УДК 621.397.62 (075.)

МОДЕЛИ, ОПИСЫВАЮЩИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПОМЕХИ И ПОЛЕЗНОГО СИГНАЛА

Кутумов Абай
г.Алматы, Казахская академия транспорта и коммуникаций
Научный руководитель:Достиярова Алия Мухамедияровна – доцент

В работах [1-2] рассматривается ряд математических моделей, описывающих взаимодействие помехи и полезного сигнала. В общем случае, используемые математические модели сигналов можно разделить на три группы: аддитивные, мультипликативные и смешанные или комбинированные. Аддитивная модель обрабатываемого сигнала наиболее часто используется на практике и определяется выражением;

$$Y(t) = S(t) + \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t) + \varepsilon_3(t) + ... + \varepsilon_p(t), \tag{1}$$

где $S(t)$ - неслучайный полезный сигнал, $\varepsilon_1(t),...,\varepsilon_p(t)$ - случайные составляющие, действующие на фоне полезного сигнала. В общем случае, закон распределения каждой составляющей $\varepsilon_1(t),...,\varepsilon_p(t)$ различен.

Мультипликативная модель сигнала определяется выражением:

$$Y(t) = S(t) \cdot \varepsilon(t). \tag{2}$$

Большинство телеметрируемых сигналов представляют собой нестационарный случайный процесс аддитивно-мультипликативной природы и описываются математической моделью вида:

$$Y(t) = S(t) \cdot \varepsilon(t) + \eta(t), \tag{3}$$

где $\varepsilon(t), \eta(t)$ - случайные составляющие, имеющие различные законы распределения.

Математическая модель полезной составляющей $S(t)$, в большинстве случаев, является многокомпонентной, что осложняет её анализ и обработку. Исходя из непрерывности передаваемого сигнала, на любом замкнутом вещественном интервале, сигнал $S(t)$, может быть равномерно аппроксимирован полиномами [4]. Тогда модель полезного сигнала $S(t)$, можно представить элементом множества гладких функций S_c, которое определяется следующим образом [2]:

$$S_c = \left\{ S, \exists \frac{\partial^n S(t)}{\partial t^n}, n = 0.1...K, t \in R \right\}, \tag{4}$$

где K - максимальный порядок производной функции множества S_c.

Во множестве функций S_c можно выделить подмножество гармонических функций [2]:

$$\mathrm{S}_2 = \left\{ S, S(t) = \mathrm{Re}\left[\exp(a + j(\theta + 2\pi f t))\right], -\infty < t < \infty, a, \theta, f \in R \right\} \in S_C. \quad \dots (5)$$

Широкое использование в качестве модели функции полезной составляющей гармонического сигнала обусловлено следующими причинами: гармоническое колебание является единственной функцией времени, которая сохраняет свою форму при прохождении через линейную цепь с постоянными параметрами, при этом изменяются лишь амплитуда и фаза колебания; её ортогональные свойства позволяют представлять произвольный сигнал на элементы множества S_2 и использовать спектральную теорию для анализа передачи гармонических колебаний через линейные цепи.

Подмножество функций пространства S_c составляет пространство полиномиальных функций:

$$S_n = \left\{ S, S(t) = \sum_{k=0}^{p} a_k \cdot t^k, 0 \le p < \infty, a_k \in R \right\} \in S_c. \qquad (6)$$

Как правило, на практике рассматривают подмножество S_n, ограниченное условием $p \le 3$. Принятое ограничение связано с условием гладкости, заключающееся в том, что любую модель из пространства можно приблизить полиномами невысокой степени на интервале $[a, b]$.

При построении математической модели случайной (шумовой) составляющей (1 - 3) выдвигается предположение о том, что $\varepsilon(t)$ имеет гауссовский закон распределения с нулевым математическим ожиданием [1]. Как и в случае, полезного сигнала, шумовую составляющую, в общем случае, можно представить элементом множества случайных процессов $N\varepsilon$ [1]:

$$N_\varepsilon = \left\{ \begin{matrix} \varepsilon(t), P\{\varepsilon(t) < a\}, a \in R, M(\varepsilon(t)) = 0, D(\varepsilon(t)) = \sigma_\varepsilon^2, \\ \operatorname{cov}(\varepsilon(t_n), \varepsilon(t_n)) = 0, \text{при } \mathrm{n} \ne \mathrm{m}, \mathrm{t} \in \mathrm{R} \end{matrix} \right\}. \qquad (7)$$

В случае представления реализации результатов измерения в виде дискретного ряда, выражение (1) запишется в виде:

$$Y(t_k) = S(t_k) + \varepsilon(t_k), t_k = kT, T = const. k = \overline{1, n}. \qquad (8)$$

Таким образом, исходная реализация результатов измерений представляет собой ряд $\{Y(t_k)\}_{k=0}^{n}$, , в котором значения получены в равноотстоящие моменты

времени, т.е. $T = const$. Для упрощения дальнейшего анализа полученных результатов измерений, произведем нормировку значений t_k относительно времени дискретизации T. В результате $t_k = k, k = \overline{0, n},$ а выражение (8) представляется в виде суммы отсчетов дискретных рядов - полезного сигнала и шумовой доставляющей:

$$\{Y_k\} = \{S_k\} + \{\varepsilon_k\}, k = \overline{0, n}. \qquad (9)$$

Отсчеты полезного сигнала S_k принадлежат к пространству S_C. Отсчёты аддитивной шумовой составляющей принадлежат случайному процессу пространства N_{ε}.

В общем случае, модель аддитивной шумовой составляющей $\varepsilon(t)$ является реализацией случайного процесса с заданной плотностью распределения. При описании большинства математических моделей дискретных последовательностей предполагается, что случайный процесс имеет гауссовский закон распределения.

Однако, более детальные исследования, приведенные в работах Орлова А.И. [5] показывают, что закон распределения шумовой составляющей не всегда имеет гауссовский закон.

В случае прохождения сигнала, искаженного гауссовским шумом через нелинейные цепи с квадратичной характеристикой, наряду с преобразованием полезной составляющей сигнала изменяется и закон распределения шума.

С незначительными допущениями, закон распределения шума подчиняется обобщенному распределению Рэлея-Райса. Примером такой системы может являться прохождение сигнала через детектор с квадратичной характеристикой или преобразование сигнала в смесителе приемника. Для систем обработки фазо или частотно-манипулированных сигналов при однократном измерении характерна помеха, имеющая пуассоновскую плотность распределения.

Преобразование непрерывного аналогового сигнала в цифровой производится путем его дискретизации по времени и квантованию по уровням. Вследствие аналого-цифрового преобразования, непрерывный аналоговый сигнал представляется в виде набора значений, полученных в равноотстоящие промежутки времени. Такой ряд содержит в себе наряду со значениями полезной составляющей, шумовую составляющую. Появление шумовой составляющей связано с аналого-цифровым преобразованием и в частности с конечной разрядностью сетки квантования.

В работах [3-5] показано, что в этом случае шумовая составляющая имеет равномерный закон распределения.

Может показаться, что разнообразие существующих законов распределения шумовой составляющей является лишь математической абстракцией и ведет лишь к усложнению описания математической модели обрабатываемого сигнала. Однако, наличие значительного числа законов распределений шума является попыткой математического описания реального случайного сигнала и построение адекватной математической модели его описания.

Список использованных источников

1. Тихонов В.И., Харисов В.Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. Учебное пособие для ВУЗов. – М.: Радио и связь, 2014. – 608 с.
2. Френкс Л. Теория сигналов. Нью-Джерси, 1989. Пер. с англ., по ред. Д.Е.Вакмана. – М.: Сов.радио, 1994. – 344 с.
3. Фомин А.Ф. Отбраковка аномальных результатов измерений/А.Ф.Фомин, О.Н.Новоселов, А.В. Плющев. – М.: Энергоатомиздат, 2005. – 200 с.
4. Пугачев В.С. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Наука, 2009. – 196 с.
5. Орлов А.И. Современная прикладная статистика. WEB: http://orlov.i-connect.ru.