

ЖАНАСУ ШЕКАРАЛАРЫНДА ЕСЕПТЕУ ТОРЫН ҚҰРУДЫҢ МАТЕМАТИКАЛЫҚ АЛГОРИТМІ

Әбдіров Мұрагер Махамбетиярұлы

murager_94@mail.ru

Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУ, Ақпараттық технологиялар факультеті
Есептеу техникасы кафедрасының 1 курс магистранты Нұр-Сұлтан, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі – Т. Мирғалиқызы

Мақалада есептеу торлары туралы және олардың құрудың алгоритмдері түсіндірілген. Есептеу торларымен жақын танысу арқылы, оның көптеген ортада қолдануға болатынына көз жеткізуге болады. Солардың бірі геофизикалық барлау, жер қыртысының құрылысын физикалық зерттеу, компьютерлік моделін құру болып келеді. Қазіргі таңда есептеу торларын алгоритімін құру және оларды жетілдіру өзікті және маңызды болып келеді.

Компьютерлік моделдеуде дискретті модельді құрудың ең күрделі кезеңдерінің бірі есептеу торын құру болып табылады. Есептеу торы - кейбір функцияны анықтау аймағында берілген нүктелердің (тор түйіндерінің) жиынтығы $\{x_k\} = \{x_1, x_2, \dots, x_K\}$. Есептеу торлары дифференциалдық және интегралдық теңдеулерді сандық шешу кезінде қолданылады. Есептеу торын құру сапасы теңдеудің сандық шешімінің сәттілігін (сәтсіздігін) едәуір дәрежеде анықтайды [1].

Алгебралық тор алгебралық теңдеулерді шешу жолымен құрылады. Кесіндіде берілген қарапайым тордың мысалы көп болуы мүмкін. Берілген кесіндідегі қарапайым тордың мысалы $\{x_k\} = \{x_1, x_2, \dots, x_K\}$, где $x_k = x_1 + dx \cdot (k-1)$ жиыны бола алады. Бұл жағдайда dx шамасы есептеу торының қадамы деп аталады. Алгебралық әдістердің негізгі артықшылықтары тордың ішкі тораптарының таралуын жақсы бақылау және олардың сандық іске асырылуының жоғары тиімділігі болып табылады, бұл әсіресе бейімделген (есептеу процесінде қайта құрылатын) торларды құруда маңызды. Алгебралық әдістің кемшілігі аймақтың іші шекарасының үзілуінің таралуында болып табылады. Дифференциалдық әдістерді қолдану, әдетте, тегіс тор алуға мүмкіндік береді.

Конформды бейнелеу әдісін пайдаланатын есептік торларды құру әдістерінің жетіспеушілігі олардың тек екі өлшемді торларды құру үшін жарамды болып табылады.

Конформды үшбұрышты және тетраэдральды құрылымсыз торлар аймақтың күрделі геометриясын дәл аппроксимациялауға мүмкіндік береді. Егер тордың кез келген екі үшбұрышында бір жалпы ұшы немесе бір тұтас жалпы қабырғасы болса, немесе ортақ нүктелері болмаса, үшбұрышты тор конформды деп аталады. Конформды тетраэдральды торда кез келген екі ұяшық бір тұтас ортақ қыр болуы мүмкін. Тор құру екі кезеңнен тұрады. Алдымен облыстың үстіңгі конформды триангуляциясы құрылады. Содан кейін облыс ішінде тетраэдральды тор құрылады, ол облыс шекарасында берілген ізді сақтайды. Тетраэдральды торды құрудың екі негізгі тәсілі бар - Делон триангуляциясына негізделген және алға жылжитын фронт алгоритмі (алгоритм продвигаемого фронта) әдістері. Делон триангуляциясын пайдалану берілген беттік триангуляциямен шекарада тор ізінің сәйкес келуіне кепілдік бермейді. Торды түзету үшін бірнеше әдістемелер ұсынады: торларды жергілікті қайта құру (локальные перестроения сеток) [1], торларды ұсақтау (измельчение сеток) [2], Делон триангуляциясының қасиеттеріне шектеу қою (накладывание ограничений на свойства триангуляции Делоне) [3]. Жылжитын фронт әдісі (Метод продвигаемого фронта) [4], керісінше, облыс шекарасындағы тор ізін сақтайды, алайда облыс ішіндегі проблемаларға тап болуы мүмкін.

Беттік триангуляцияны орындау тәсілдері

Әдетте беттік триангуляцияны құру үшін облыстың барлық шекарасы жалпы қисық сызықты шекаралармен бөліктерге бөлінеді [5]. Қисық сызықты шекараларды дискретизациялаудан кейін беттегі әрбір бөлікте жеке триангуляция салынуы мүмкін.

Триангуляцияны құру үшін жылжитын фронттың классикалық екі өлшемді алгоритмін пайдалануға болады. Беттердің барлық бөліктері шекаралардың жалпы дискретизациясына ие болғандықтан, жалпы беттік тор конформалық болады. Облысты берудің бірнеше түрі бар: аналитикалық облыс беру, Автоматтандырылған жобалау жүйесінің ядросымен әрекеттесу, бастапқы беттік триангуляцияны қайта құру, конструктивтік блоктық геометриясының әдістері. Аналитикалық облысты беру тәсілінің көмегімен қарапайым объектілерді: шар, куб, цилиндр, сондай-ақ жалпақ қырлары бар көп қырлы объектілерді құрастыру тиімді. Бірнеше қарапайым объектілерді қиылысу немесе біріктіру арқылы алынған күрделі объектілерді, конструктивтік блокты геометрияның көмегімен қою ыңғайлы. АЖЖ-да әзірленген одан да күрделі объектілер АЖЖ ядросымен өзара әрекеттесу арқылы өңделуі мүмкін.

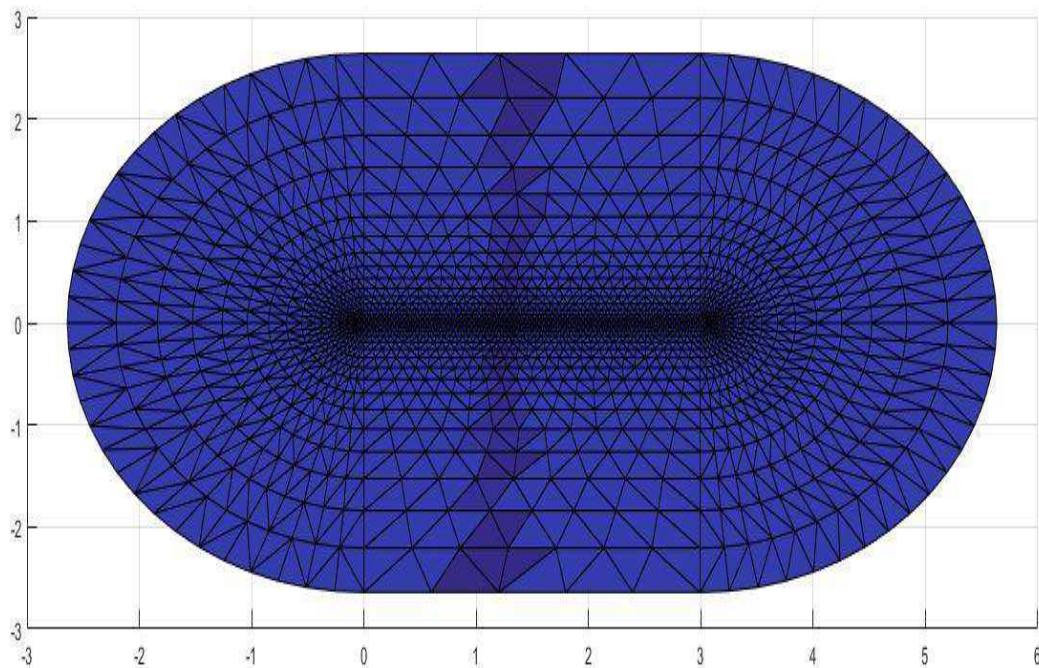
Аналитикалық облысты беру. Бұл әдіс шекаралық аймақтың беті параметрлік функциялардың көмегімен сипаттауға мүмкіндік береді. Барлық беті бөліктерге бөлінеді, олардың әрқайсысы кейбір тегіс функциямен параметрленуі мүмкін. Бөліктердің қиылысу сызықтары да анық параметрленуі тиіс. Шекараларды берудің бұл әдісі өте қарапайым жағдайларда ғана, сондай-ақ жазық қырлары бар нысандарды тапсыру үшін ыңғайлы.

Аймақ туралы ақпарат бөлік-тегіс параметрленген шекаралары бар параметрленген тегіс беттердің жиынтығы ретінде беріледі. Бастапқы фронтты құру процесі екі негізгі кадамға алып келеді. Алдымен әрбір тегіс желі үшін тордағы элементтердің қажетті мөлшерін ескере отырып, дискретизация құрылады. Содан кейін беттің әрбір тегіс бөлігі үшін шекаралық қисықтардың бар бөлшектерінен бастапқы фронт қалыптасады және жылжитын фронт алгоритмінің көмегімен беттік триангуляция құрылады. Триангуляция құрылғаннан кейін параметрлік функциялар және кеңістіктегі тор элементтерінің қажетті өлшемін беретін функцияларды ескеріле отырып тегістеледі.

Беттік торды қайта құру. Кейбір жағдайларда облыс өзінің үстіртін триангуляциямен берілуі мүмкін. Алайда, АЖЖ экспортынан алынған торлар жалпақ бөліктеріндегі үшбұрыштар саны аз, ал үшбұрыштардың өздері әртүрлі өлшемді болып және өте ұзын пішінді болуы мүмкін. Бұл жағдайда беті берілген ізді сақтай отырып, облыс ішінде тетраэдралық торды құру өте қиын болуы мүмкін немесе сапасы өте нашар торға әкеледі.

Қолда бар торды қайта құру үшін жазық бөліктерді ерекшелеп көрсетуге негізделген әдіс қолданылуы мүмкін [6]. Пайдаланушы жазықтықтан бөлінетін бөлігінің ауытқуының рұқсат етілген деңгейін анықтайтын параметрлерді анықтайды. Мысалы, бұл үшбұрышқа нормаль және жазықтыққа нормаль арасындағы ең үлкен бұрыш болуы мүмкін. Кезекті аумақ ең үлкен ауданы бар үшбұрыштан бастап таңдалады. Одан кейін оған, пайдаланушы берген критерийлерді бұзбаса, көрші үшбұрыштар қосылады. Барлық бетті жалпақтау аймақтарға бөлгеннен кейін осы аймақтың шекараларының жаңа дискретизациясы жасалады. Одан әрі әрбір аймақ үшін оның шекаралық дискретизациясы жазықтыққа жобаланады, жазықтықта жаңа триангуляция салынады және кері жер бетіне жобаланады. Беттік аймақ тегіс болғандықтан, облыс геометриясының бұрмалануы болмашы болады. Сол әдіс тым толық беттік торды кесу үшін де қолданылуы мүмкін. Мысалы, үш өлшемді сканерлеу арқылы алынған тор әдетте өте көп үшбұрыштардан тұрады және пайдаланушыға бұндай егжей – тегжейлі беттік тор жиі жағдайда қажет болып табылмайды. Жазықтау аймақтарына бөлу және оларға қатты тор салу есебінен үшбұрыштың аз саны бар жаңа беттік тор алуға болады.

Қазіргі таңда есептеу торлары геофизикалық барлау экспедицияларында кеңінен қолданылады. Есептеу торлары арқылы жазықтықпен, онда кездесу мүмкін қандай-да бір төбелердің компьютерлік моделін құру арқылы, зерттеу барысында көптеген экономикалық пайда көруге болады. Қандай-да бір ортаның компьютерлік моделін құру үшін, ең бірінші осы ортаға сай, және компьютердің мүмкіндігіне ауырлық салмайтын алгоритмді құрастыру керек болады. 1 – суретте, жазықтықтың үлгісінің негізінде триангуляция тәсілі арқылы жер бедерін компьютерлік моделін құрастыратын алгоритімнің үлгісі көрсетілген.



Сурет 1. Триангуляция негізінде құрылған жазық беттің моделі.

Тұрақты токпен электрлік іздестірудің тікелей проблемасын шешу үшін тор генерациясы алгоритмін әзірлеу кезінде белгілі бір жағдайларды ескеру қажет [7]. Негізгі шарттарының бірі рельефтің формасына бейімдеу және өлшеу қондырғысының орналасуы. Осыған байланысты мәселені тұжырымдау келесідей болды: сопақты жоғарғы бөлігін және өлшеу құрылғысының орнына қатысты жарты шеңбердің ортасын байланыстыратын, сызыққа жақындаған сайын қалыңдайтын үшбұрыштағы сопақты бөлеміз. Бұл сызық сопақ басты осіне жатады және өлшеу сызығына сәйкес келеді.

Алгоритм сипаттамасы. Қолданушы N мөлшерлі қабатты береді, ол дегеніміз концентрациялық жартылай шеңбердің i -номері, $hs = \ln(1 + a \cdot \alpha) / N$ - логарифмдік түрлендірілген координаттардың радиусы бойымен тордың қадамы, α – тордың біркелкі емес коэффициенті, сопақтың жоғарғы бөлігі $r_i = \exp(i \cdot hs - 1) / \alpha$ радиустың концентрациялық жартылай шеңбер ережесіне сәйкес N қабаттарға бөлінеді. Онда i – қабатының қалыңдығы $r_i - r_{i-1}$. Сосын бірінші қабаттан бастап, әрбір қабат үшбұрыштарға бөлінеді. Содан кейін, жоғарғы сопақ үшін $uz(i, j)$ массиві анықталады, мұнда жоғарғы шекарасында жататын түйіннің $i=0, \dots, N$ – қабаттың нөмері, j – осы қабаттағы түйіннің нөмері. Содан кейін түйіндер жиынтығы әр координат бойынша мәндер беріледі. Содан кейін триангуляция орындалады:

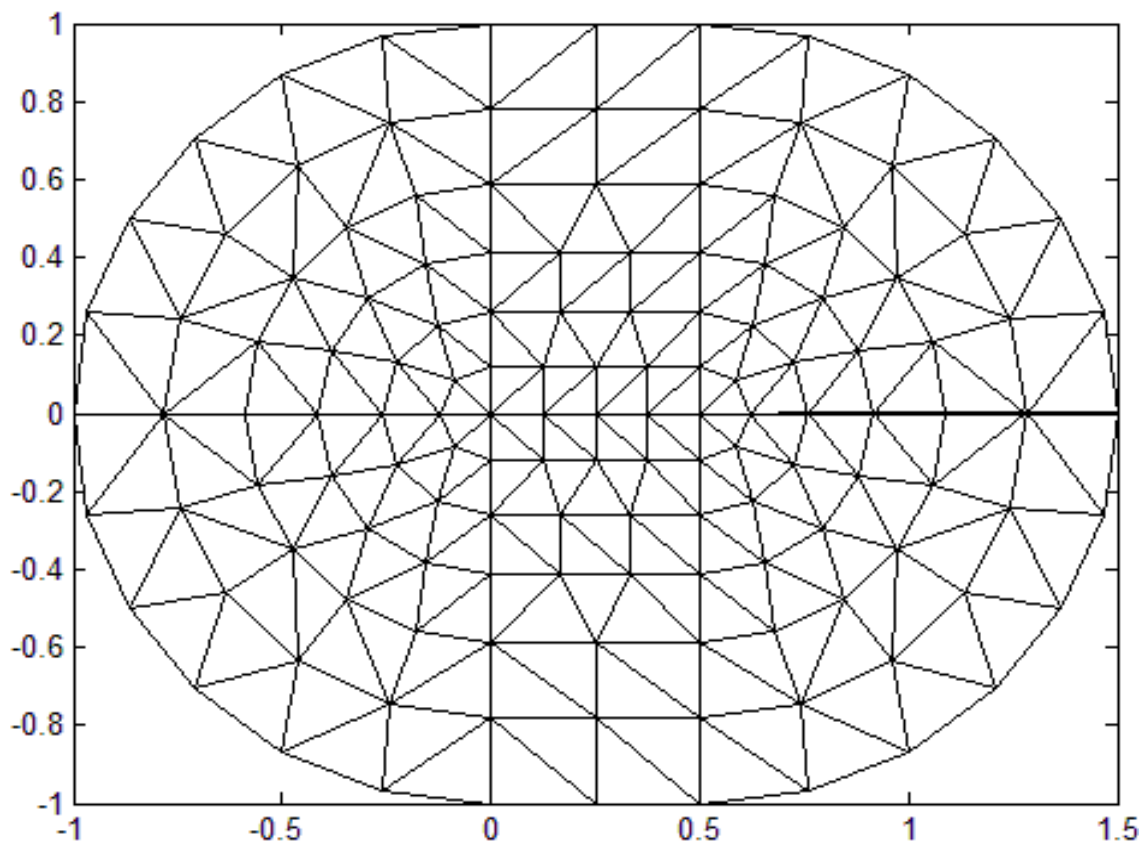
шеңбердің жоғарғы бөлігі үшін үшбұрыш tr типті және осы төбені жасаушы, үшбұрыштың ұштары ретінде түйіндердің нөмерлерінен қолданатын, шеңбердің төменгі бөлігі үшін $tr1$ болатын динамикалық массивті құрастырады. Осыдан кейін үшбұрыштардың төбелері бір-бірімен байланыстыру арқылы үшбұрыштарды процедуралық салу.

Негізгі айнымалылардың сипаттамасы:

- L - сопақ жарты шеңбердің орталары арасындағы қашықтық;
- N - сопақ жоғарғы бөлігін бөлу қабаттарының саны;
- f - тораптық есептегіш;
- k - үшбұрыш санағышы;
- $Nph2(i)$ - i -ші қабаттың жоғарғы шекарасындағы түйіндердің саны;
- a - сопақ жарты шеңбердің максималды радиусы;
- α - тордың әртектілік коэффициенті;

- uz - тораптар координаттары жиыны;
- uz1 - сопақ төменгі бөлігіндегі түйіндер координаттары жиыны;
- tr - үшбұрышты құрайтын шыңдардың (түйіндердің) динамикалық массиві;
- tr1 - сопақ төменгі бөлігіндегі үшбұрышты құрайтын шыңдардың динамикалық массиві (түйіндер).

Әрі қарай цифрларда әртүрлі есептеу параметрлері бар триангуляцияның нұсқалары берілген.



Сурет 2. Толық сопақты триангуляцияда $N = 6$, $a = 1,0$, $\alpha = 1,0$, $l = 0,5$.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Borouchaki H., Hecht F., Saltel E., George P.-L. Reasonably efficient Delaunay based mesh generator in 3 dimensions // Proc. of 4th IMR. – 1995. – P. 3–14.
2. Du Q., Wang D. Recent progress in robust and quality Delaunay mesh generation // J. of Comp. and App. Math. – 2006. – V. 195. – P. 8–23.
3. Shewchuk J. R. Constrained Delaunay tetrahedralizations and provably good boundary recovery // Proc. of 11th IMR. – 2002. – P. 193–204.
4. Ito Y., Shih A., Soni B. Reliable isotropic tetrahedral mesh generation based on an advancing front method // Proc. of 13th IMR. – 2004. – P. 95–106.
5. Данилов А. А. Способы построения трёхмерных поверхностных триангуляций и тетраэдральных сеток // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. 2010. Т. 65, № 1. С. 87–92.
6. Василевский Ю., Вершинин А., Данилов А., Пленкин А. Технология построения тетраэдральных сеток для областей, заданных в САПР // Матричные методы и технологии решения больших задач (под ред. Е.Е. Тыртышникова). – М: ИВМ РАН, 2005. – С. 21–32.
7. Миргаликызы Т., Муканова Б.Г. Построение расчетной сетки на рельефной поверхности для задач исследования структур неоднородных сред, «Вестник ВКГТУ им.Д.Серикбаева», 2015, №3.