УДК 517.5

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ СВОЙСТВА СЕМЕЙСТВ КОНЕЧНОМЕРНЫХ СЕТЕВЫХ ПРОСТРАНСТВ И ПРОСТРАНСТВ ЛОРЕНЦА ОТНОСИТЕЛЬНО КОМПЛЕКСНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Таджигитов Аскар Айтжанович ст.преподаватель
кафедры математики СКГУ им. М.Козыбаева, Петропавловск

Пусть $N \in \mathbb{N}$, обозначим через $\mathfrak{M}_N$ множество всех непустых подмножеств из $\{1,2,...,N\}$, $M \subset \mathfrak{M}_N$ фиксированное семейство множеств, которое назовем сетью. Для $a = \{a_i\}_{i=1}^{N}$ определим числа:

$$\bar{a}_k(M) = \max_{e\in M, |e|\ge k} \frac{1}{|e|}\left|\sum_{m\in e} a_m\right|, \quad k = \overline{1, N},$$

где $|e|$ - количество элементов множества e.

Заметим, что $\{\bar{a}_k(M)\}_{k=1}^{N}$ монотонно невозрастающая конечная последовательность. Пусть $1 \le p < \infty$, $1 \le q \le \infty$.

Определим семейство конечномерных пространств

$$n_{p,q}^N(M) = \{a = \{a_k\}_{k=1}^N\}, \ N \in \mathbb{N}$$

с нормой при $1 \le q < \infty$

$$\|a\|_{n_{p,q}^N(M)} = \left(\sum_{k=1}^{N} k^{q/p-1}\bar{a}_k^q(M)\right)^{\frac{1}{q}},$$

и при $q = \infty$

$$\|a\|_{n_{p,q}^N(M)} = \max_{1\le k\le N} k^{\frac{1}{p}}\bar{a}_k(M).$$

Данные пространства являются конечномерными аналогами сетевых пространств, введенных в [1].

Пусть $1 \le p < \infty$, $1 \le q \le \infty$. Определим семейство конечномерных пространств Лоренца

$$l_{p,q}^{N} = \{a = \{a_k\}_{k=1}^{N}\}, \ N \in \mathrm{N}$$

с нормой при $1 \le q < \infty$

$$\|a\|_{l_{p,q}^{N}} = \left(\sum_{k=1}^{N} k^{q/p-1} (a_k^*)^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

при $q = \infty$

$$\|a\|_{l_{p,q}^{N}} = \max_{1 \le k \le N} k^{\frac{1}{p}} a_k^*,$$

где $\{a_k^*\}_{k=1}^{N}$ невозрастающая перестановка последовательности $\{|a_k|\}_{k=1}^{N}$.

Определим метод комплексной интерполяции. Для заданной пары $\overline{A} = (A_0, A_1)$ рассмотрим пространство $\xi(\overline{A})$, состоящее из всех функций f со значениями в $\sum(\overline{A})$, ограниченных и непрерывных в полосе

$$S = \{z : 0 \le \operatorname{Re} z \le 1\},$$

аналитичных в открытой полосе

$$S_0 = \{z : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$$

и таких, что отображение

$$t \to f(j + it),$$

где $j = 0,1$ является непрерывным на вещественной оси функцией со значениями в A_j, стремящимися к 0 при $|t| \to \infty$.

Очевидно, $\xi(\overline{A})$ - векторное пространство с нормой

$$\|f\|_{\xi(\overline{A})} = \max \left(\sup_t \|f(it)\|_{A_0}, \sup_t \|f(1+it)\|_{A_1} \right).$$

Пространство ξ банахово. Действительно, предположим, что

$$\sum_n \|f_n\|_{\xi} < \infty.$$

В силу ограниченности $f_n(z)$ в $\sum(\overline{A})$, имеем

$$\|f_n(z)\|_{\sum(\overline{A})} \le \max\left(\sup \|f_n(it)\|_{\sum(\overline{A})}, \sup \|f_n(1+it)\|_{\sum(\overline{A})}\right).$$

Поскольку $A_j \subset \sum(\overline{A})$, мы заключаем, что

$$\|f_n(z)\|_{\sum(\overline{A})} \le \|f_n\|_{\xi}.$$

Известно, что $\sum(\overline{A})$ –банахово пространство. Отсюда следует, что ряд $\sum_n f_n$ сходится в $\sum(\overline{A})$ равномерно на S к некоторой функции $f(z)$. Ясно, что эта функция ограничена и непрерывна в S и аналитична в S_0. Далее,

$$\|f_n(j + it)\|_{A_j} \le \|f_n\|_{\xi}$$

и, значит, ряд $\sum_n f_n(j + it)$ равномерно по t сходится в A_j к некоторому элементу, который должен совпадать с суммой ряда в $\sum(\overline{A})$. Следовательно, $f(j + it) \in A_j$ и ряд $\sum_n f_n(j + it)$

равномерно сходится к $f(j+it)$ в норме A_j. Но отсюда вытекает, что $f \in \mathfrak{F}$ и что $\sum_n f_n$ сходится к f в норме пространства $\mathfrak{F}$.

Интерполяционный функтор C_θ определяется следующим образом: пространство $A_{[\theta]} = C_\theta(A)$, $0 \le \theta \le 1$, состоит из всевозможных элементов $a \in \sum(\overline{A})$, таких, что $a = f(\theta)$ для некоторой функции $f \in \mathfrak{F}(\overline{A})$, с нормой

$$\| a \|_{[\theta]} = \inf \left\{ \| f \|_{\xi} : f(\theta) = a, f \in \xi \right\}.$$

Лемма 1. *Пространство* $\overline{A}_{[\theta]}$ *банахово и является промежуточным относительно пары* $\overline{A}$. *Функтор* C_θ *представляет собой точный интерполяционный функтор типа* θ.

Лемма 2. *При* $0 < \theta < 1$ *имеют место вложения*

$$\overline{A}_{\theta,1} \subset \overline{A}_{[\theta]} \subset A_{\theta,\infty}.$$

Лемма 3. (о связи между методами комплексной и вещественной интерполяции) *Если* $0 < \theta_0 < \theta_1 < 1$, $\theta = (1-\eta)\theta_0 + \eta\theta_1$ *и* $0 < p \le \infty$, *то*

$$\left(\overline{A}_{[\theta_0]}, \overline{A}_{[\theta_1]}\right)_{\eta,p} = \overline{A}_{\theta,p}.$$

Если $1 \le p_i \le \infty, i = 0,1$ *и* $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\eta}{p_0} + \dfrac{\eta}{p_1}$, *то*

$$\left(\overline{A}_{\theta_0,p_0}, \overline{A}_{\theta_1,p_1}\right)_{[\eta]} = \overline{A}_{\theta,p}.$$

Для конечномерных пространств Лоренца справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть* $1 \le p_0 < p_1 < \infty$, $0 < q_0, q_1 < \infty$,

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\eta}{p_0} + \frac{\eta}{p_1}, \frac{1}{q} = \frac{1-\eta}{q_0} + \frac{\eta}{q_1}, 0 < \theta < 1.$$

Тогда имеет место равенство

$$\left(l^N_{p_0,q_0}, l^N_{p_1,q_1}\right)_{[\eta]} = l^N_{p,q}.$$

Это равенство понимается в смысле эквивалентности норм с константами, не зависящими от $N \in \mathbb{N}$.

Для конечномерных сетевых пространств получаем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть* $1 \le p_0 < p_1 < \infty$, $0 < q_0, q_1 < \infty$, $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\eta}{p_0} + \dfrac{\eta}{p_1}, \dfrac{1}{q} = \dfrac{1-\eta}{q_0} + \dfrac{\eta}{q_1}$, $0 < \theta < 1$. M - *множество всех отрезков из множества* $\{1, 2, ..., N\}$. *Тогда имеет место равенство*

$$\left(n^N_{p_0,q_0}(M), n^N_{p_1,q_1}(M)\right)_{[\eta]} = n^N_{p,q}(M).$$

Это равенство понимается в смысле эквивалентности норм с константами, не зависящими от $N \in \mathbb{N}$.

Литература

1. Nursultanov E.D. Interpolation properties of some anisotropic spaces and Hardy-Littlwood type inequalities// {East J. Approx.}- 1998.- Vol. 4, N2.-P. 243-275.

2. Трибель Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы.- М., 1988. - 550 с.
3. Брудный Ю.А., Крейн С.Г., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов.// Итоги науки и техники. - М.,- 1986. -Т. 24. -С. 3-163.
4. Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства. - М., 1980.264 с.