УДК 512.8:517.22

РАСПОЗНАВАЕМОСТЬ АВТОМОРФИЗМОВ СВОБОДНЫХ МЕТАБЕЛЕВЫХ АЛГЕБР ЛИ РАНГА 3

Наурызбаев Руслан Жумабаевич Докторант,
Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана
Научный руководитель – Умирбаев У.У.

Одним из центральных вопросов современной алгебры является вопрос о структуре группы автоморфизмов свободных алгебр. Работы многих специалистов посвящены описанию порождающих и определяющих соотношений группы автоморфизмов. В 1964 году П. Кон [1] доказал, что все автоморфизмы свободной алгебры Ли $L_n = \mathrm{Lie}\langle x_1 , , x_n \rangle$ ранга n являются ручными, т.е. являются произведениями элементарных автоморфизмов

$$\sigma(i,\alpha, f) = (x_1 , x_2 , \quad , x_{i-1} , \alpha x_i + f , x_{i+1} , \quad , x_n),$$

где $\alpha \in k^*$, элемент f не зависит от x_i. Позднее этот результат был обобщен для свободных алгебр многобразий Нильсена - Шрайера [2]. Определяющие соотношения группы автоморфизмов конечнопорожденных свободных алгебр многобразий Нильсена-Шрайера описаны в [3].

Другим классическим примером многообразий алгебр Ли являются метабелевы алгебры. Пусть M_n – свободная метабелева алгебра Ли от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над произвольным полем k. Из результатов А.Л. Шмелькина [4] вытекает, что все нелинейные автоморфизмы алгебры M_2 не являются ручными, т.е. являются дикими. В 1991 году В. Дренски [5] доказал, что внутренний автоморфизм $exp(ad[x_1, x_2])$ алгебры M_3 также является диким. Совсем недавно В.А. Романьков [6] доказал, что $IA(M_3)$, группа всех автоморфизмов алгебры M_3, тождественных по модулю M_3^2, не может быть порождена никакой конечной системой элементов $IA(M_3)$ вместе со всеми внутренними и ручными автоморфизмами.

В [7] определена группа почти ручных автоморфизмов $AT(M_n)$, которая содержит в качестве подгруппы группу ручных автоморфизмов $T(M_n)$ и исследованы свойства сократимости и почти сократимости автоморфизмов алгебры M_n в случае $n = 3$. Из этого следует, что включение $T(M_3) \subset AT(M_3)$ является строгим и верна следующая

Теорема 1 *a) Нелинейные ручные автоморфизмы свободной метабелевой алгебры Ли ранга три являются элементарно сократимыми;*

b) нелинейные почти ручные автоморфизмы свободной метабелевой алгебры Ли ранга три являются почти элементарно сократимыми.

Используя эти результаты, удается построить эффективный алгоритм, который позволяет распознавать ручные (почти ручные) автоморфизмы среди всех автоморфизмов.

Теорема 2 *Ручные и почти ручные автоморфизмы свободной метабелевой алгебры Ли M_3 ранга три над конструктивным полем k алгоритмически распознаваемы.*

Кроме того, доказана следующая теорема

Теорема 3 *Автоморфизм*

$$(x_1 + [[[x_3, x_2]x_1]x_2], x_2, \ldots, x_n)$$

свободной метабелевой алгебры Ли M_n является ручным при $n > 3$ и не допускает никаких элементарных сокращений.

В [8] Ю. А. Бахтурин и С. Набиев доказали, что для любого ненулевого $a \in M_n^2$ экспоненциальный автоморфизм $\exp(\mathbf{ad}(a))$ является диким автоморфизмом M_n при $n \geq 4$. Однако приведенное в [8] доказательство этого результата не является корректным. В формуле (18) [8] упущено слагаемое $\lambda_{21}\Psi_1$. В действительности второе слагаемое левой части предыдущей формулы [8] содержит $\lambda_{21}\Psi_1$, а третье слагаемое не содержит $\lambda_{21}\Psi_1$. Кроме того, в соответствии с контекстом [8] рассмотрим две матрицы вида $I + \Phi_i \Psi_i$ такие, что $\Psi_i \Phi_i = 0$, где I – единичная матрица и $i = 1,2$. Тогда

$$(I + \Phi_1 \Psi_1)(I + (-\Phi_1)\Psi_1)(I + \Phi_2 \Psi_2)(I + (-\Phi_2)\Psi_2) = I$$

является произведением вида (12) [8] и удовлетворяет равенствам (14) и (16) [8]. Для этого произведения имеем $\lambda_{23} = \Psi_1\Phi_2$. Легко построить примеры строки Ψ_1 и столбца Φ_2 с условием $\Psi_1\Phi_2 \neq 0$. Это противоречит утверждению в [8] приведенного после равенства (16).

Таким образом, следующая проблема остается открытой:

Проблема 4 *Являются ли все автоморфизмы свободной метабелевой алгебры M_n ранга $n \geq 4$ ручными?*

Напомним, что все автоморфизмы свободных метабелевых групп ранга $n \geq 4$ являются ручными [9].

Литература

1. P. M. Cohn, Subalgebras of free associative algebras. Proc. London Math. Soc., 56 (1964),
   618 - 632.
2. J.Lewin, On Schreier varities of linear algebras. Trans. Amer. Math. Soc. 132 (1968), 553 -
   562. U.U. Umirbaev, Definig relations for automorphism groups of free algebras. J. Algebra
   314 (2007), 209 - 225.
3. А.Л. Шмелькин, Сплетения алгебр Ли и их приложения в теории групп. Труды Моск.
   Мат. Общ. 29 (1973), 247 - 260.
4. V.Drensky, Wild automorphisms of nilpotent-by-abelian Lie algebras. Manuscripta Math.
   70 (1991), 157 - 182.
5. V.A. Roman'kov, On the automorphism group of a free metabelian Lie algebra. Internat. J. Algebra Comput. 18 (2008), no. 1, 209 - 226.
6. Р. Ж. Наурызбаев, Сократимость автоморфизмов свободных метабелевых алгебр Ли ранга 3. Вестник ЕНУ 6 (2009), 200 - 213.
7. Y. A. Bahturin, S. Nabijev, Authomorphisms and derivations of Abelian extensions of some Lie algebras. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1992. V. 62. P. 43 - 57.
8. S. Bachmuth, H.Y. Mochizuki, $Aut(F)\ Aut(F)$ is surjective for free group F of rank $\neq$
   3. Trans. Amer. Math. Soc. 292(1985), 81 - 101.