

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. A. Alimbaev, A. S. Naurazbekova, D. Kh. Kozybaev, Linearization of automorphisms and triangulation of derivations of free algebras of rank 2, *Sib. Èlektron. Mat. Izv.*, 2019, Volume 16, 1133–1146

DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.077>

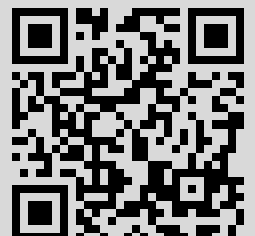
Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 89.42.63.220

June 15, 2020, 12:52:46



СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 1133–1146 (2019)

DOI 10.33048/semi.2019.16.077

УДК 512.5

MSC 17A36

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ АВТОМОРФИЗМОВ И ТРИАНГУЛЯЦИЯ
ДИФФЕРЕНЦИРОВАННЫХ СВОБОДНЫХ АЛГЕБР РАНГА 2

А.А. АЛИМБАЕВ, А.С. НАУРАЗБЕКОВА, Д.Х. КОЗЫБАЕВ

АБСТРАКТ. We define a class of \circ -varieties of algebras and prove that the tame automorphism group of a free algebra of rank two of any \circ -variety of algebras over a field admits an amalgamated free product structure. In particular, the automorphism group of a free right-symmetric algebra of rank two admits an amalgamated free product structure. Using this structure, we prove that any locally finite group of automorphisms of this algebra is conjugate to a subgroup of affine or triangular automorphisms. This implies that any reductive group of automorphisms of a two-generated free right-symmetric algebra is linearizable and any locally nilpotent derivation of this algebra is triangulable over a field of characteristic zero. All of these results are true for free commutative and free non-associative algebras of rank two.

Keywords: free right-symmetric algebra, automorphism, free product, linearization, triangulation.

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что автоморфизмы алгебры многочленов $k[x, y]$ являются ручными [1, 2]. Более того, группа автоморфизмов $Aut(k[x, y])$ этой алгебры допускает структуру амальгамированного свободного произведения [2, 3], т.е.

$$Aut(k[x, y]) = A *_C B,$$

где A — подгруппа аффинных автоморфизмов, B — подгруппа треугольных автоморфизмов и $C = A \cap B$. Аналогичные результаты также имеют место для свободных ассоциативных алгебр [4, 5] и для свободных алгебр Пуассона над

АЛИМБАЕВ, А.А., НАУРАЗБЕКОВА, А.С., КОЗЫБАЕВ, Д.Х., LINEARIZATION OF AUTOMORPHISMS AND TRIANGULATION OF DERIVATIONS OF FREE ALGEBRAS OF RANK 2.

© 2019 АЛИМБАЕВ А.А., НАУРАЗБЕКОВА А.С., КОЗЫБАЕВ Д.Х.

Работа поддержана МОН РК (грант AP05133009).

Поступила 19 декабря 2018 г., опубликована 20 августа 2019 г.

полем нулевой характеристики [6], причем группы автоморфизмов этих алгебр изоморфны группе автоморфизмов алгебры многочленов.

В работе [21] Л. Макар-Лиманов, Д. Козыбаев, У. Умирбаев доказали, что автоморфизмы свободных правосимметричных алгебр ранга два являются ручными. Группы автоморфизмов этих алгебр гораздо шире чем группы автоморфизмов алгебр многочленов благодаря богатой структуре элементарных автоморфизмов.

В 1964 году П. Кон [7] доказал, что автоморфизмы конечно порожденных свободных алгебр Ли над произвольным полем являются ручными. Дж. Левин [8] обобщил этот результат для шрайеровых многообразий алгебр. Напомним, что шрайеровыми являются многообразия всех неассоциативных алгебр [9], коммутативных и антикоммутативных алгебр [10], алгебр Ли [11, 12] и супералгебр Ли [13, 14]. Следовательно, автоморфизмы свободных неассоциативных алгебр, свободных коммутативных и антикоммутативных алгебр конечного ранга над полями также являются ручными.

В 1979 году Т. Камбаяши [15], используя структуру амальгамированного свободного произведения группы автоморфизмов $Aut(k[x, y])$, доказал, что любая алгебраическая подгруппа группы автоморфизмов $Aut(k[x, y])$ сопряжена с подгруппой линейных или треугольных автоморфизмов. Из этого следует, что действие любой редуktивной группы на k^n , где $n = 2$, является линеаризуемым. Т. Камбаяши также предположил, что этот результат справедлив для всех $n > 2$. Это предположение получило название гипотезы линеаризации для действий редуktивных групп. Оказалось, что эта гипотеза не верна для $n \geq 4$. Например, в 1989 году Шварц [16] построил контрпримеры нелинеаризуемых действий ортогональной группы O_2 на k^4 и Sl_2 на k^7 . Первые примеры нелинеаризуемых действий конечных групп были построены в [17, 18].

В 1968 году Р. Ренчлер [19] доказал, что локально-нильпотентные дифференцирования алгебры многочленов от двух переменных над полем нулевой характеристики являются триангулируемыми. Рассмотрим дифференцирование ∂ алгебры многочленов $k[x, y, z]$ от трех переменных x, y, z над полем k характеристики 0, определенное правилом

$$\partial : x \mapsto 2y, \quad y \mapsto z, \quad z \mapsto 0.$$

Тогда $w = y^2 - xz$ принадлежит ядру дифференцирования ∂ и дифференцирование

$$(1) \quad D = w\partial$$

является локально-нильпотентным. Х. Басс [20] показал не триангулируемость дифференцирования $D = w\partial$.

В данной работе мы докажем, что группа автоморфизмов свободной правосимметричной алгебры ранга два допускает структуру амальгамированного свободного произведения. Используя эту структуру, мы также докажем линеаризуемость редуktивной группы автоморфизмов и триангулируемость локально-нильпотентных дифференцирований свободной правосимметричной алгебры ранга два в случае нулевой характеристики. Аналогичные результаты верны также для свободных неассоциативных алгебр и свободных коммутативных алгебр ранга два. Отметим, что автоморфизмы свободных алгебр Ли и свободных антикоммутативных алгебр от двух переменных являются линейными.

Структура амальгамированного свободного произведения впервые используется в данной работе для доказательства триангулируемости локально-нильпотентных дифференцирований. В частности, теорема Ренчлера и триангулируемость локально-нильпотентных дифференцирований свободных ассоциативных алгебр ранга два являются следствиями результатов работ [1, 2, 4, 5].

В параграфе 2 данной работы мы определим класс \circ -многообразий алгебр, который является обобщением класса всех известных многообразий алгебр, где группы автоморфизмов двупорожденных свободных алгебр над полем ручные и допускает структуру амальгамированного свободного произведения. В частности, многообразия ассоциативно-коммутативных алгебр, ассоциативных алгебр, алгебр Пуассона, перечисленные выше шрайеровы многообразия являются \circ -многообразиями. Мы докажем, что многообразие правосимметричных алгебр также является \circ -многообразием. В параграфе 3 докажем, что группа ручных автоморфизмов двупорожденных свободных алгебр \circ -многообразий над полем допускает структуру амальгамированного свободного произведения. Неизвестно, будут ли все автоморфизмы двупорожденных свободных алгебр \circ -многообразий над полем ручными. В частности, этот вопрос остается открытым для свободных двупорожденных алгебр Новикова.

В параграфе 4 доказывается линейризуемость редуکتивной группы автоморфизмов и в параграфе 5 доказывается триангулируемость локально-нильпотентных дифференцирований свободных правосимметричных алгебр ранга два в случае нулевой характеристики.

2. \circ -МНОГООБРАЗИЯ АЛГЕБР

Пусть k — произвольное поле и пусть \mathfrak{M} — произвольное однородное многообразие алгебр над полем k . Через $\mathfrak{M}\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ будем обозначать свободную алгебру этого многообразия от переменных x_1, x_2, \dots, x_n . Через \deg обозначим стандартную функцию степени на $\mathfrak{M}\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$, то есть $\deg(x_i) = 1$ для i .

Многообразие \mathfrak{M} назовем \circ -многообразием, если выполняется следующее условие: для любого ненулевого $h \in \mathfrak{M}\langle x_1, x_2 \rangle$ и для любого ненулевого $f \in \mathfrak{M}\langle x \rangle$ имеем

$$\deg(f(h)) = \deg(f) \cdot \deg(h).$$

Очевидными примерами \circ -многообразий алгебр являются:

1. Многообразие ассоциативно-коммутативных алгебр,
2. Многообразие ассоциативных алгебр [7],
3. Многообразие алгебр Пуассона [6].

В этом параграфе мы покажем, что многообразие правосимметричных алгебр является \circ -многообразием.

Пусть $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ — конечный алфавит. Через X^* обозначим множество всех неассоциативных слов в алфавите X . Через $\deg(u)$ будем обозначать функцию степени на X^* такую, что $\deg(x_i) = 1$ для всех i . Каждое неассоциативное слово u степени ≥ 2 единственным образом представляется в виде $u = u_1 u_2$, $\deg(u_1), \deg(u_2) < \deg(u)$.

Положим $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Пусть u и v — произвольные элементы X^* . Положим $u < v$, если $\deg(u) < \deg(v)$. Пусть $\deg(u) = \deg(v) \geq 2$, $u = u_1 u_2$, $v = v_1 v_2$, то положим $u < v$, если $u_1 < v_1$ или $u_1 = v_1$ и $u_2 < v_2$.

Слово называется *плохим*, если оно содержит подслово вида $(rs)t \in X^*$, где $\deg(r), \deg(s), \deg(t) \geq 1$ и $s > t$. Слово называется *хорошим*, если оно не плохое. Через W обозначим множество всех хороших слов в алфавите X .

Через $RS_n = RS \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ обозначим свободную правосимметричную алгебру от переменных x_1, x_2, \dots, x_n над полем k . Согласно [22] множество всех хороших слов W формирует линейный базис RS_n . Каждый ненулевой элемент f из RS_n единственным образом представляется в виде

$$f = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_m w_m,$$

где $w_i \in W$, $0 \neq \lambda_i \in k$ для всех i и $w_1 > w_2 > \dots > w_m$. Слово w_1 называется *старшим словом* элемента f и обозначается через \bar{f} .

Для каждого $f \in RS_n$ через R_f обозначим оператор правого умножения на f , действующий в RS_n , т.е. $uR_f = uf$ для всех $u \in RS_n$. В частности, если $w, w_1, w_2, \dots, w_m \in X^*$, то

$$wR_{w_1}R_{w_2}\dots R_{w_m} = (\dots((w w_1)w_2)\dots w_m).$$

В [21] доказаны следующие утверждения.

Лемма 1. [21] *Произвольное хорошее слово w единственным образом представляется в виде*

$$w = x_i R_{w_1} R_{w_2} \dots R_{w_m},$$

где $w_j \in W$ для всех j и $w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_m$.

По определению хорошего слова очевидна справедливость обратного утверждения леммы 1, т.е.

Лемма 2. *Пусть $w \in RS_n$ и*

$$w = x_i R_{w_1} R_{w_2} \dots R_{w_m},$$

где $w_j \in W$ для всех j и $w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_m$. Тогда w - хорошее слово.

Лемма 3. [21] *Пусть u и v - произвольные хорошие слова и предположим, что $u = x_i R_{u_1} R_{u_2} \dots R_{u_m}$. Тогда*

$$\overline{uv} = x_i R_{u_1} \dots R_{u_s} R_v R_{u_{s+1}} \dots R_{u_m},$$

где $u_1 \leq \dots \leq u_s \leq v \leq u_{s+1} \leq \dots \leq u_m$.

Следствие 1. [21] *Пусть $u, v, w \in W$, то $\overline{(uv)w} = \overline{(uw)v}$.*

Лемма 4. [21] *Пусть u, v, w - произвольные хорошие слова алгебры RS_n . Если $u < v$, то $\overline{w}u < \overline{w}v$ и $u\overline{w} < v\overline{w}$.*

Следствие 2. [21] *Если $f, g \in RS_n$, то $\overline{fg} = \overline{\overline{f}g}$.*

Лемма 5. *Пусть v, u - хорошие слова алгебры $RS \langle y \rangle$, w - хорошее слово алгебры $RS \langle x, y \rangle$ и $v > u$. Тогда*

- 1) $v(w) \in W$;
- 2) $v(w) > u(w)$.

Доказательство. Справедливость первого утверждения леммы очевидна при $\deg v = 1$. Пусть $\deg v = k$. Докажем оба утверждения леммы параллельно индукцией по k .

По лемме 1 $w = zR_{w_1} \dots R_{w_s}$, где $w_1 \leq \dots \leq w_s$ и $z \in \{x, y\}$. Если $k = 2$, то $v = yu$ и

$$v(w) = ww = (zR_{w_1} \dots R_{w_s})w.$$

Так как $w_1 \leq \dots \leq w_s < w$, то $v(w)$ — хорошее слово.

Так как $v = yu$, то неравенство $v > h$ возможно только при $u = y$. Тогда $v(w) > u(w)$.

Предположим, что утверждения леммы справедливы для всех значений меньших чем k . Пусть $v = yR_{v_1} \dots R_{v_t}$, $v_1 \leq \dots \leq v_t$, и $u = yR_{u_1} \dots R_{u_r}$, $u_1 \leq \dots \leq u_r$. Имеем

$$v(w) = wR_{v_1(w)} \dots R_{v_t(w)} = (zR_{w_1} \dots R_{w_s})R_{v_1(w)} \dots R_{v_t(w)}.$$

По индуктивному предположению $v_1(w), \dots, v_t(w)$ — хорошие слова и $w_1 \leq \dots \leq w_s < v_1(w) \leq \dots \leq v_t(w)$, тогда согласно лемме 2 $v(w)$ — хорошее слово.

Так как $v > u$, то выполняется одно из следующих условий:

1) $\deg(v) > \deg(u)$, тогда $\deg(v(w)) > \deg(u(w))$. Следовательно, $v(w) > u(w)$.

2) $\deg(v) = \deg(u)$, $yR_{v_1} \dots R_{v_{t-1}} > yR_{u_1} \dots R_{u_{r-1}}$ или же $yR_{v_1} \dots R_{v_{t-1}} = yR_{u_1} \dots R_{u_{r-1}}$ и $v_t > u_r$. По индуктивному предположению $wR_{v_1(w)} \dots R_{v_{t-1}(w)} > wR_{u_1(w)} \dots R_{u_{r-1}(w)}$ или $wR_{v_1(w)} \dots R_{v_{t-1}(w)} = wR_{u_1(w)} \dots R_{u_{r-1}(w)}$ и $v_t(w) > u_r(w)$. Следовательно, $v(w) > u(w)$. \square

Следствие 3. Пусть $f \in RS \langle y \rangle$, $g \in RS \langle x, y \rangle$. Тогда $\overline{f(g)} = \overline{f}(\overline{g})$.

Доказательство. По следствию 2 и лемме 5 имеем $\overline{f(g)} = \overline{f}(\overline{g}) = \overline{f}(\overline{g})$. \square

Предложение 1. Многообразие правосимметричных алгебр является \circ -многообразием.

Несложно показать, что утверждение следствия 3 также справедливо для свободных неассоциативных и свободных коммутативных алгебр ранга 2 над полем k . Следовательно, многообразия всех неассоциативных и всех коммутативных алгебр являются \circ -многообразиями.

3. АМАЛЬГАМИРОВАННОЕ СВОБОДНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Пусть k — произвольное поле. Пусть \mathfrak{M} — произвольное \circ -многообразие алгебр над k и $A = \mathfrak{M} \langle x_1, x_2 \rangle$ — свободная алгебра этого многообразия от двух переменных x_1, x_2 . Пусть также $Aut(A)$ — группа автоморфизмов алгебры A . Через $\varphi = (f_1, f_2)$ обозначим автоморфизм алгебры A такой, что $\varphi(x) = f_1$, $\varphi(y) = f_2$. Автоморфизмы вида

$$\sigma(1, a, f) = (ax + f(y), y),$$

$$\sigma(2, a, g) = (x, ay + g(x)),$$

где $0 \neq a \in k$, $f(y) \in \mathfrak{M} \langle y \rangle$, $g(x) \in \mathfrak{M} \langle x \rangle$, называются *элементарными*. Подгруппа $T(A)$ группы $Aut(A)$, порожденная всеми элементарными автоморфизмами, называется *подгруппой ручных автоморфизмов*. Не ручные автоморфизмы называются *дикими*.

Для автоморфизма $\theta = (f_1, f_2) \in Aut(A)$ определим степень, общую степень и бистепень, полагая, соответственно

$$\deg(\theta) = \max \{ \deg(f_1), \deg(f_2) \},$$

$$\text{tdeg}(\theta) = \text{deg}(f_1) + \text{deg}(f_2),$$

$$\text{bideg}(\theta) = (\text{deg}(f_1), \text{deg}(f_2)).$$

Если

$$\theta = (f_1, f_2), \quad \varphi = (g_1, g_2),$$

то произведение в $\text{Aut}(A)$ определяется следующей формулой:

$$\theta \circ \varphi = (g_1(f_1, f_2), g_2(f_1, f_2)).$$

Пусть $Af_2(A)$ – группа аффинных автоморфизмов алгебры A , т.е. группа автоморфизмов вида

$$(a_1x + b_1y + c_1, a_2x + b_2y + c_2),$$

где $a_i, b_i, c_i \in k, a_1b_2 \neq a_2b_1$, $\text{Tr}_2(A)$ – группа треугольных автоморфизмов алгебры A , т.е. группа автоморфизмов вида

$$(ax + f(y), by + c),$$

где $0 \neq a, b \in k, c \in k, f(y) \in \mathfrak{M}\langle y \rangle$, и пусть $C = Af_2(A) \cap \text{Tr}_2(A)$.

Пусть G – произвольная группа, G_0, G_1, G_2 – подгруппы группы G , причем $G_0 = G_1 \cap G_2$. Группа G называется *свободным произведением подгрупп G_1 и G_2 с объединенной подгруппой G_0* и обозначается $G = G_1 *_{G_0} G_2$, если

- (а) G порождается подгруппами G_1 и G_2 ;
- (б) Определяющие соотношения группы G состоят только из определяющих соотношений подгрупп G_1 и G_2 .

Если S_1 – система левых представителей G_1 по G_0 , S_2 – система левых представителей G_2 по G_0 , то группа G является свободным произведением подгрупп G_1 и G_2 с объединенной подгруппой G_0 (см. например [23]) в том и только в том случае, когда каждый $g \in G$ однозначно представляется в виде

$$g = g_1 \dots g_k c,$$

где $g_i \in S_1 \cup S_2, i = 1, \dots, k, g_i, g_{i+1}$ одновременно не принадлежат S_1 и $S_2, c \in G_0$.

Запись $h_i(y)$ в доказательствах следующих нескольких лемм означает, что $h_i(y) \in \mathfrak{M}\langle y \rangle$ – однородный элемент степени i по отношению к функции степени deg от одной переменной y . Ясно, что $h_0(y) \in k$.

Лемма 6. а) Система элементов

$$A_0 = \{id = (x, y), \gamma = (y, x + ay) | a \in k\}$$

является системой представителей левых смежных классов $Af_2(A)$ по подгруппе C .

б) Система элементов

$$B_0 = \{\beta = (x + q(y), y) | q(y) = h_2(y) + \dots + h_n(y)\}$$

является системой представителей левых смежных классов $\text{Tr}_2(A)$ по подгруппе C .

Доказательство. Проверим условие а). Пусть $l \in Af_2(A)$. Мы должны показать, что для любого l найдутся $\gamma \in A_0$, $\eta \in C$ такие, что $l = \gamma \circ \eta$.

Если $l = (a_1x + b_1y + c_1, a_2x + b_2y + c_2)$, где $a_2 \neq 0$, то положим $\gamma = (y, x + \frac{b_2}{a_2}y)$, $\eta = ((b_1 - \frac{a_1b_2}{a_2})x + a_1y + c_1, a_2y + c_2)$. Тогда l представляется в виде

$$l = (y, x + \frac{b_2}{a_2}y) \circ ((b_1 - \frac{a_1b_2}{a_2})x + a_1y + c_1, a_2y + c_2) = \gamma \circ \eta.$$

Если $a_2 = 0$, то $\gamma = id$, $\eta = l$, т.е. $l = id \circ l$.

Допустим $\gamma_1 = (y, x + a_1y)$, $\gamma_2 = (y, x + a_2y)$ и $\gamma_1C = \gamma_2C$, тогда

$$\gamma_1^{-1} \circ \gamma_2 = (-a_1x + y, x) \circ (y, x + a_2y) = (x, (-a_1 + a_2)x + y).$$

Отсюда следует, что $\gamma_1^{-1} \circ \gamma_2 \in C$ тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2$. Следовательно, $\gamma_1 = \gamma_2$.

Теперь проверим условие б). Пусть $\psi = (ax + h(y), by + c) \in Tr_2(A)$ и $h(y) = h_0(y) + h_1(y) + \dots + h_n(y)$. Мы должны показать, что для любого ψ найдутся $\beta \in B_0$, $\mu \in C$ такие, что $\psi = \beta \circ \mu$. Положим $\beta = (x + \frac{1}{a}q(y), y)$, $\mu = (ax + h_0(y) + h_1(y), by + c)$, где $q(y) = h_2(y) + \dots + h_n(y)$. Тогда ψ представляется в виде

$$\psi = (x + \frac{1}{a}q(y), y) \circ (ax + h_0(y) + h_1(y), by + c) = \beta \circ \mu.$$

Допустим $\beta_1 = (x + q(y), y)$, $\beta_2 = (x + q^{(1)}(y), y)$ и $\beta_1C = \beta_2C$. Тогда имеем

$$\beta_1^{-1} \circ \beta_2 = (x - q(y), y) \circ (x + q^{(1)}(y), y) = (x - q(y) + q^{(1)}(y), y).$$

Отсюда следует, что $\beta_1^{-1} \circ \beta_2 \in C$ тогда и только тогда, когда $q(y) = q^{(1)}(y)$. Следовательно, $\beta_1 = \beta_2$. \square

Лемма 7. Пусть A_0, B_0 – множества, определенные в лемме 6. Тогда любой ручной автоморфизм φ алгебры A разлагается в произведение вида

$$(2) \quad \varphi = \gamma_1 \circ \beta_1 \circ \gamma_2 \circ \beta_2 \circ \dots \circ \gamma_k \circ \beta_k \circ \gamma_{k+1} \circ \lambda,$$

где $\gamma_i \in A_0$, $\gamma_2, \dots, \gamma_k \neq id$, $\beta_i \in B_0$, $\beta_1, \dots, \beta_k \neq id$, $\lambda \in C$.

Доказательство. Очевидно, что

$$(ax + h(y), y) = (x + \frac{1}{a}q(y), y) \circ (ax + h_0(y) + h_1(y), y),$$

где $h(y) = h_0(y) + h_1(y) + h_2(y) + \dots + h_n(y)$, $q(y) = h_2(y) + \dots + h_n(y)$,

$$(x, by + h^{(1)}(x)) = (y, x) \circ (x + \frac{1}{b}q^{(1)}(y), y) \circ (y, bx + h_0^{(1)}(y) + h_1^{(1)}(y)),$$

где $h^{(1)}(y) = h_0^{(1)}(y) + h_1^{(1)}(y) + h_2^{(1)}(y) + \dots + h_m^{(1)}(y)$, $q^{(1)}(y) = h_2^{(1)}(y) + \dots + h_m^{(1)}(y)$, т.е. любой элементарный автоморфизм имеет вид

$$l_1 \circ \beta \circ l_2,$$

где $\beta \in B_0$, $l_1, l_2 \in Af_2(A)$.

Любой ручной автоморфизм φ представляется в виде композиции элементарных автоморфизмов $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, т.е.

$$\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_n.$$

Следовательно, имеем

$$\varphi = l_1 \circ \beta_1 \circ l_2 \circ \beta_2 \circ \dots \circ l_n \circ \beta_n \circ l_{n+1},$$

где $\beta_i \in B_0$, $l_i \in Af_2(A)$.

Докажем индукцией по n , что φ представляется в виде произведения (2) с $k \leq n$.

Согласно лемме 6 автоморфизм l_1 записывается в виде $\gamma_1 \circ \lambda_1$, где $\gamma_1 \in A_0$, $\lambda_1 \in C$. Тогда

$$l_1 \circ \beta_1 = \gamma_1 \circ \lambda_1 \circ \beta_1.$$

Пусть $\lambda_1 = (ax + by + c, b_1y + c_1)$, $\beta_1 = (x + q(y), y)$. Тогда

$$\lambda_1 \circ \beta_1 \circ \lambda_1^{-1} = (x + \frac{1}{a}q(b_1y + c_1), y).$$

Через $q_{<2}(b_1y + c_1)$ обозначим часть степени меньше чем два элемента $q(b_1y + c_1)$. Пусть $\lambda = (x - \frac{1}{a}q_{<2}(b_1y + c_1), y)$. Ясно, что $\lambda \in C$ и $\lambda_1^{-1} \circ \lambda \in C$. Обозначим $\lambda_1^{-1} \circ \lambda$ через λ_2^{-1} . Тогда

$$l_1 \circ \beta_1 = \gamma_1 \circ \lambda_1 \circ \beta_1 = \gamma_1 \circ \beta'_1 \circ \lambda_2,$$

где $\beta'_1 = \lambda_1 \circ \beta_1 \circ \lambda_2^{-1} = (x + \frac{1}{a}q(b_1y + c_1) - \frac{1}{a}q_{<2}(b_1y + c_1), y) \in B_0$. Имеем

$$\varphi = \gamma_1 \circ \beta'_1 \circ (\lambda_2 \circ l_2) \circ \beta_2 \circ \dots \circ l_n \circ \beta_n \circ l_{n+1}.$$

По индуктивному предположению произведение

$$(\lambda_2 \circ l_2) \circ \beta_2 \circ \dots \circ l_n \circ \beta_n \circ l_{n+1}$$

записывается в виде

$$\gamma_2 \circ \beta'_2 \circ \gamma_3 \circ \dots \circ \gamma_k \circ \beta'_k \circ \gamma_{k+1} \circ \lambda, \quad k \leq n.$$

Следовательно,

$$\varphi = \gamma_1 \circ \beta'_1 \circ \gamma_2 \circ \beta'_2 \circ \dots \circ \gamma_k \circ \beta'_k \circ \gamma_{k+1} \circ \lambda.$$

Если $\gamma_2 \neq id$, то полученное представление имеет вид (2). Теперь рассмотрим случай когда $\gamma_2 = id$. Так как $\beta'_1 \circ \beta'_2 = \beta''_2 \in B_0$, то

$$\varphi = \gamma_1 \circ \beta'_1 \circ \beta'_2 \circ \gamma_3 \circ \dots \circ \gamma_k \circ \beta'_k \circ \gamma_{k+1} \circ \lambda = \gamma_1 \circ \beta''_2 \circ \gamma_3 \circ \dots \circ \gamma_k \circ \beta'_k \circ \gamma_{k+1} \circ \lambda.$$

Поскольку $k - 1 < n$, то по индуктивному предположению φ записывается в виде (2). \square

Лемма 8. Пусть $\varphi = (f_1, f_2)$ – автоморфизм алгебры A , представимый в виде произведения

$$\varphi = (f_1, f_2) = \beta_1 \circ \gamma_2 \circ \beta_2 \circ \dots \circ \gamma_k \circ \beta_k,$$

где $id \neq \gamma_i \in A_0$, $id \neq \beta_i \in B_0$ для всех i . Если $\beta_i = (x + q_i(y), y)$, $\deg(q_i(y)) = n_i$ для всех $1 \leq i \leq k$, то

$$\deg(f_1) = n_1 n_2 \dots n_{k-1} n_k,$$

$$\deg(f_2) = n_1 n_2 \dots n_{k-1}, \quad \text{если } k > 1$$

и

$$\deg(f_2) = 1, \quad \text{если } k = 1.$$

Доказательство. Утверждение леммы докажем индукцией по k . Если $k = 1$, то $\varphi = \beta_1$ и

$$\begin{aligned} \deg(f_1) &= \deg(q_1(y)) = n_1, \\ \deg(f_2) &= 1. \end{aligned}$$

Предположим, что утверждение леммы выполняется для $k - 1$. Положим

$$\varphi_1 = \beta_1 \circ \gamma_2 \circ \beta_2 \circ \dots \circ \gamma_{k-1} \circ \beta_{k-1} = (g_1, g_2).$$

По индуктивному предположению имеем

$$\begin{aligned} \deg(g_1) &= n_1 n_2 \dots n_{k-1}, \\ \deg(g_2) &= n_1 n_2 \dots n_{k-2}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\varphi = (f_1, f_2) = \beta_1 \circ \gamma_2 \circ \beta_2 \circ \dots \circ \gamma_k \circ \beta_k = \varphi_1 \circ \gamma_k \circ \beta_k = (g_1, g_2) \circ \gamma_k \circ \beta_k.$$

Применяя $\gamma_k = (y, x + ay)$ к (g_1, g_2) , получим

$$(u_1, u_2) = (g_1, g_2) \circ \gamma_k = (g_2, g_1 + ag_2).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \deg(u_1) &= \deg(g_2) = n_1 n_2 \dots n_{k-2}, \\ \deg(u_2) &= \max\{\deg(g_1), \deg(g_2)\} = n_1 n_2 \dots n_{k-1}. \end{aligned}$$

Далее,

$$\varphi = (f_1, f_2) = (u_1, u_2) \circ \beta_k = (u_1, u_2) \circ (x + q_k(y), y) = (u_1 + q_k(u_2), u_2).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \deg(f_1) &= \max\{\deg(u_1), \deg(q_k(u_2))\}, \\ \deg(f_2) &= \deg(u_2). \end{aligned}$$

Напомним, что $\deg(q_k) = n_k$ и $\deg(u_2) = n_1 n_2 \dots n_{k-2}$. Так как A - свободная алгебра \circ -многообразия, то

$$\deg(q_k(u_2)) = \deg u_2 \cdot \deg q_k = n_1 n_2 \dots n_k.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \deg(f_1) &= n_1 n_2 \dots n_{k-1} n_k, \\ \deg(f_2) &= n_1 n_2 \dots n_{k-1}. \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать. □

Лемма 9. *Разложение (2) автоморфизма φ из леммы 7 является однозначным.*

Доказательство. Достаточно показать, что

$$\gamma_1 \circ \beta_1 \circ \gamma_2 \circ \beta_2 \circ \dots \circ \gamma_k \circ \beta_k \circ \gamma_{k+1} \circ \lambda \neq id,$$

при $k \geq 1$, $\gamma_i \in A_0$, $\gamma_2, \dots, \gamma_k \neq id$, $\beta_i \in B_0$, $\beta_1, \dots, \beta_k \neq id$, $\lambda \in C$.

Докажем от противного. Допустим, что

$$\gamma_1 \circ \beta_1 \circ \gamma_2 \circ \beta_2 \circ \dots \circ \gamma_k \circ \beta_k \circ \gamma_{k+1} \circ \lambda = id.$$

Тогда

$$(3) \quad \beta_1 \circ \gamma_2 \circ \beta_2 \circ \dots \circ \gamma_k \circ \beta_k = \gamma_1^{-1} \circ \lambda^{-1} \circ \gamma_{k+1}^{-1}.$$

Согласно лемме 8 автоморфизм

$$\varphi = (f_1, f_2) = \beta_1 \circ \gamma_2 \circ \beta_2 \circ \dots \circ \gamma_k \circ \beta_k$$

имеет степень

$$\text{tdeg}(\varphi) = \text{deg}(f_1) + \text{deg}(f_2) = n_1 n_2 \dots n_{k-1} n_k + n_1 n_2 \dots n_{k-1}.$$

Правую часть равенства (3) обозначим через ρ , т.е.

$$\rho = \gamma_1^{-1} \circ \lambda^{-1} \circ \gamma_{k+1}^{-1}.$$

Ясно, что $\rho \in Af_2(A)$ и $\text{tdeg}(\rho) = 2$. Следовательно, $\text{tdeg}(\varphi) \neq \text{tdeg}(\rho)$, что противоречит равенству (3). \square

Теорема 1. Пусть \mathfrak{M} – произвольное \circ -многообразие алгебр и $A = \mathfrak{M}\langle x_1, x_2 \rangle$ – свободная алгебра этого многообразия от двух переменных x_1, x_2 над k . Группа ручных автоморфизмов алгебры A является свободным произведением подгрупп аффинных автоморфизмов $Af_2(A)$ и треугольных автоморфизмов $Tr_2(A)$ с объединенной подгруппой $C = Af_2(A) \cap Tr_2(A)$, т.е.

$$T(A) = Af_2(A) *_C Tr_2(A).$$

Доказательство. Так как A_0 и B_0 – системы левых смежных классов $Af_2(A)$ и $Tr_2(A)$ по подгруппе C , соответственно, то по лемме 7 и лемме 9 любой ручной автоморфизм алгебры A однозначно представляется в виде (2), т.е. $T(A) = Af_2(A) *_C Tr_2(A)$. \square

Следствие 4. Пусть \mathfrak{M} – одно из следующих многообразий: либо правосимметричных, либо неассоциативных, либо коммутативных алгебр, и $A = \mathfrak{M}\langle x_1, x_2 \rangle$ – свободная алгебра этого многообразия от двух переменных x_1, x_2 над k . Группа автоморфизмов алгебры A является свободным произведением подгрупп аффинных автоморфизмов $Af_2(A)$ и треугольных автоморфизмов $Tr_2(A)$ с объединенной подгруппой $C = Af_2(A) \cap Tr_2(A)$, т.е.

$$\text{Aut}(A) = Af_2(A) *_C Tr_2(A).$$

4. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ АВТОМОРФИЗМОВ

Пусть k – произвольное поле. Пусть \mathfrak{M} – произвольное \circ -многообразие алгебр над k и $A_n = \mathfrak{M}\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ – свободная алгебра этого многообразия от переменных x_1, x_2, \dots, x_n .

Подгруппа G группы $\text{Aut}(A_n)$ называется локально-конечной, если для любого конечномерного подпространства $V \subset A_n$ пространство $G.V = \{g(v) | g \in G, v \in V\}$ является конечномерным.

Лемма 10. Пусть G – подгруппа группы $\text{Aut}(A_n)$. Если $G.V$ – конечномерное пространство для $V = kx_1 + \dots + kx_n$, то G – локально-конечная подгруппа.

Доказательство. Пусть W – любое конечномерное подпространство алгебры A_n и h_1, \dots, h_s – ее базис. Так как $G.V$ – конечномерное пространство, то найдется такое целое d , что $\text{deg } g(h_i) < d$ для любого i и любого $g \in G$. Так как в алгебре A_n базисных элементов степени меньше чем d конечное число, то $G.W$ – конечномерное пространство. \square

Теорема 2. Пусть \mathfrak{M} – произвольное \circ -многообразие алгебр, $A = \mathfrak{M}\langle x_1, x_2 \rangle$ – свободная алгебра этого многообразия от двух переменных x_1, x_2 над k и G – локально-конечная подгруппа группы $T(A)$. Тогда G сопряжена с подгруппой $Af_2(A)$ или $Tr_2(A)$.

Доказательство. Пусть $W = kx_1 + kx_2$. Так как G — локально-конечная подгруппа группы $T(A)$, то $G.W$ — конечномерное подпространство алгебры A . Пусть $d = \max \deg f$, где f пробегает $G.W$. Итак, d конечно. Следовательно,

$$\deg g \leq d \text{ для всех } g \in G.$$

По теореме 1 группа $T(A)$ является амальгамированным свободным произведением группы аффинных $Af_2(A)$ и группы треугольных $Tr_2(A)$ автоморфизмов по их пересечению. Тогда каждый элемент H группы $T(A)$ можно записать как

$$(4) \quad H = \lambda_0 \tau_1 \lambda_1 \dots \tau_l \lambda_l,$$

где $\lambda_i \in Af_2(A) \setminus Tr_2(A)$ для всех $1 \leq i \leq l-1$ и $\tau_i \in Tr_2(A) \setminus Af_2(A)$ для всех $1 \leq i \leq l$. По лемме 8

$$\text{bideg}(\tau_1 \lambda_1 \dots \tau_l \lambda_l) = \left(\prod_{j=1}^l \deg \tau_j, \prod_{j=1}^{l-1} \deg \tau_j \right).$$

Отсюда следует, что

$$\deg H \geq \prod_{j=2}^l \deg \tau_j \geq 2^{l-1}.$$

Применяя последнее неравенство к g и учитывая, что $\deg g \leq d$, имеем

$$(5) \quad 2^{l-1} \leq d, \text{ т.е. } l \leq \log_2 2d.$$

Определим длину элемента группы $T(A)$ как минимальное число элементов $Af_2(A) \cup Tr_2(A)$ необходимых для выражения его в виде свободного произведения. Из (4) имеем, что длина $H \leq 2l + 1$. Итак, используя (5), получаем

$$\text{длина } g \leq 2(\log_2 d) + 1, \text{ для всех } g \in G.$$

Справедливость утверждения данной теоремы следует из следующего результата о подгруппах амальгамированных свободных произведений [24]: если G_1 — абстрактная группа, которая является амальгамированным свободным произведением своих подгрупп H_1 и H_2 по их пересечению, и более того, элементы G_1 имеют ограниченную длину, тогда каждая подгруппа группы G_1 является сопряженной либо к подгруппе H_1 либо к подгруппе H_2 . \square

Следуя Шафаревичу [3] и Камбаяши [15] на $Aut(A_n)$ можно ввести возрастающую фильтрацию алгебраических множеств. Это позволяет нам рассматривать $Aut(A_n)$ как бесконечномерную алгебраическую группу в смысле Шафаревича [3]. Действительно, для каждого положительного целого числа d положим

$$Y_d = \{ \phi \in Aut(A_n) : \deg \phi \leq d, \deg \phi^{-1} \leq d \}.$$

Используя те же рассуждения, что и Камбаяши [15], несложно показать справедливость следующих утверждений.

Утверждение 1. *Множество Y_d имеет структуру алгебраического множества. Y_d является замкнутым алгебраическим подмножеством алгебраического множества Y_{d+1} для каждого $d > 0$.*

Утверждение 2. *Группа автоморфизмов $Aut(A_n) = \bigcup Y_d = \varinjlim Y_d$ является бесконечномерной алгебраической группой в смысле Шафаревича [3].*

Согласно Камбаяши [15] *алгебраической подгруппой* группы $Aut(A_n) = \bigcup Y_d$ называется абстрактная подгруппа группы $Aut(A_n)$, которая также является замкнутым подмножеством множества Y_d для некоторого d . Действие алгебраической группы G на A_n может быть определено как гомоморфизм $G \rightarrow Aut(A_n)$ при котором образ G является алгебраической подгруппой группы $Aut(A_n)$.

G -модуль $V \neq 0$ называется *неприводимым* или *простым*, если он не имеет собственных не нулевых G -подмодулей. G -модуль V называется *вполне приводимым* или *полупростым*, если для каждого G -подмодуля W G -модуля V существует дополняющий G -подмодуль W' G -модуля V такой, что $V = W \oplus W'$. Алгебраическая подгруппа G группы $Aut(A_n)$ называется (линейно) *редуктивной*, если каждый конечномерный G -модуль является вполне приводимым.

Напомним также, что автоморфизм $f \in Aut(A_n)$ называется *линеаризуемым*, если существует $\varphi \in Aut(A_n)$ такой, что $\varphi^{-1}f\varphi \in Af_2(A_n)$.

Следствие 5. *Любая редуктивная группа ручных автоморфизмов двупорожденной свободной алгебры A \circ -многообразия над полем нулевой характеристики линеаризуема.*

Доказательство. Пусть G — редуктивная группа ручных автоморфизмов алгебры A . По теореме 2 G сопряжена с подгруппой $Af_2(A)$ или $Tr_2(A)$. Так как любая подгруппа группы $Tr_2(A)$ не является редуктивной, то подгруппа G линеаризуема. \square

Как уже было отмечено выше, автоморфизмы свободных алгебр Ли и свободных антикоммутативных алгебр от двух переменных являются линейными. А линеаризация автоморфизмов свободных ассоциативных алгебр и свободных алгебр Пуассона ранга 2 изоморфна линеаризации автоморфизмов алгебры многочленов $k[x, y]$ над полем нулевой характеристики.

Следствие 6. *Пусть \mathfrak{M} — одно из следующих многообразий: либо правосимметричных, либо неассоциативных, либо коммутативных алгебр, и $A = \mathfrak{M}\langle x_1, x_2 \rangle$ — свободная алгебра этого многообразия от двух переменных x_1, x_2 над полем k нулевой характеристики. Тогда любая редуктивная группа автоморфизмов алгебры A линеаризуема.*

5. ТРИАНГУЛЯЦИЯ ЛОКАЛЬНО-НИЛЬПОТЕНТНЫХ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЙ

Теорема 3. *Любое локально-нильпотентное дифференцирование D двупорожденной свободной алгебры A \circ -многообразия такое, что $\exp D \in T(A)$, триангулируемо в случае поля нулевой характеристики.*

Доказательство. Пусть D — произвольное локально-нильпотентное дифференцирование алгебры A такое, что отображение $g = \exp D = \sum_{i=0}^m \frac{D^i}{i!}$ является ручным автоморфизмом алгебры A [25]. Так как D — локально-нильпотентное дифференцирование, то существует целое положительное число d такое, что $\deg g < d$. Следовательно, g является локально-конечным ручным автоморфизмом и по теореме 2 он триангулируем, т.е. существует $\varphi \in Aut(A)$ такой,

что $\varphi^{-1}g\varphi \in Tr_2(A)$. Далее,

$$\varphi^{-1}g\varphi = \varphi^{-1} \exp D\varphi = \varphi^{-1} \sum_{i=0}^m \frac{D^i \varphi}{i!} = \sum_{i=0}^m \frac{(\varphi^{-1}D\varphi)^i}{i!} = \exp(\varphi^{-1}D\varphi) \in Tr_2(A).$$

Отсюда следует, что $\varphi^{-1}D\varphi \in Tr_2(A)$. \square

Как отмечалось выше, в работе [19] Р. Ренчлер доказал, что локально-нильпотентные дифференцирования алгебры многочленов от двух переменных над полем нулевой характеристики являются триангулируемыми. Аналог этого результата для свободных алгебр Пуассона был доказан в работе [6].

Следствие 7. Любое локально-нильпотентное дифференцирование свободной ассоциативной алгебры ранга 2 над полем нулевой характеристики триангулируемо.

Следствие 8. Пусть \mathfrak{M} — одно из следующих многообразий: либо правосимметричных, либо неассоциативных, либо коммутативных алгебр, и $A = \mathfrak{M}\langle x_1, x_2 \rangle$ — свободная алгебра этого многообразия от двух переменных x_1, x_2 над полем k нулевой характеристики. Тогда локально-нильпотентное дифференцирование алгебры A триангулируемо.

Авторы благодарят профессора У.У. Умирбаева за постановку задачи, полезные советы и комментарии при написании данной работы.

REFERENCES

- [1] H.W.E. Jung, *Über ganze birationale Transformationen der Ebene*, J. Reine Angew. Math., **184** (1942), 161–174. Zbl 0027.08503
- [2] W. van der Kulk, *On polynomial rings in two variables*, Nieuw Arch. Wiskunde, **1**:3 (1953), 33–41. Zbl 0050.26002
- [3] I.R. Shafarevich, *On some infinite dimensional algebraic groups*, Rend. Mat. e Appl., **25**:5 (1966), 208–212. Zbl 0149.39003
- [4] A.G. Czerniakiewicz, *Automorphisms of a free associative algebra of rank 2*, I, II, Trans. Amer. Math. Soc. **160** (1971), 393–401; **171** (1972), 309–315. Zbl 0227.16002; Zbl 0227.16001
- [5] L. Makar-Limanov, *The automorphisms of the free algebra of two generators*, Funktsional. Anal. i Prilozhen., **4**:3 (1970), 107–108; English translation: in Functional Anal. Appl., **4** (1970), 262–263. Zbl 0218.13006
- [6] L. Makar-Limanov, U. Turusbekova, U. Umirbaev, *Automorphisms and derivations of free Poisson algebras in two variables*, J. Algebra. **322**:9 (2009), 3318–3330. Zbl 1233.17016
- [7] P.M. Cohn, *Subalgebras of free associative algebras*, Proc. London Math. Soc., **56** (1964), 618–632. Zbl 0142.27704
- [8] J. Lewin, *On Schreier varieties of linear algebras*, Trans. Amer. Math. Soc., **132** (1968), 553–562. Zbl 0172.04201
- [9] A.G. Kurosh, *Nonassociative free algebras and free products of algebras*, Mat. Sb., **20** (1947), 239–262. Zbl 0041.16803
- [10] A.I. Shirshov, *Subalgebras of free commutative and free anticommutative algebras*, Mat. Sb., **34**:76 (1954), 81–88. Zbl 0055.02703
- [11] A.I. Shirshov, *Subalgebras of free Lie algebras*, Mat. Sb., **33**:75 (1953), 441–452. Zbl 0052.03004
- [12] E. Witt, *Die Unterringe der freien Lieschen Ringe*, Math. Z., **64** (1956), 195–216. Zbl 0070.02903
- [13] A.A. Mikhalev, *Subalgebras of free color Lie superalgebras*, Math. Notes, **37**:5 (1985), 653–661. Zbl 0583.17003
- [14] A.S. Shtern, *Free Lie superalgebras*, Sib. Mat. Z., **27**:1 (1986), 170–174. Zbl 0597.17002

- [15] T. Kambayashi, *Automorphism group of a polynomial ring and algebraic group actions on affine space*, J. of Algebra, **60** (1979), 439–451. Zbl 0429.14017
- [16] G. Schwarz, *Exotic algebraic group actions*, C.R. Acad. Sci. Paris. **309** (1989), 89–94. Zbl 0688.14040
- [17] L. Moser-Jauslin, M. Masuda and T. Petrie, *The equivariant Serre Problem for abelian groups*, Topology, **35**:2 (1996), 329–334. Zbl 0884.14007
- [18] M. Masuda, L. Moser-Jauslin and T. Petrie, *Equivariant algebraic vector bundles over representations of reductive groups: Application*, Proc.Natl.Acad.Sci. USA, **88** (1991), 9065–9066. Zbl 0753.14005
- [19] R. Rentschler, *Operations du groupe additif sur le plan*, C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. A, **267** (1968), 384–387. Zbl 0165.05402
- [20] H. Bass, *A non-triangular action of G_a on A^3* , J. of Pure and Appl. Algebra, **33**:1 (1984), 1–5. Zbl 0555.14019
- [21] D. Kozybaev, L. Makar-Limanov, U. Umirbaev, *The Freiheitssatz and the automorphisms of free right-symmetric algebras*, Asian-European Journal of Mathematics, **1** (2008), 243–254. Zbl 1168.17002
- [22] D. Segal, *Free Left-Symmetric algebras and an Analogue of the Poincre-Birkhoff-Witt Theorem*, Journal of Algebra, **164** (1994), 750–772. Zbl 0831.17001
- [23] W. Magnus, A. Karrass, D. Solitar, *Combinatorial group theory*, New York: Dover Publications, 1976. Zbl 0362.20023
- [24] J.-P. Serre, *Trees*, Berlin-Heidenberg-New York: Springer-Verlag, 1980. Zbl 0548.20018
- [25] A. van den Essen, *Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture*, Basel; Boston; Berlin: Birkhauser, 2000. Zbl 0962.14037

ALIBEK ALPYSBAEVICH ALIMBAEV
 U. SULTANGAZIN KOSTANAY STATE PEDAGOGICAL UNIVERSITY,
 118, TAUELSIZDIK STK.,
 KOSTANAY, 110000, KAZAKHSTAN
E-mail address: alialimbayev@gmail.com

ALTYNGUL SERIKOVNA NAURAZBEKOVA, DANIYAR KHAIBILDAEVICH KOZYBAEV
 L.N. GUMILYOV EURASIAN NATIONAL UNIVERSITY,
 2, SATPAEV STR.,
 NUR-SULTAN, 010008, KAZAKHSTAN
E-mail address: altyngul.82@mail.ru, kozybaev@gmail.com