B. A. Duisengaliyeva, U. U. Umirbaev, Duisengaliyeva, B.A., Umirbaev, U.U., A wild automorphism of a free Novikov algebra, *Sib. Èlektron. Mat. Izv.*, 2018, Volume 15, 1671–1679

DOI: https://doi.org/10.33048/semi.2018.15.138

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

*Том 15, стр. 1671–1679 (2018)* УДК 512.5

DOI 10.33048/semi.2018.15.138 MSC 17A36

# ДИКИЙ АВТОМОРФИЗМ СВОБОДНОЙ АЛГЕБРЫ НОВИКОВА

Б.А. ДУЙСЕНГАЛИЕВА, У.У. УМИРБАЕВ

Abstract. An example of a non-triangulable locally nilpotent derivation and an example of a wild exponential automorphism of the free Novikov algebra $N\langle x, y, z\rangle$ in three variables $x, y, z$ over a field of characteristic zero are constructed.

**Keywords:** differential polynomial algebra, free Novikov algebra, derivation, automorphism.

## 1. Введение

Хорошо известно [1, 2, 3, 4], что автоморфизмы алгебры многочленов $k[x, y]$ и свободной ассоциативной алгебры $k\langle x, y\rangle$ от двух переменных над произвольным полем $k$ являются ручными. Известно также, что автоморфизмы двупорожденных свободных алгебр Пуассона над полями нулевой характеристики [5] и автоморфизмы двупорожденных свободных правосимметричных алгебр над произвольными полями [6] являются ручными. П. Кон [7] доказал, что автоморфизмы свободных алгебр Ли конечного ранга являются ручными.

Алгебры многочленов [8] и свободные ассоциативные алгебры [9] от трех переменных над полями нулевой характеристики имеют дикие автоморфизмы.

Р. Ренчлер [10] доказал, что локально-нильпотентные дифференцирования алгебры многочленов от двух переменных над полями нулевой характеристики являются триангулируемыми. Рассмотрим дифференцирование $\partial$ алгебры многочленов $k[x, y, z]$ от трех переменных $x, y, z$ над полем $k$ характеристики

Duisengaliyeva, B.A., Umirbaev, U.U., A wild automorphism of a free Novikov algebra.



Работа поддержана МОН РК (грант AP 05133009).

*Поступила 21 сентября 2018 г., опубликована 18 декабря 2018 г.*

0, определенное правилом

$$\partial : x \longmapsto 2y, \quad y \longmapsto z, \quad z \longmapsto 0.$$

Тогда $w = y^2 - xz$ принадлежит ядру дифференцирования $\partial$ и дифференцирование

$$D = w\partial \tag{1}$$

является локально-нильпотентным. Х. Басс [11] показал не триангулируемость дифференцирования $D = w\partial$.

Известный автоморфизм Нагаты $\varphi$ алгебры многочленов $k[x, y, z]$ от трех переменных $x, y, z$ над полем $k$ характеристики 0 является [12] экспонентой дифференцирования $D = w\partial$, т.е.

$$\varphi = \exp D = \mathrm{Id} + D + \frac{D^2}{2!} + \frac{D^3}{3!} + \dots.$$

Имеем

$$\varphi(x) = x + 2yw + zw^2, \quad \varphi(y) = y + zw, \quad \varphi(z) = z. \tag{2}$$

Хорошо известно [8], что автоморфизм Нагаты алгебры многочленов $k[x, y, z]$ является диким в случае нулевой характеристики.

Неассоциативная алгебра $A = (A, \circ)$ называется *(левой) алгеброй Новикова*, если $A$ удовлетворяет следующим тождествам:

$$(a \circ b) \circ c - a \circ (b \circ c) = (b \circ a) \circ c - b \circ (a \circ c),$$

$$(a \circ b) \circ c = (a \circ c) \circ b,$$

для любого $a, b, c \in A$.

С.И. Гельфанд и И.Я. Дорфман в работе [13] показали, что дифференциальная коммутативная ассоциативная алгебра с дифференцированием $\theta$ относительно умножения $a \circ b = a(\theta b)$ становится алгеброй Новикова. В работах [14, 15] построены базисы свободных алгебр Новикова. Теорема о свободе для алгебр Новикова доказана в [16].

В работе [15] свободные алгебры Новикова представлены через обыкновенные алгебры дифференциальных многочленов с помощью умножения $a \circ b = a(\theta b)$. В работе [17] доказано, что такое представление имеет место и для несвободных алгебр Новикова.

Рассмотрим дифференциальные алгебры с множеством коммутирующих дифференцирований $\Delta = \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m\}$. Дифференциальные алгебры называются *обыкновенными*, если $m = 1$, и *частными*, если $m \geq 2$. Дифференцирование $D$ и автоморфизм Нагаты $\varphi$ непосредственно дают примеры не триангулируемого дифференцирования и дикого автоморфизма алгебры дифференциальных многочленов $k\{x, y, z\}$. Более того, частные дифференциальные алгебры многочленов $k\{x, y\}$ от двух переменных также имеют дикие автоморфизмы [18]. Вопрос о ручных и диких автоморфизмах остается открытым для обыкновенной дифференциальной алгебры многочленов $k\{x, y\}$ от двух переменных.

В настоящей работе, используя указанные связи между алгебрами многочленов, дифференциальными алгебрами и алгебрами Новикова, построен пример не триангулируемого дифференцирования и дикого автоморфизма свободной алгебры Новикова от трех переменных над полями характеристики ноль. Эти примеры являются аналогами дифференцирования $D$ и автоморфизма Нагаты $\varphi$ для алгебр Новикова. Для свободных двупорожденных алгебр Новикова вопрос о ручных и диких автоморфизмах остается также открытым.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 приведены определения и некоторые понятия алгебры дифференциальных многочленов. Раздел 3 посвящен описанию базисных элементов свободных алгебр Новикова в дифференциальных алгебрах. В разделе 4 построен пример не триангулируемого дифференцирования свободной алгебры Новикова от трех переменных и в разделе 5 построен пример дикого автоморфизма свободной алгебры Новикова от трех переменных.

## 2. Алгебра дифференциальных многочленов

Пусть $R$ – произвольное коммутативное кольцо с единицей. Отображение $d : R \to R$ называется *дифференцированием*, если для всех $s, t \in R$ выполняются условия

$$d(s+t) = d(s) + d(t),$$
$$d(st) = d(s)t + sd(t).$$

Пусть $\Delta = \{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$ – основное множество дифференциальных операторов.

Кольцо $R$ называется *дифференциальным кольцом* или $\Delta$-*кольцом*, если $\delta_1, \ldots, \delta_m$ являются коммутирующими дифференцированиями кольца $R$, т.е. $\delta_i : R \to R$ – дифференцирования и $\delta_i\delta_j = \delta_j\delta_i$ для всех $i, j$.

Пусть $\Theta$ – свободный коммутативный моноид на множестве дифференциальных операторов $\Delta = \{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$. Элементы

$$\theta = \delta_1^{i_1} \ldots \delta_m^{i_m}$$

моноида $\Theta$ называются *производными операторами. Порядком* $\theta$ называется число $|\theta| = i_1 + \ldots + i_m$. Положим также $\gamma(\theta) = (i_1, \ldots, i_m) \in \mathbb{Z}_+^m$, где $\mathbb{Z}_+$ – множество всех неотрицательных целых чисел.

Пусть $R$ – произвольное дифференциальное кольцо и пусть $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ – множество символов. Рассмотрим множество символов $X^\Theta = \{x_i^\theta | 1 \leq i \leq n, \theta \in \Theta\}$ и алгебру многочленов $R[X^\Theta]$ на множестве символов $X^\Theta$. Полагая

$$\delta_i(x_j^\theta) = x_j^{\theta\delta_i}$$

для всех $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, \theta \in \Theta$, превратим алгебру $R[X^\Theta]$ в дифференциальную алгебру. Дифференциальная алгебра $R[X^\Theta]$ обозначается через $R\{X\}$ и называется *алгеброй дифференциальных многочленов* над $R$ от множества переменных $X$ [19].

Пусть $M$ – свободный коммутативный моноид от множества переменных $x_i^\theta$, где $1 \leq i \leq n$ и $\theta \in \Theta$. Элементы $M$ назовем также *дифференциальными* мономами в алфавите $X$. Дифференциальные мономы образуют базис алгебры $R\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, т.е. любой элемент $a \in R\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ однозначно записывается в виде

$$a = \sum_{u \in M} r_u u$$

с конечным числом ненулевых $r_u \in R$.

Для любого $x_i^\theta \in X^\Theta$ положим

$$\deg(x_i^\theta) = 1, \quad d(x_i^\theta) = |\theta|.$$

где $1 \leq i \leq n$. Если $u = a_1 \dots a_s \in M$, где $a_1, \dots, a_s \in X^\Theta$, то положим

$$\deg(u) = \deg(a_1) + \dots + \deg(a_s), \quad d(u) = d(a_1) + \dots + d(a_s),$$

т.е. через $\deg(u)$ обозначим стандартную функцию степени монома $u$ по переменным $x_1, \dots, x_n$, а через $d(u)$ обозначим дифференциальную степень монома $u$ по дифференцированиям $\delta_1, \dots, \delta_m$.

## 3. Базис свободных алгебр Новикова

Пусть $k\{x_1, \dots, x_n\}$ – алгебра дифференциальных многочленов над полем $k$ характеристики 0 от переменных $x_1, \dots, x_n$ с одним дифференцированием $\delta$. Для удобства записи производные $a^\delta, a^{\delta^2}, a^{\delta^s}$ обозначим через $a', a'', a^{(s)}$, соответственно. Положим $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ и через $X^\delta$ обозначим множество всех символов вида $x_i^{(r)}$, где $1 \leq i \leq n$, $r \in \mathbb{Z}_+$. Для любого $x_i^{(r)}, x_j^{(s)} \in X^\delta$ будем считать, что $x_i^{(r)} > x_j^{(s)}$, если $i > j$ или если $i = j$, $r > s$. Множество $M$ всех дифференциальных мономов вида

$$u = x_{i_1}^{(s_1)} x_{i_2}^{(s_2)} \dots x_{i_t}^{(s_t)},$$

где $t \geq 0$, $x_{i_j}^{(s_j)} \in X^\delta$ для всех $1 \leq j \leq t$ и $x_{i_1}^{(s_1)} \geq x_{i_2}^{(s_2)} \geq \dots \geq x_{i_t}^{(s_t)}$, образует линейный базис алгебры $k\{x_1, \dots, x_n\}$.

На дифференциальной алгебре введем новую операцию $\circ$ полагая

$$f \circ g = fg', \quad f, g \in k\{x_1, \dots, x_n\}.$$

Легко проверить, что алгебра дифференциальных многочленов $k\{x_1, \dots, x_n\}$ с новой операцией $\circ$ становится алгеброй Новикова. Через $N_0\langle x_1, \dots, x_n\rangle$ обозначим подалгебру этой алгебры порожденную элементами $x_1, \dots, x_n$. В [15] доказано, что в случае полей нулевой характеристики $N_0\langle x_1, \dots, x_n\rangle$ является свободной алгеброй Новикова от переменных $x_1, \dots, x_n$ без единицы.

Опишем структуру пространства $N_0\langle x_1, \dots, x_n\rangle$ в терминах дифференциальных мономов.

**Предложение 1.** *Множество всех дифференциальных мономов* $u \in M$ *с условием* $\deg(u) - d(u) = 1$ *представляет базис свободной алгебры Новикова* $N_0\langle x_1, \dots, x_n\rangle$.

*Доказательство.* Пусть $L$ – множество всех дифференциальных мономов $u \in M$ с условием $\deg(u) - d(u) = 1$ и $V$ – линейная оболочка $L$. Если $u, v \in L$, то, очевидно, $u \circ v = uv'$ является линейной комбинацией дифференциальных мономов $w \in L$. Следовательно, $V$ является подалгеброй алгебры Новикова $\langle k\{x_1, \dots, x_n\}, \circ\rangle$. Напомним, что $N_0\langle x_1, \dots, x_n\rangle$ подалгебра $\langle k\{x_1, \dots, x_n\}, \circ\rangle$ порожденная элементами $x_1, x_2, \dots, x_n$. Так как $x_1, x_2, \dots, x_n \in L \subseteq V$, то отсюда непосредственно следует, что $N_0\langle x_1, \dots, x_n\rangle \subseteq V$.

Теперь покажем, что $N_0\langle x_1, \dots, x_n\rangle \supseteq V$. Для этого достаточно проверить, что любое $u \in L$ принадлежит $N_0\langle x_1, \dots, x_n\rangle$. Если $\deg(u) = 1$, то $u = x_i \in N_0\langle x_1, \dots, x_n\rangle$. Предположим, что любой дифференциальный моном $v \in L$ с условием $\deg(v) < s$, где $s \geq 2$, принадлежит $N_0\langle x_1, \dots, x_n\rangle$.

Пусть $u \in L$ и $\deg(u) = s$. Сначала рассмотрим случай, когда найдется $i$ такое, что $x_i'|u$, т.е. $u = u_1 \cdot x_i'$. Тогда $u_1, x_i \in L$. По индуктивному предположению имеем $u_1, x_i \in N_0\langle x_1, \dots, x_n\rangle$. Так как $u = u_1 \cdot x_i' = u_1 \circ x_i$, то $u \in N_0\langle x_1, \dots, x_n\rangle$.

Допустим, что $u$ не делится ни на какое $x_i'$. Так как $\deg(u) - d(u) = 1$, то найдутся $u_0, v_0$, где $v_0 = x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_{k-1}}x_{i_k}^{(k)}$, такие, что $u = u_0v_0$. Тогда $\deg(u_0) = \deg(u) - k$, $d(u_0) = d(u) - k$. Следовательно,

$$\deg(u_0) - d(u_0) = \deg(u) - k - (d(u) - k) = \deg(u) - d(u) = 1,$$

т.е. $u_0 \in L$ и по индуктивному предположению $u_0 \in N_0\langle x_1, \dots, x_n\rangle$.

Имеем

$$u_0 \circ (x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_{k-1}}x_{i_k}^{(k-1)}) = u_0(x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_{k-1}}x_{i_k}^{(k-1)})'$$

$$= u_0(\sum_{j=1}^{k-1} x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_j}'\dots x_{i_{k-1}}x_{i_k}^{(k-1)} + v_0) = \sum_{j=1}^{k-1} u_0x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_j}'\dots x_{i_{k-1}}x_{i_k}^{(k-1)} + u.$$

Так как $u_0x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_j}'\dots x_{i_{k-1}}x_{i_k}^{(k-1)}$ делится на $x_{i_j}'$, то как было доказано выше, $u_0x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_j}'\dots x_{i_{k-1}}x_{i_k}^{(k-1)} \in N_0\langle x_1, \dots, x_n\rangle$. Так как $u_0 \circ (x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_{k-1}}x_{i_s}^{(k-1)}) \in N_0\langle x_1, \dots, x_n\rangle$, то отсюда следует, что $u \in N_0\langle x_1, \dots, x_n\rangle$. $\square$

Через $N\langle x_1, \dots, x_n\rangle = k \oplus N_0\langle x_1, \dots, x_n\rangle = N_0\langle x_1, \dots, x_n\rangle^{\#}$ обозначим алгебру полученную от $N_0\langle x_1, \dots, x_n\rangle$ с формальным присоединением единицы. Тогда $N\langle x_1, \dots, x_n\rangle$ является свободной алгеброй Новикова от переменных $x_1, \dots, x_n$ с единицей. Ниже всюду используется данное представление свободной алгебры $N\langle x_1, \dots, x_n\rangle$.

## 4. Пример не триангулируемого дифференцирования

Дифференцирование $d$ алгебры Новикова $N\langle x, y, z\rangle$ называется *локально-нильпотентным*, если для каждого $f \in N\langle x, y, z\rangle$ существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $d^n(f) = 0$. Если $d$ – локально-нильпотентное дифференцирование, то отображение

$$\exp d : N\langle x, y, z\rangle \to N\langle x, y, z\rangle$$

является автоморфизмом и называется *экспоненциальным автоморфизмом.*

Напомним, что дифференцирование $d$ алгебры Новикова $N\langle x, y, z\rangle$ вида

$$d = a_1(y, z)\partial_x + a_2(z)\partial_y + a_3\partial_z,$$

т.е.

$$d(x) = a_1(y, z), \quad d(y) = a_2(z), \quad d(z) = a_3,$$

где $a_1(y, z) \in N\langle y, z\rangle$, $a_2(z) \in N\langle z\rangle$ и $a_3 \in k$, называется *треугольным.* Хорошо известно, что любое треугольное дифференцирование является локально-нильпотентным.

Дифференцирование $d$ алгебры Новикова $N\langle x, y, z\rangle$ называется *триангулируемым*, если существует автоморфизм алгебры Новикова $\phi$ такой, что $\phi^{-1}d\phi$ является треугольным.

Пусть $k\{x,y,z\}$ – алгебра дифференциальных многочленов над полем $k$ характеристики 0 от трех переменных $x,y,z$ с одним дифференцированием $\delta$. Рассмотрим дифференцирование $\partial_1$ алгебры $k\{x,y,z\}$, определенное правилом

$$\partial_1 : x \longmapsto 2y, \quad y \longmapsto z, \quad z \longmapsto 0.$$

Положим $w = y^2 - xz$. Тогда $\partial_1(w) = 0$. Следовательно, $\partial_1(w'') = (\partial_1(w))'' = 0$. Заметим, что $w'' = 2(y')^2 + 2yy'' - x''z - 2x'z' - xz''$.

Теперь рассмотрим дифференцирование

$$D_1 = \frac{1}{2}w''\partial_1 = (yw'')\partial_x + \left(\frac{1}{2}zw''\right)\partial_y$$

алгебры дифференциальных многочленов $k\{x,y,z\}$. Имеем

$$D_1(w) = \left(\frac{1}{2}w''\partial_1\right)(y^2 - xz) = 2y\left(\frac{1}{2}w''z\right) - (w''y)z = 0,$$

и следовательно, $D_1(w'') = (D_1(w))'' = 0$.

Используя эти равенства, прямым вычислением получаем

$$D_1(x) = \left(\frac{1}{2}w''\partial_1\right)(x) = yw'',\ D_1^2(x) = \left(\frac{1}{2}w''\partial_1\right)(yw'') = \frac{1}{2}z(w'')^2,$$

$$D_1^3(x) = \left(\frac{1}{2}w''\partial_1\right)\left(\frac{1}{2}z(w'')^2\right) = 0.$$

$$D_1(y) = \left(\frac{1}{2}w''\partial_1\right)(y) = \frac{1}{2}zw'',\ D_1^2(y) = \left(\frac{1}{2}w''\partial_1\right)\left(\frac{1}{2}zw''\right) = 0.$$

$$D_1(z) = \left(\frac{1}{2}w''\partial_1\right)(z) = 0.$$

Следовательно, дифференцирование $D_1$ является локально-нильпотентным дифференцированием алгебры дифференциальных многочленов $k\{x,y,z\}$.

Рассмотрим алгебру Новикова $\langle k\{x,y,z\},\circ\rangle$, где $f\circ g = fg'$ для всех $f,g \in k\{x,y,z\}$. Пусть $N\langle x,y,z\rangle = k \oplus N_0\langle x,y,z\rangle$, где $N_0\langle x,y,z\rangle$ – подалгебра алгебры Новикова $\langle k\{x,y,z\},\circ\rangle$, порожденная элементами $x,y,z$.

Используя операцию $\circ$ запишем дифференцирование $D_1$ в терминах элементов свободной алгебры Новикова $N\langle x,y,z\rangle$:

$$D_1 = (yw'')\partial_x + \left(\frac{1}{2}zw''\right)\partial_y = (2y\circ(y\circ y) - y\circ(x\circ z) - y\circ(z\circ x))\partial_x$$

$$+\frac{1}{2}(2z\circ(y\circ y) - z\circ(x\circ z) - z\circ(z\circ x))\partial_y = (2y\circ w_0)\partial_x + (z\circ w_0)\partial_y,$$

где $w_0 = \frac{1}{2}(2y\circ y - x\circ z - z\circ x)$. Следовательно, дифференцирование $D_1$ также является дифференцированием свободной алгебры Новикова $N\langle x,y,z\rangle$.

**Теорема 1.** *Дифференцирование*

$$D_1 = (2y\circ w_0)\partial_x + (z\circ w_0)\partial_y,$$

*где* $w_0 = \frac{1}{2}(2y\circ y - x\circ z - z\circ x)$, *свободной алгебры Новикова* $N\langle x,y,z\rangle$ *от трех переменных* $x,y,z$ *над полем* $k$ *характеристики* 0 *не является триангулируемым.*

*Доказательство.* Рассмотрим гомоморфизм
$$\theta : N\langle x, y, z\rangle \to k[x, y, z],$$
определенный правилом $\theta(x) = x$, $\theta(y) = y$, $\theta(z) = z$. Ядро этого гомоморфизма является идеалом, порожденным всеми коммутаторами и ассоциаторами, т.е. идеалом, порожденным элементами $a \circ b - b \circ a$ и $(a \circ b) \circ c - a \circ (b \circ c)$, где $a, b, c \in N\langle x, y, z\rangle$.

Заметим, что
$$\theta(w_0) = w. \tag{3}$$
Используя (3), легко вычислить, что дифференцирование $D_1$ индуцирует дифференцирование
$$\theta(2y \circ w_0)\partial_x + \theta(z \circ w_0)\partial_y = 2yw\partial_x + zw\partial_y = D.$$

Таким образом, $D_1$ индуцирует дифференцирование $D$ алгебры многочленов $k[x, y, z]$, определенное в (1). Известно, что дифференцирование $D$ не является триангулируемым [11]. Отсюда следует, что $D_1$ также не является триангулируемым. $\square$

## 5. Автоморфизмы свободной алгебры Новикова

Автоморфизмы алгебры Новикова $N\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ вида
$$\sigma(i, \alpha, f) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, \alpha x_i + f, x_{i+1}, \ldots, x_n),$$
где $0 \neq \alpha \in k$, $f \in N\langle x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n\rangle$, называются *элементарными*. Подгруппа группы автоморфизмов алгебры Новикова $N\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$, порожденная всеми элементарными автоморфизмами, называется *подгруппой ручных автоморфизмов*. Элементы этой подгруппы называются *ручными автоморфизмами*. Не ручные автоморфизмы называются *дикими*.

Рассмотрим экспоненциал $\psi = \exp D_1$ дифференцирования $D_1$ из теоремы 1. Имеем
$$\begin{aligned} D_1(w_0) &= (z \circ w_0) \circ y + y \circ (z \circ w_0) - (y \circ w_0) \circ z - z \circ (y \circ w_0) \\ &= (z \circ y) \circ w_0 + y \circ (z \circ w_0) - (y \circ z) \circ w_0 - z \circ (y \circ w_0) = 0. \end{aligned}$$
Непосредственные вычисления дают
$$\psi(x) = x + 2y \circ w_0 + (z \circ w_0) \circ w_0, \quad \psi(y) = y + z \circ w_0, \quad \psi(z) = z.$$

**Теорема 2.** *Автоморфизм*
$$\psi = \exp D_1 = (x + 2y \circ w_0 + (z \circ w_0) \circ w_0, y + z \circ w_0, z)$$
*свободной алгебры Новикова $N\langle x, y, z\rangle$ от трех переменных $x, y, z$ над полем $k$ характеристики $0$ является диким.*

*Доказательство.* Рассмотрим гомоморфизм
$$\theta : N\langle x, y, z\rangle \to k[x, y, z],$$
приведенный в доказательстве теоремы 1. Непосредственные вычисления с использованием (3) дают
$$\theta(\psi(x)) = x + 2yw + zw^2, \quad \theta(\psi(y)) = y + zw, \quad \theta(\psi(z)) = z.$$

Таким образом, $\psi$ индуцирует автоморфизм

$$(x + 2yw + zw^2, y + zw, z),$$

т.е. $\psi$ индуцирует автоморфизм Нагаты алгебры многочленов $k[x, y, z]$, определенный в (2). Хорошо известно [8], что автоморфизм Нагаты алгебры многочленов $k[x, y, z]$ является диким. Отсюда следует, что автоморфизм $\psi$ также является диким. □

## References


[1] H.W.E. Jung, *Uber ganze birationale Transformationen der Ebene*, J. Reine Angew. Math., **184** (1942), 161–174. MR0008915

[2] W. van der Kulk, *On polynomial rings in two variables*, Nieuw Arch. Wiskunde, (3), **1** (1953), 33–41. MR0054574

[3] A.G. Czerniakiewicz, *Automorphisms of a free associative algebra of rank 2*, I, II, Trans. Amer. Math. Soc., **160** (1971), 393–401; **171** (1972), 309–315. MR0280549; MR0310021

[4] L. Makar-Limanov, *The automorphisms of the free algebra of two generators*, Funksional. Anal. i Prilozhen., **4**:3 (1970), 107–108; English translation: in Functional Anal. Appl., **4** (1970), 262–263. MR0271161

[5] L. Makar-Limanov, U. Turusbekova, U. Umirbaev, *Automorphisms and derivations of free Poisson algebras in two variables*, J. Algebra, **322**:9 (2009), 3318–3330. MR2567422

[6] D. Kozybaev, L. Makar-Limanov, U. Umirbaev, *The Freiheitssatz and the automorphisms of free right-symmetric algebras*, Asian-European J. Math., **1**:2 (2008), 243–254. MR2431177

[7] P.M. Cohn, *Subalgebras of free associative algebras*, Proc. London Math. Soc. (3), **14** (1964), 618–632. MR0167504

[8] U.U. Umirbaev, I.P. Shestakov, *Subalgebras and automorphisms of polynomial rings*, Dokl. Akad. Nauk, **386**:6 (2002), 745–748. MR2004473

[9] U.U. Umirbaev, *Defining relations of the tame automorphism group of polynomial algebras and the wild automorphism of free associative algebras*, Dokl. RAN, **407**:3 (2006), 319–324. MR2348694

[10] R. Rentschler, *Operations du groupe additif sur le plan*, C. R. Acad. Sci. Paris, **267** (1968), 384–387. MR0232770

[11] H. Bass, *A non-triangular action of $G_a$ on $A^3$*, J. of Pure and Appl. Algebra, **33**:1 (1984), 1–5. MR0750225

[12] M. Nagata, *On the automorphism group of $k[x, y]$*, Kinokuniya, Tokyo: Kyoto Univ. (Lect. in Math.), 1972. MR0337962

[13] I.M. Gel'fand, I.Ya. Dorfman, *Hamiltonian operators and algebraic structures related to them*, Functional Analysis and Its Application, **13**:4 (1979), 248–262. MR0554407

[14] A.S. Dzhumadil'daev, *Codimension growth and non-koszulity of Novikov operad*, Commun. Alg., **39** (2011), 2943–2952. MR2834140

[15] A.S. Dzhumadil'daev, C. Lofwall, *Trees, free right-simmetric algebras, free Novikov algebras and identities*, Homology, Homotopy and Applications, **4**:2 (2002), 165–190. MR1918188

[16] L. Makar-Limanov, U. Umirbaev, *The Freiheitssatz for Novikov algebras*, TWMS J. Pure Appl. Math., **2** (2011), 228–235. MR2884985

[17] L.A. Bokut, Y. Chen, Z. Zhang, *Grobner-Shirshov bases method for Gelfand-Dorfman-Novikov algebras*, J. Algebra Appl., **16**:1 (2017), 1750001-1 – 1750001-22. MR3590862

[18] B.A. Duisengaliyeva, A.S. Naurazbekova, U.U. Umirbaev, *Tame and wild automorphisms of differential polynomial algebras of rank 2* (accepted).

[19] E.R. Kolchin, *Differential Algebra and Algebraic Groups. Pure and Applied Mathematics*, New York-London: Academic Press, 1973. MR0568864



Bibinur Duisengaliyeva
L.N. Gumilyov Eurasian National University,
Satpayev street, 2,
010000, Astana, Kazakhstan
*E-mail address*: bibinur.88@mail.ru

Ualbai Umirbaev
Wayne State University,
656 W. Kirby,
Detroit, MI 48202, USA
Institute of mathematics and mathematical modeling,
Pushkin street, 125,
050000, Almaty, Kazakhstan
*E-mail address*: umirbaev@math.wayne.edu