единичный шар*

$$U_W = \left\{y \in W^n_{(\rho,v)}\left(\Omega\right): \ \left\|y\right\|_W \le 1\right\}$$

содержит подпоследовательность y_j *такую, что*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|y_j - y_m\right|^2 r\left(x\right) dx \to 0 \text{ при } j, m \to \infty.$$

Из леммы 1 в частности следует, что условие

$$\lim_{x \to \partial\Omega} h^*\left(x\right) = \lim_{x \to \partial\Omega} \mathcal{K}_0\left(x|\rho, 1\right)^{1/n} = 0$$

влечет за собой компактное вложение $W^n_{(\rho,v)}\left(\Omega\right) \hookrightarrow L_2\left(\Omega\right)$ и, следовательно, дискретность спектра оператора A . Кроме этого мы имеем равенство

$$N\left(\lambda; A\right) = N_a\left(\lambda^{-1/2}; E\right), \tag{12}$$

где E - оператор вложения $W^n_{(\rho,v)}\left(\Omega\right) \hookrightarrow L_2\left(\Omega\right)$, $N_a\left(\mu; E\right)$ - функция распределения аппроксимативных чисел оператора E . См. [4,6.1]

Для функции $N_a\left(\mu; E\right)$ в работе [5] получены следующие оценки:

$$C^{-1+1/n} F\left(C^{-2}\lambda\right) \le N_a\left(\lambda^{-1/2}, E\right) \le C^{1-1/n} F\left(C^2\lambda\right), \tag{13}$$

где

$$F\left(\lambda\right) = \lambda^{\frac{1}{2n}} \int_{\Omega_\lambda} \left(M^* \frac{1}{\rho}\left(t\right)\right)^{\frac{1}{2n}} dt,$$

$$\Omega_\lambda = \left\{t \in \Omega: \ h^*\left(t\right)\left(M^* \frac{1}{\rho}\left(t\right)\right)^{\frac{1}{2n}} > \lambda^{-\frac{1}{2n}}\right\},$$

а постоянная $c > 1$, не зависит от ρ и v .

Лемма 2 *Пусть* $(\rho, v) \in \pi^*$ *и выполнены условия:*

$K_k = \sup\limits_{x \in \Omega} \mathcal{K}_k\left(x|\rho, p_k\right) < \infty$, $\lim\limits_{x \to \partial\Omega} \mathcal{K}_k\left(x|\rho, p_k\right) = 0 \quad (k = 1, \dots, n-1)$. *Тогда* $W = W^n_{\rho,v}\left(\Omega\right) \subset D\left[b\right]$, *а форма* $b\left[y, y\right]$ *компактна относительно формы* $\bar{a}_{\rho,v}\left[y, y\right] = \left\|y\right\|_W^2$.

Доказательство. Из условий данной леммы и в силу леммы 1 следует, что

$$\int\limits_{\Omega} \left| y^{(k)} \right|^2 p_k(t)\, dt \le C_k^2 \, \|y\|_W^2 \quad \forall y \in D_0.$$

Тем самым мы имеем вложение

$$W \subset \bigcap_{k=1}^{n-1} L_{p_k}^k(\Omega) \subset D[b].$$

Здесь через $L_{p_k}^k(\Omega)$ обозначено пространство всех $y(x)$, имеющих в Ω абсолютно непрерывную производную $y^{(k-1)}$ и таких, что

$$\left\| y; L_{p_k}^k(\Omega) \right\| = \left(\int\limits_{\Omega} \left| y^{(k)} \right|^2 p_k(t)\, dt \right)^{1/2} < \infty.$$

Далее, как следует из леммы 1, всякая последовательность $\{y_k\} \subset \{y \in D_0 : \|y\|_W \le 1\} = U_W$ содержит фундаментальную в метрике $\left\| \cdot, L_{p_1}^1(\Omega) \right\|$ подпоследовательность $\left\{ y_{(1),m} \right\}_{m=1}^{\infty}$. Из подпоследовательности $\left\{ y_{(1),m} \right\}_{m=1}^{\infty}$ можно выделить подпоследовательность $\left\{ y_{(1,2),m} \right\}_{m=1}^{\infty}$ фундаментальную в мерике $\left\| \cdot, L_{p_1}^1(\Omega) \right\| + \left\| \cdot, L_{p_2}^2(\Omega) \right\|$. Продолжая аналогичные рассуждения, получим, что подпоследовательность $\left\{ y_{(1,2,\ldots,n-1),m} \right\}_{m=1}^{\infty} \subset U_W$ будет фундаментальной в необходимой нам метрике

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left\| \cdot, L_{p_k}^k(\Omega) \right\| \sim \sqrt{b[y,y]} = [y]_b.$$

Теорема 2 *Пусть* $(\rho, v) \in \pi^*$. *Допустим, что* $M^* \frac{1}{\rho} \in L_{1/2n}(\Omega)$ *и выполнены условия:*
1) $\sup\limits_{x} h^*(x) < \infty$, $\lim\limits_{x \to \partial\Omega} h^*(x) = 0$;
2) $\sup\limits_{x \in \Omega} \mathcal{K}_k(x|\rho, p_k) < \infty$, $\lim\limits_{x \to \partial\Omega} \mathcal{K}_k(x|\rho, p_m) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$.
Тогда оператор $L = A + B$ *имеет дискретный спектр и справедлива оценка:*

$$\varlimsup_{\lambda \to \infty} \frac{N(\lambda; L)}{\mathcal{F}(c\lambda)} \le 1, \tag{14}$$

где $c > 1$ *не зависит от функций* ρ, v *и* $p_k \quad (1 \le k \le n-1)$.

Доказательство. Из лемм 1 и 2 следует, что формы $\bar{a}_{\rho,v}[\cdot,\cdot]$ и $b[\cdot,\cdot]$ удовлетворяют требованиям теоремы 1, поэтому оператор L имеет дискретный спектр и

$$\lim_{j \to \infty} \frac{\lambda_j(L)}{\lambda_j(A)} = 1. \tag{15}$$

В силу (7) для любого $\gamma \in (0,1)$ найдется номер j_γ, что

$$(1-\gamma)\lambda_j(A) \le \lambda_j(L) \le (1+\gamma)\lambda_j(A) \text{ при } j \ge j_\gamma.$$

Пусть $\lambda > 0$ такое достаточно большое число, что найдется $m \ge j_\gamma$ при котором $\lambda_m(L) < \lambda$. Но тогда

$$(1-\gamma)\lambda_j(A) < \lambda_m(L) < \lambda \quad \forall j \le m,$$

откуда следует, что $N\left((1-\gamma)^{-1}\lambda; A\right) \ge m$ и, следовательно

$$N(\lambda; L) \le N\left((1-\gamma)^{-1}\lambda; A\right) \text{ при } \lambda \to \infty. \tag{16}$$

В условиях теоремы 2 справедлива правая оценка в (5) и в силу соотношений (4), (8) и (5) начиная с некоторого достаточно большого $\lambda > \lambda_\gamma$

$$N(\lambda; L) \le C^{1-1/n}\mathcal{F}\left(C^2(1-\gamma)^{-1}\lambda\right). \tag{17}$$

Переходя в (9) к верхнему пределу при $\lambda \to \infty$, $\gamma \downarrow 0$ получим (6).

Обратимся к левому неравенству в (5), которое перепишем, как

$$\mathcal{F}\left(C^{-2}\lambda\right) \le N(\lambda; L). \tag{18}$$

В [5] оценка (10) была получена при определенных условиях регулярности, налагаемых на функцию $\rho(x)$. К примеру

$$C_0^{-1} < \frac{\rho(\xi)}{\rho(x)} < C_0, \text{ если } \xi \in \Delta^*(x), \tag{19}$$

где $C_0 > 0$ не зависит от $x \in \Omega$.

Теорема 3 *Пусть выполнены условия теоремы 2 и пусть к тому же $\rho(x)$ удовлетворяет условию (11). Тогда для оператора $L = A + B$ справедлива оценка*

$$\varliminf_{\lambda\to\infty} \frac{N(\lambda; L)}{\mathcal{F}(c^{-1}\lambda)} \ge 1,$$

где $C = C(\delta, n, C_0) > 1$.

Доказательство теоремы 3 повторяет доказательство теоремы 2.

Рассмотрим теперь специальный случай, когда в (1) $v(x) \equiv 1$, а дифференциальное выражение $l(y)$ рассматриается на оси $\Omega = (0, +\infty)$. В этом случае оператор A в теореме 2 и 3 ассоциирован с формой

$$a_\rho[y, y] = \int\limits_0^\infty \left(\left|y^{(n)}\right|^2 \rho(t) + |y|^2\right) dt$$

и условие допустимости распространяется только на вес ρ, от которого будем требовать выполнение условия

$$0 < h^*(x) = h^*_\rho(x) \le \gamma x \ \forall x > 0 \quad (0 < \gamma < 1),$$

где

$$h^*_\rho(x) = \sup_{0<h<2x} \left\{ h: \ h^{2n-1} \int\limits_{\frac{x-(1-\epsilon)h}{2}}^{\frac{x+(1-\epsilon)h}{2}} \frac{dt}{\rho(t)} \le 1 \right\}.$$

Это условие мы так-же можем записывать как $\rho \in \pi^*$. Вместо A примем обозначение A_ρ.

Пусть $J(\lambda) = \int\limits_{\left\{t>0:\ h^*_\rho(t)\left(M^*\frac{1}{\rho}(t)\right)^{1/2n} > \lambda^{-1/2n}\right\}} \left(M^*\frac{1}{\rho}(t)\right)^{1/2n} dt.$

Теорема 4 Пусть $\rho \in \pi^*$ и выполнены условия теоремы 2 относительно функции $h^* = h^*_\rho$. Тогда операор $L_\rho = A_\rho + B$ имеет дискретный спектр и справедливы оценки:

$$\varlimsup \frac{N(\lambda; L_\rho)}{\lambda^{1/2n} J(C^{-1}\lambda)} \le C \text{ при } \lambda \to \infty,$$

$$\varliminf \frac{N(\lambda; L_\rho)}{\lambda^{1/2n} J(C\lambda)} \ge C^{-1} \text{ при } \lambda \to \infty,$$

где $C > 1$ не зависит от функций ρ, ρ_k $(k = 1, \ldots, n-1)$.

Доказательство теоремы 4 повторяет доказательство теоремы 2 и 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Отелбаев М., Кусаинова Л.К. Оценки спектра одного класса дифференциальных операторов// Труды института математики НАН Украины. Научный журнал.-2009.-Т6.-№1-С.165-190.

2. Рамм А. Г. О собственных числах некоторых интегральных операторов. Л.: Ленинградский институт точной механики и оптики.-1974.-С.932-934.

3. Мынбаев К. Т., Отелбаев М. О. Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов.М.:Наука.-1988.

4. Кусаинова Л. К. Теоремы вложения и интерполяции весовых пространств Соболева.-Алматы.- Докторская диссертация. 1999.-Библиотека Института математики НАН РК.

5. Айтенова М. С., Кусаинова Л. К. Об асимптотике распределения аппроксимативных чисел вложений весовых классов Соболева.I.-Алма-Аты. Математический журнал. Т.2. №2.-2009.- С.7-14.

Кусаинова Л.К., Монашова А.Ж.

Биік реттің дифференциалды өрнек тудырылатын сингулярлық операторлардың спектрі туралы

Жұмыста биік реттің дифференциалды өрнек тудырылатын сингулярлық дифференциалды операторларды қаралады. Спектрді дискреттіктің шарты және меншікті сандардың үлестірілуді екі жақты бағасы алынған.

Monashova A.Z.

The spectrum of singular operators generated by differential expression of a high order

In this paper we consider singular differential operators generated by differential expression of a high order. We obtain conditions for the discreteness of the spectrum and bilateral assessment of the distribution of eigenvalues

Поступила в редакцию 27.04.11

Рекомендована к печати 27.05.11