УДК531.8(078.8)

ИССЛЕДОВАНИЯ КИНЕМАТИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ ТОЧЕК ПРИ РАЗЛИЧНЫХ СПОСОБАХ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Ахметжанова Т.С. Жуматаева Т.С.
Карагандинский Государственный Технический Университет, Караганда Научный руководитель - доцент Старостин В.П.

Движение точки в неподвижной системе координат **xyz** определяется зависимостями координат точки от времени.

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t), \qquad (1)$$

Уравнения (1) представляют параметрические уравнения траектории точки. Для нахождения уравнения траектории точки в координатной форме необходимо из этих уравнений исключить время.

Скорость точки характеризует быстроту движения, т.е. изменение ее положения во времени

$$\bar{v} = \bar{i}\, v_x + \bar{j} v_y + \bar{k} v_z\ , \qquad (2)$$

где $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ -орты осей x, y, z . Проекции скорости на оси неподвижных декартовых осей координат равны

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \; v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z} \,. \tag{3}$$

Модуль (величина) скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\,, \tag{4}$$

а направление скорости определяется направляющими косинусами:

$$\cos(\bar{v} \wedge \bar{i}) = \frac{v_x}{v}, \; \cos(\bar{v} \wedge \bar{j}) = \frac{v_y}{v}, \; \cos(\bar{v} \wedge \bar{k}) = \frac{v_z}{v} \,. \tag{5}$$

Ускорение точки характеризует быстроту изменения скорости:

$$\bar{a} = \bar{i}\, a_x + \bar{j} a_y + \bar{k} a_z \,. \tag{6}$$

Проекции ускорения на неподвижные декартовые оси координат

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}, \; a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}, \; a_z = \dot{v}_z = \ddot{z} \,. \tag{7}$$

Модуль ускорения

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,, \tag{8}$$

а направление ускорения определяется направляющими косинусами:

$$\cos(\bar{a} \wedge \bar{i}) = \frac{a_x}{a}, \; \cos(\bar{a} \wedge \bar{j}) = \frac{a_y}{a}, \; \cos(\bar{a} \wedge \bar{k}) = \frac{a_z}{a} \,. \tag{9}$$

При естественном способе задания движения точки задаются траектория точки, начало отсчета дуговой координаты с указанием положительного и отрицательного направлений отсчета и уравнение движения точки по траектории

$$s = s(t). \tag{10}$$

Если уравнение движения точки задано в естественной форме, то скорость точки

$$\bar{v} = \frac{ds}{dt} \cdot \bar{\tau} = v_\tau \cdot \bar{\tau}, \tag{11}$$

где $\bar{\tau}$ -орт касательной, направленный в сторону увеличения s ; v_τ - проекция скорости на касательную, т.е. алгебраическая величина скорости, равная

$$v_\tau = v = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \,. \tag{12}$$

Если $v_\tau > 0$, то точка движется в сторону увеличения s , а если $v_\tau < 0$, то точка движется в противоположную сторону.

Ускорение точки лежит в соприкасающейся плоскости и определяется как векторная сумма касательного и нормального ускорений:

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n \,, \tag{13}$$

при этом вектор касательного ускорения,

$$\bar{a}_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} \cdot \bar{\tau} = \ddot{s} \cdot \bar{\tau}, \tag{14}$$

а вектор нормального ускорения

$$\bar{a}_n = \frac{v^2}{\rho} \cdot \bar{n}\,, \tag{15}$$

где $\bar{n}$ - орт главной нормали, направленный к центру кривизны.

Скалярные множители при ортах $\bar{\tau}$ и $\bar{n}$ в выражениях (14) и (15) есть проекции ускорения точки на естественные оси τ и n, т.е.

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = s, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}. \tag{16}$$

Если $v_\tau = s$ и $a_\tau = s$ имеют одинаковые знаки, то $\bar{v}$ и $\bar{a}_\tau$ имеют одинаковые направления, движение ускоренное; а если $v_\tau = s$ и $a_\tau = s$ имеют разные знаки, то $\bar{v}$ и $\bar{a}_\tau$ направлены в разные стороны – движение замедленное.

Модуль ускорения точки

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \tag{17}$$

При равномерном движении величина скорости постоянна. Уравнение равномерного движения

$$s = s_0 + v_z \cdot t, \tag{18}$$

где s_0 - значение дуговой координаты при $t = 0$.

При равнопеременном движении $a_\tau - const$. При этом движении

$$v_\tau = v_0 \pm a_\tau t, \tag{19}$$

$$s = s_0 + v_0 t \pm \frac{a_\tau t^2}{2}. \tag{20}$$

Если $v_\tau > 0$, то при $a_\tau > 0$ движение, определяемое уравнениями (19) и (20) является равноускоренным, если же $a_\tau < 0$, то это движение равнозамедленное.

При прямолинейном движении $a_n = 0$ и $a_\tau = a$.

По формулам (18) и (20) можно находить пройденный путь, если посчитать $s_0 = 0$.

При движении точки в плоскости Оху модуль касательного ускорения точки

$$|a_\tau| = \left| \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v} \right|. \tag{21}$$

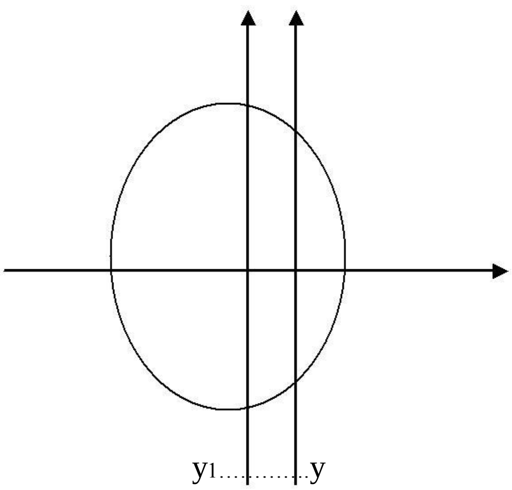
В качестве практического применения рассмотрим координаты точки плоскости xOy.

X=6cos(π/6 ×t)-3=f_1(t)
Y=12sin(π/6 ×t)=f_2(t)

$$\left(\frac{x+3}{6}\right)^2 + \left(\frac{y}{12}\right)^2 = 1$$

$x^2 + 24x + 36 + y^2 = 144$

Эллипс – (-3; 0)
а = ±6; в = ±12



Строился график движения точки по разработанной программе, график приложен. По заданному уравнению движения точки можно установить ее траектории и в определенный момент времени, найти положение точки на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорение, а также радиус кривизны траектории.