УДК 51

КОЭФФИЦИЕНТТЕРІ НЗІЛІСТІ ЖЫЛУӨТКІЗГІШТІК ТЕҢДЕУ НШІН ИДЕАЛДЫ ЕМЕС ТНЙІНДЕС ШАРТТЫ КОШИ ЕСЕБІ

Кемалова Ж.Б., Мамаева В.А.
Магистранты, Әл-Фараби атындағы Қазақ Ђлттық Университеті, Алматы

Есептің қойылуы: $R_t = \{(x, t) : x \in R, 0 < t < \infty\}$ облысында анықталған

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = a_i^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + F_i(x, t) \qquad (i = 1,2) \tag{1}$$

теңдеуінің бастапқы шартты

$$u_i(x,0) = f_i(x), \tag{2}$$

тңйіндес шарттарын

$$-k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}\bigg|_{x=0} = H[u_1 - u_2]\big|_{x=0} \tag{3}$$

$$-k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}\bigg|_{x=0} = H[u_1 - u_2]\big|_{x=0} \tag{4}$$

қанағаттандыратын шешімін табу керек. Ол ңшін (3)-(4) шарттарын алмастырамыз да, ңзіліс нңктесінде $\omega(t)$ белгісіз функциясын енгіземіз:

$$\kappa_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}\bigg|_{x=0} = k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}\bigg|_{x=0} = k_1 k_2 \omega(t) \tag{5}$$

R_t облысында (1)-(5) шекаралық есептерін пайдаланып, Коши есебін екі шекаралық есепке бөлеміз:

A_1 :
$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + F_1(x, t) \qquad 0 < x < \infty$$

$$u_1(x,0) = f_1(x) \qquad \frac{\partial u_1}{\partial x}\bigg|_{x=0} = k_2 \omega(t)$$

A_2 :
$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + F_2(x, t) \qquad -\infty < x < 0$$

$$u_2(x,0) = f_2(x) \qquad \frac{\partial u_2}{\partial x}\bigg|_{x=0} = k_1 \omega(t)$$

A_1 және A_2 шекаралық есептерін жылу потенциалының көмегімен шешеміз. Бђл Нейман шекаралық есептерінің шешімін жазу ңшін жарты осьте жалғастыру әдісімен Грин функциясын қолданамыз.

A_1 есебінің шешімі

$$u_1(x, t) = \int_0^\infty f_1(\xi)[G_1(x-\xi, t) + G_1(x+\xi, t)]d\xi +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_0^\infty F_1(\xi,\tau)[G_1(x-\xi, t-\tau) + G_2(x+\xi, t-\tau)]d\xi - 2a_1^2 \int_0^t k_2 \omega(\tau) G_1(x, t-\tau)\big|_{\xi=0} d\tau =$$

$$= V_{10}[f_1] + V_1[F_1] + W_1[k_2\omega] \qquad x > 0 \tag{6}$$

A_2 есебінің шешімі

$$u_2(x, t) = \int_{-\infty}^0 f_2(\xi)[G_2(x-\xi, t) + G_2(x-\xi, t)]d\xi +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^0 F_2(\xi,\tau)[G_2(x-\xi, t-\tau) + G_2(x+\xi, t-\tau)]d\xi + 2a_2^2 \int_0^t k_1 \omega(\tau) G_2(x, t-\tau)\big|_{\xi=0} d\tau =$$

$$= V_{20}[f_2] + V_2[F_2] + W_2[k_1\omega], \qquad x < 0 \tag{7}$$

Бірінші тңйіндес шарттан $\omega(t)$ белгісіз функциясын табу ңшін

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{H}{k_1}[u_1 - u_2]\Big|_{x=0} \tag{8}$$

шартын пайдаланамыз. Бұл үшін потенциалының шегін есептейміз.Оны лемма ретінде көрсетеміз:

Лемма.

$$1)\ \lim_{x\to 0} \frac{\partial W_1}{\partial x} = k_2\omega(t) \tag{9}$$

$$2)\ \lim_{x\to 0} W_i(x,t) = W_i(0,t) \tag{10}$$

Дәлелдеуі: 1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\partial W_1}{\partial x} = -2a_1^2 \int_0^t k_2\,\omega(\tau)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2a_1\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{x^2}{4a_1^2(t-\tau)}}\right)d\tau\Bigg|_{x=0} = \left|\begin{array}{l}\frac{x}{2a_1\sqrt{t-\tau}} = \nu \\ \frac{x\,d\tau}{4a_1(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} = d\nu\end{array}\right| =$

$$= \frac{2k_2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-\nu^2}\omega\left(t + \frac{x^2}{4a_1^2\nu^2}\right)d\nu = k_2\,\omega(t)$$

2. $\lim\limits_{x\to 0} W_i(x,t) = -2a_1^2 \int_0^t k_j\,\omega(\tau)\frac{1}{2a_1\sqrt{\pi(t-\tau)}}d\tau = -a_i k_j \int_0^t \frac{\omega(\tau)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}d\tau = W_i(0,t) \qquad (i \neq j)$

Бұдан $\omega(t)$ функциясын аламыз

$$k_2\,\omega(t) = \frac{H}{k_1}(a_1k_2 + a_2k_1)\int_0^t \frac{\omega(\tau)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}d\tau + \Phi(t) \tag{11}$$

$$\omega(t) = h\int_0^t \frac{\omega(\tau)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}d\tau + \Psi(t) \tag{12}$$

мұндағы $h = \frac{H}{k_1k_2}[a_1k_2 + a_2k_1]$, $\qquad \Psi(t) = \frac{1}{k_2}\Phi(t)$

Біртіндеп жуықтау әдісімен шығарамыз:

$$\omega(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\omega_k(t)h^k\ .$$

Әдебиеттер

1. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. «Сборник задач по математической физике». М.Наука 1980г.
2. Орынбасаров М.О. «Задачи Коши и краевые задачи для уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами, когда условия сопражения содержат производние по времени». Материалы каз-россической научно-практической конференции

1997г.