

Р. М. СВИТЦЕР

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТОПОЛОГИЯ- ГОМОТОПИИ И ГОМОЛОГИИ

Перевод с английского Ю. П. СОЛОВЬЕВА



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1985

22.15
С 24
УДК 513.83

ROBERT M. SWITZER

ALGEBRAIC
TOPOLOGY —
HOMOTOPY
AND HOMOLOGY

SPRINGER-VERLAG
BERLIN — HEIDELBERG — NEW YORK
1975

Свитцер Р. М. Алгебраическая топология. Гомотопии и гомологии: Пер. с англ. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. — 608 с.

Книга содержит описание, по существу, всех основных задач, методов и результатов современной алгебраической топологии. Принятый автором способ изложения позволил ему при сравнительно небольшом объеме познакомить читателя с обширным материалом, до сих пор не включавшимся в учебную литературу. Книга начинается с простейших понятий, так что от читателя не требуется почти никаких предварительных знаний в этой области.

Для математиков начиная со студентов младших курсов. Может служить справочником по алгебраической топологии.

© 1975 by Springer-Verlag
All Rights Reserved
Authorized translation from
English language edition
published by Springer-Verlag
Berlin — Heidelberg — New York

© Перевод на русский язык.
Издательство «Наука».
Главная редакция
физико-математической литературы,
1985

С $\frac{1702040000-020}{053(02)-85} 28-84$

ВВЕДЕНИЕ

Эта книга возникла на основе курсов лекций по алгебраической топологии, прочитанных автором в Манчестерском университете в 1967 — 1970 гг., в Корнелльском университете в 1970 — 1971 гг. и в университете Георга Августа в Геттингене в 1971 — 1972 гг. Уровень материала в ней несколько выше того, который предусматривается на первом году специализации. Предполагается, что читатель этой книги уже освоил начальный курс алгебраической топологии, включающий сингулярные гомологии, фундаментальную группу и накрывающие пространства. Кроме того, для хорошего понимания материала главы 12 желательно знакомство с дифференцируемыми многообразиями. В то же время не предполагается никаких знаний по гомотопической топологии, за исключением нескольких простых фактов о фундаментальной группе.

В настоящее время имеется несколько прекрасных руководств по алгебраической топологии. Наиболее основательным из них является, пожалуй, учебник Спеньера [72], который я рекомендую прочесть наряду с этой книгой. Разумеется, ряд тем в этих книгах совпадает — это относится, в частности, к главам 0 — 6, 14 и 15. Однако настоящая книга охватывает более широкий круг вопросов и рассчитана на то, чтобы дать вдумчивому читателю такую подготовку, с помощью которой можно было бы начать самостоятельные исследования в различных областях алгебраической топологии: стабильной гомотопической теории, K -теории, теории кобордизмов.

За исключением своего названия «Алгебраическая топология» эта книга не претендует (и не может претендовать) на одинаково полное освещение всех областей этой науки. Выбор предмета объясняется, главным образом, исследовательскими интересами автора. Поэтому, например, нестабильная гомотопическая теория развивается лишь до того уровня, когда она становится по-настоящему интересной, а затем навсегда покидает сцену, уступая ее стабильной гомотопической теории. Тем читателям, у которых наш очерк нестабильной гомотопической топологии лишь разжег любопытство, советуем использовать в качестве отправной вехи сведения из книги Адамса [10]. Другая важная ветвь алгебраи-

ческой топологии, которой мы совсем не коснулись, — это теория препятствий. Отчасти это произошло из-за нехватки места, а отчасти потому, что едва ли можно написать лучшее введение в теорию препятствий, чем то, которое содержится в «Семинаре по расслоенным пространствам» Томаса [80].

Красной нитью через всю книгу проходит следующая основная идея: большинство задач, которые решаются с помощью алгебраической топологии, может быть сведено к задачам существования или несуществования непрерывных отображений $f: X \rightarrow Y$ между двумя топологическими пространствами X и Y . Что же касается этих задач, то для их решения используется алгебраическое представление топологии, т. е. некоторое отображение топологии в алгебру. Такое представление, формально описываемое функтором, позволяет превратить топологическую задачу в соответствующую ей алгебраическую. Если при этом имеется достаточно много представлений такого рода, то топологическая задача разрешима тогда и только тогда, когда разрешимы все соответствующие алгебраические задачи. Например, если требуется доказать, что не существует непрерывного отображения $f: X \rightarrow Y$, то рассматривают подходящий функтор F из категории топологических пространств в некоторую алгебраическую категорию, т. е. для каждого пространства X задают алгебраический объект $F(X)$ (группу, кольцо, модуль и т. п.) и для каждого непрерывного отображения $f: X \rightarrow Y$ гомоморфизм $F(f): F(X) \rightarrow F(Y)$, сохраняющий используемую алгебраическую структуру. После этого пытаются доказать, что такого гомоморфизма $F(f): F(X) \rightarrow F(Y)$ не существует (доказательства существования, как правило, более трудны). С этой точки зрения чем более сложна, богата естественная алгебраическая структура на $F(X)$, тем лучше. В самом деле, если объекты $F(X)$ и $F(Y)$ имеют достаточно сложную алгебраическую структуру, то множество соответствующих гомоморфизмов

$$\phi: F(X) \rightarrow F(Y)$$

не может быть очень велико. А это дает хороший шанс доказать, что нужного нам гомоморфизма $F(f)$ не существует.

На протяжении всей книги мы будем стараться усложнить, сделать более богатой ту естественную алгебраическую структуру, которая имеется на наших функторах (см. главы 2, 13, 17, 18). В главе 19 мы обнаружим, что эта алгебраическая структура на $F(X)$ достаточна для того, чтобы при некоторых благоприятных обстоятельствах точно сказать, какие гомоморфизмы $\phi: F(X) \rightarrow F(Y)$ имеют вид $F(f)$ для подходящего непрерывного отображения $f: X \rightarrow Y$. Тем самым становятся возможными и доказательства существования.

Главы 0 и 1 содержат некоторые результаты из теоретико-множественной топологии, которые постоянно используются в кни-

ге, и основные определения из теории категорий; по- существу, это краткие обзоры для читателей. В главе 2 появляются множества $[X, Y]$ гомотопических классов отображений $f: X \rightarrow Y$ и рассматриваются следующие задачи: при каких условиях на пространстве X и Y множество $[X, Y]$ может быть снабжено групповой структурой, когда точна последовательность

$$[X, W] \xrightarrow{f^*} [Y, W] \xrightarrow{g^*} [Z, W]$$

и т. д. Другими словами, мы исследуем здесь те условия, при которых естественная структура множества $[X, Y]$ может быть усложнена до групповой структуры. В главе 3 рассматриваются множества

$$\pi_n(Y, y_0) = [S^n, s_0; Y, y_0],$$

являющиеся при $n \geq 1$ группами, — так называемые *гомотопические группы* пространства Y . Здесь же доказываются наиболее элементарные свойства этих групп. В главе 4 определяются *расслоения* и *слабые расслоения* и показывается, что для любого слабого расслоения $p: E \rightarrow B$ со слоем $F = p^{-1}(b_0)$ существует точная последовательность

$$\dots \rightarrow \pi_n(F, e_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, e_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{d} \pi_{n-1}(F, e_0) \rightarrow \dots$$

Далее вводится очень важное для геометрических приложений понятие *расслоенного пространства* и доказывается, что каждое расслоенное пространство является слабым расслоением. После этого строятся важные примеры расслоенных пространств:

$$O(n) \rightarrow O(n)/O(n-k),$$

$$O(n)/O(n-k) \rightarrow O(n)/O(n-k) \times O(k)$$

и т. д. Глава завершается утверждением о том, что любое накрытие $p: X' \rightarrow X$ является расслоенным пространством с дискретным слоем; это утверждение применяется к вычислению гомотопических групп окружности S^1 и n -мерного тора

$$T^n = S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1.$$

Гомотопические вычисления для произвольных топологических пространств X, Y очень трудны; нелегко, например, установить, что существует хотя бы одно нетривиальное непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$. Поэтому мы ограничиваемся более узкой категорией клеточных пространств, т. е. пространств, которые получаются в результате склеивания друг с другом различных клеток D^n . Структура клеточных пространств позволяет строить требуемые отображения и гомотопии шаг за шагом по клеткам. В главе 5 определяются клеточные пространства и доказываются их простейшие свойства. Глава 6 содержит более глубокие гомотопические результаты, относящиеся к таким пространствам.

Упомянем здесь лишь наиболее важные из них: группа $\pi_n(X, x_0)$ зависит лишь от клеток размерностей, не превышающих $n+1$; гомоморфизм надстройки

$$\Sigma: \pi_q(X, x_0) \rightarrow \pi_{q+1}(SX, *) \quad ([f] \mapsto [1 \wedge f])$$

для n -связного клеточного пространства X является изоморфизмом для $q < 2n+1$; отображение $f: X \rightarrow Y$ связных клеточных пространств индуцирует изоморфизм гомотопических групп

$$f_*: \pi_q(X, x_0) \rightarrow \pi_q(Y, y_0), \quad q \geq 0,$$

тогда и только тогда, когда f — гомотопическая эквивалентность.

В этом месте мы покидаем гомотопическую топологию и обращаемся к теориям гомологий и когомологий. Обобщенной теорией гомологий называется семейство функторов $\{h_n: n \in \mathbb{Z}\}$, действующих из категории топологических пространств в категорию абелевых групп и удовлетворяющих всем аксиомам Стинрода — Эйленберга за исключением аксиомы размерности. В главе 7 исследуются свойства этих теорий, непосредственно вытекающие из аксиом; это равносильно реализации той части программы Стинрода и Эйленберга [74], которая не использует аксиомы размерности.

В главе 8 излагается бордмановская конструкция стабильной категории спектров. Доказываются некоторые наиболее важные свойства этой категории, в частности, тот факт, что

$$\Sigma: [E, F] \rightarrow [E \wedge S^1, F \wedge S^1]$$

— биекция для любых спектров E и F . Завершается глава построением по заданному спектру E теории гомологий E_* и когомологий E^* . В главе 9 мы показываем, что таким образом получаются все возможные теории когомологий из главы 8 (теорема Брауна о представимости). Затем идут три наиболее известных и важных примера теорий гомологий и когомологий: классические гомологии и когомологии (глава 10), K -теория (глава 11), теории бордизмов и кобордизмов (глава 12). Кроме того, в главе 10 показано, как вычислить группы сингулярных гомологий произвольного клеточного пространства, и доказана теорема Гуревича об изоморфизме. Глава 11 содержит вычисление гомотопических групп стабильных классических групп O , U , Sp .

Глава 13 посвящена умножениям в гомологиях и когомологиях. Она начинается теоремами об универсальных коэффициентах (которые выражают группы $H_*(X; G)$ и $H^*(X; G)$ через $H_*(X; \mathbb{Z})$ и G) и теоремой Кюннета (выражающей $H_*(X \times Y)$ через $H_*(X)$ и $H_*(Y)$). Затем кратко обсуждаются $\times$ -, $\cup$ - и $\cap$ -умножения для сингулярных гомологий и когомологий. После этого мы отклоняемся от основной темы для того, чтобы построить приведенное произведение двух спектров. Конструкция приведенного произведения позволяет задать умножения в обобщен-

ных теориях гомологий и когомологий E_* , E^* , ассоциированных с *кольцевым спектром* E . Завершается глава полным описанием умножений для классических гомологий и когомологий, K -теории и бордизмов.

В главе 14 теория умножений в обобщенных гомологиях и когомологиях применяется к исследованию различного рода двойственностей (Александера, Лефшеца, Пуанкаре — для многообразий, Спеньера — Уайтхеда — для конечных спектров), а также к вопросу об ориентируемости многообразий относительно обобщенных теорий когомологий. Кроме того, с помощью двойственности Спеньера — Уайтхеда доказывается теорема о представимости для теорий гомологий, аналогичная когомологической теореме Брауна из главы 9.

В главе 15 в связи с введением спектральных последовательностей уровень трудности значительно возрастает, поскольку при первом знакомстве структура спектральной последовательности кажется совершенно необозримой. Однако опыт показывает, что спектральные последовательности представляют собой наиболее эффективный инструмент, имеющийся в распоряжении топологов, так что труд, который требуется для хорошего овладения ими, с лихвой окупается. Мы рассматриваем в этой главе спектральные последовательности Атья — Хирцебруха — Уайтхеда и Лере — Серра. В качестве приложений получаются точные последовательности Гизина, Вана и Серра, теорема Лере — Хирша, теорема Тома об изоморфизме.

Глава 16 посвящена вычислению колец гомологий и когомологий $E_*(BG)$, $E^*(BG)$ стабильных классифицирующих пространств BG для $G = O$, U и Sp . С этой целью используется спектральная последовательность Атья — Хирцебруха — Уайтхеда. В процессе вычисления определяются некоторые классы $c_i \in E^*(BG)$ когомологий, позволяющие получить инварианты $c_i(\xi) \in E^*(X)$ векторных расслоений $\xi \rightarrow X$ со структурной группой G . Эти инварианты c_i называются *характеристическими классами*. Заканчивается глава доказательством теоремы Ботта о периодичности $BU \simeq \Omega_0^8 BU$.

В главе 17 делается существенное продвижение в программе усложнения естественных алгебраических структур. Мы показываем, что $E^*(X)$ естественным образом превращается в модуль над алгеброй $A^*(E) = E^*(E)$, а $E_*(X)$ — в комодуль над алгеброй Хопфа $A_*(E) = E_*(E)$ (при подходящих условиях на спектр E). Далее вычисляются алгебры Хопфа $A_*(E)$ для спектров $E = MU$, MSp , K и KO . В качестве приложения находятся оценки образцов гомоморфизмов Гуревича

$$h_K: \pi_q(MU) \rightarrow K_q(MU),$$

$$h_{KO}: \pi_q(MSp) \rightarrow KO_q(MSp)$$

для малых значений q .

Глава 18 содержит вычисление алгебр $A^*(H(\mathbb{Z}_2))$ и $A_*(H(\mathbb{Z}_2))$ в терминах некоторых элементов $Sq^i \in A^*(H(\mathbb{Z}_2))$, называемых *квадратами Стиррода*, и двойственных к ним. Аналогичные результаты для $A^*(H(\mathbb{Z}_p))$ и $A_*(H(\mathbb{Z}_p))$ формулируются без доказательства.

Программа усложнения естественных алгебраических структур триумфально завершается главой 19. В ней с помощью структуры комодуля $E_*(X)$ над $E_*(E)$ строится так называемая спектральная последовательность Адамса $\{E_r^{s,t}, d_r\}$, член E_2 которой имеет чисто алгебраическое описание

$$E_2^{s,t} \cong \text{Ext}_{E_*(E)}^{s,t}(\tilde{E}_*(S^0), E_*(X))$$

($\text{Ext}^{**}(-, -)$ — функтор, производный для $\text{Hom}_C^*(-, -)$, C — некоторая коалгебра) и которая сходится для связного спектра E к группе $\pi_*^S(X)/D_*$. Здесь $\pi_*^S(X)$ — градуированная стабильная гомотопическая группа пространства X и D_* — некоторая ее подгруппа, зависящая от спектра E . Для спектров $E = MU$ или MSp группа D_* есть 0; для $E = H(\mathbb{Z}_p)$ она состоит из элементов конечных порядков, взаимно простых с p . Таким образом, в тех случаях, когда спектральная последовательность Адамса поддается вычислению, можно, отправляясь от $E_*(E)$ -комодулей $E_*(X)$, получить стабильные гомотопические группы $\pi_*^S(X)/D_*$. В качестве первого применения спектральной последовательности Адамса вычисляются стабильные группы сфер $\pi_q^S(S^0)$ для нескольких первых значений q . После этого мы обращаемся к спектрам $E = K, KO$. Указанные спектры не являются связными, так что спектральная последовательность может не сходиться, но все еще определены гомоморфизмы

$$e_K: \ker h_K \rightarrow \text{Ext}_{K_*(K)}^{1,q+1}(\tilde{K}_*(S^0), K_*(X)),$$

$$e_{KO}: \ker h_{KO} \rightarrow \text{Ext}_{KO_*(KO)}^{1,q+1}(\tilde{KO}_*(S^0), KO_*(X)).$$

Вычисляются группы

$$\text{Ext}_{K_*(K)}^{1,q+1}(\tilde{K}_*(S^0), K_*(S^0)) \text{ и } \text{Ext}_{KO_*(KO)}^{1,q+1}(\tilde{KO}_*(S^0), KO_*(S^0))$$

и полученный результат используется для выделения в $\pi_*^S(S^0)$ нетривиального прямого слагаемого, порядок которого связан с числами Бернулли.

Глава 20 посвящена применению спектральной последовательности Адамса к вычислению колец бордизмов $\pi_*(MG) \cong \Omega_*^G$ для $G = O, U$ и SO . Кроме того, мы доказываем здесь теорему Стонга — Хаттори, которая описывает образ гомоморфизма Гуревича

$$h_K: \pi_*(MU) \rightarrow K_*(MU).$$

После изучения материала этой главы для читателя не составит труда разобраться в статьях Андерсона, Брауна и Петерсона [13, 14], в которых вычислены кольца Ω_*^{SU} и Ω_*^{Spin} .

Даже из этого краткого обзора ясно, что математический уровень, необходимый читателю, значительно возрастает, скажем, от главы 2 к главе 20. Студент, который начнет читать эту книгу, обладая лишь указанной в главе 0 минимальной подготовкой, не сможет приобрести легкости в обращении с материалом последующих глав, ограничиваясь исключительно их прочтением. Он должен попытаться овладеть материалом каждой главы в степени, достаточной для решения задач, отличных от имеющихся в тексте. В некоторых случаях будет полезно обратиться к книгам и статьям, перечисленным в конце каждой главы.

Помещенный в конце книги список литературы не претендует на полноту. К тому же после выхода в свет уникального свода Стиррода рефератов всех математических статей, имеющих отношение к алгебраической топологии, в таком исчерпывающем списке нет необходимости. Вместо этого наша библиография преследует две цели: предложить литературу для дальнейшего изучения и указать те источники, из которых почерпнуто большинство материала данной книги.

В заключение искренне благодарю Фрэнка Адамса, которому я обязан, без преувеличения, большей частью своих знаний по алгебраической топологии. Каждый, знакомый с его работами, заметит то влияние, которое они оказали на настоящую книгу. Кроме того, в ряде мест (глава 8, материал главы 9, посвященный конечным клеточным пространствам, конструкция $E \wedge F$) я широко пользовался его подходом к соответствующим темам, внося в него лишь самые небольшие изменения (отчего изложение этих тем вряд ли улучшилось).

Мне хотелось бы также выразить глубокую благодарность Эгберту Брискорну за его поддержку и многочисленные полезные предложения. И наконец, я сердечно благодарю фрейлен Ингрид Сохачевски и фрау Кристиан Прейвиш за помощь в печатании рукописи.

Рукопись этой книги была представлена Геттингенскому университету Георга Августа в январе 1973 г. как диссертация на соискание профессорского звания.

Геттинген, ноябрь 1973 г.

Роберт М. Свитцер

Мы предполагаем, что читатель знаком с элементами общей топологии, т. е. с наиболее важными свойствами непрерывных отображений, компактных множеств, связных множеств и т. д. Тем не менее, для удобства читателей мы приводим в этой главе некоторые результаты из общей топологии, которые будут постоянно встречаться в настоящей книге.

0.1. Пусть X — топологическое пространство и $A_1, A_2, \dots, A_n$ — его замкнутые подпространства, удовлетворяющие условию $X = \bigcup_{i=1}^n A_i$.

Предположим, что заданы отображения $f_i: A_i \rightarrow Y$, $1 \leq i \leq n$. Тогда отображение $f: X \rightarrow Y$, для которого $f|A_i = f_i$, $1 \leq i \leq n$, существует в том и только в том случае, когда $f_i|A_i \cap A_j = f_j|A_i \cap A_j$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$. При этом отображение f непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывны все отображения f_i .

Очень часто мы будем строить непрерывные отображения $f: X \rightarrow Y$, разбивая X на замкнутые подмножества A_i и определяя f отдельно на каждом A_i так, что $f|A_i$ непрерывно по построению. Тогда для доказательства непрерывности отображения f нам останется лишь проверить, что наши отображения $f|A_i$ совпадают на пересечениях $A_i \cap A_j$.

0.2. Универсальное свойство декартова произведения. Пусть $p_X: X \times Y \rightarrow X$, $p_Y: X \times Y \rightarrow Y$ — проекции на первый и второй сомножитель соответственно. Тогда для любой пары отображений $f: Z \rightarrow X$ и $g: Z \rightarrow Y$ существует такое единственное отображение $h: Z \rightarrow X \times Y$, что $p_X \circ h = f$, $p_Y \circ h = g$. Отображение h непрерывно в том и только в том случае, когда непрерывны f и g . Указанное свойство характеризует $X \times Y$ с точностью до гомеоморфизма. Однозначно определенное отображение h , как правило, будет обозначаться через (f, g) .

В частности, для того чтобы проверить, что заданное отображение $h: Z \rightarrow X \times Y$ непрерывно, достаточно доказать непрерывность отображений $p_X \circ h$ и $p_Y \circ h$.

0.3. Универсальное свойство факторпространства. Пусть α — некоторое отношение эквивалентности на топологическом пространстве X . Обозначим через X/α пространство классов эквивалентности и через $p_\alpha: X \rightarrow X/\alpha$ — естественную проекцию. Если $f: X \rightarrow Y$ — некоторое отображение, то отображение

$f': X/\alpha \rightarrow Y$, удовлетворяющее условию $f' \cdot p_\alpha = f$, существует в том и только в том случае, когда из $x\alpha x'$ следует $f(x) = f(x')$. В этом случае f' непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывно отображение f . Указанное свойство характеризует пространство X/α с точностью до гомеоморфизма.

Важным и часто встречающимся примером факторпространства является пространство X/A , получающееся из некоторого пространства X сжатием в точку его замкнутого пространства A . Более подробно, пусть A — замкнутое непустое подпространство пространства X ; рассмотрим отношение

$$\alpha = A \times A \cup \{(x, x) : x \in X\} \subset X \times X$$

и положим $X/A = X/\alpha$. Если $A = \emptyset$, примем соглашение, в силу которого $X/A = X/\emptyset = X^+ = X \cup \{\text{точка}\}$. Оправданием этого (на первый взгляд, несколько необычного) соглашения будет служить тот факт, что любая теорема о пространстве X/A остается верной и для $X/\emptyset$.

0.4. Комбинация произведения и перехода к факторпространству. Если α — отношение эквивалентности на топологическом пространстве X и β — отношение эквивалентности на топологическом пространстве Y , то имеет место очевидное отношение эквивалентности $\alpha \times \beta$ на произведении $X \times Y$:

$$(x, y)\alpha \times \beta (x', y') \Leftrightarrow x\alpha x' \text{ и } y\beta y'.$$

Существует и единственно такое непрерывное отображение

$$\phi: \frac{X \times Y}{\alpha \times \beta} \rightarrow (X/\alpha) \times (Y/\beta),$$

что $\phi \cdot p_{\alpha \times \beta} = p_\alpha \times p_\beta$. Более того, отображение ϕ даже биективно, но, вообще говоря, не является гомеоморфизмом. Важный частный случай, в котором ϕ — гомеоморфизм, получается, если β — тождественное отношение 1 и Y — локально компактное пространство.

Доказательство. Мы должны показать, что если множество T открыто в $\frac{X \times Y}{\alpha \times 1}$, то его образ $\phi(T)$ открыт в $(X/\alpha) \times Y$. Открытость множества T означает, что множество $T' = p_{\alpha \times 1}^{-1}(T)$ открыто в $X \times Y$. Пусть $(x_0, y_0) \in \phi(T)$; выберем точку $x'_0 \in X$ так, чтобы $p_\alpha(x'_0) = x_0$. Из определений отображения ϕ и множества T' следует, что $(x'_0, y_0) \in T'$, а поскольку T' открыто, то существуют такие окрестности U точки x'_0 в X и K точки y_0 в Y , что $U \times K \subset T'$. Кроме того, можно считать, что множество K компактно.

Пусть $J' = \{x' \in X : x' \times K \subset T'\}$. Покажем, прежде всего, что множество J' открыто. Действительно, в силу компактности множества K для каждой точки $x' \in J'$ найдется такая открытая

окрестность $U_{x'}$ этой точки, что $U_{x'} \times K \subset T'$. Следовательно, J' открыто. Далее, если $J = \{x \in X/\alpha: x \times K \subset \phi(T)\}$, то очевидно, что $p_{\alpha}^{-1}(J) = J'$; значит, J открыто в X/α . Но $(x_0, y_0) \in J \times K \subset \subset \phi(T)$, поэтому множество $\phi(T)$ открыто. $\square$

Пример. Единичный отрезок $I = [0, 1]$ компактен, следовательно,

$$\frac{X \times I}{\alpha \times 1} \cong (X/\alpha) \times I.$$

0.5. Гомотопией пространства X в пространство Y называется непрерывное отображение $F: X \times I \rightarrow Y$. Для каждого $t \in I$ гомотопия F определяет отображение $F_t: X \rightarrow Y$, задаваемое формулой $F_t(x) = F(x, t)$, $x \in X$. Пусть $f, g: X \rightarrow Y$ — некоторые отображения. Говорят, что f гомотопен g (и пишут $f \simeq g$), если существует такая гомотопия $F: X \times I \rightarrow Y$, что $F_0 = f$ и $F_1 = g$. Другими словами, отображения f и g гомотопны тогда и только тогда, когда f непрерывно деформируется в g посредством некоторого семейства F_t . Пусть A — некоторое подпространство в X . Гомотопия F называется гомотопией относительно A (или гомотопией $\text{rel } A$), если $F(a, t) = F(a, 0)$ для всех $a \in A$, $t \in I$.

0.6. Отношение гомотопности $\simeq$ является отношением эквивалентности.

Доказательство. Свойство $f \simeq f$ очевидно: нужно взять $F(x, t) = f(x)$ для всех $x \in X$, $t \in I$. Если $f \simeq g$ и F — гомотопия от f к g , то отображение $G: X \times I \rightarrow Y$, задаваемое формулой $G(x, t) = F(x, 1 - t)$, $x \in X$, $t \in I$, является гомотопией от g к f ; следовательно, $g \simeq f$. Пусть теперь f — гомотопия от f к g , а G — гомотопия от g к h . Тогда гомотопия H , определяемая формулой

$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ G(x, 2t - 1), & 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

задает гомотопию от f к h . $\square$

Отметим, что для доказательства непрерывности отображения H используется утверждение п. 0.1.

0.7. Отношение $\simeq$ разбивает множество всех непрерывных отображений $f: X \rightarrow Y$ на классы эквивалентности. Эти классы эквивалентности называются гомотопическими классами; соответствующее множество всех гомотопических классов обозначается через $[X; Y]$. Гомотопический класс непрерывного отображения $f: X \rightarrow Y$ обозначается через $[f]$.

В качестве приложения теоремы п. 0.4 мы получаем следующее утверждение.

0.8. Предложение. Пусть α — отношение эквивалентности на топологическом пространстве X и $F: X \times I \rightarrow Y$ — такая гомотопия, что каждое отображение F_t пропускается через X/α , т. е. $xx' \Rightarrow F_t(x) = F_t(x')$. Тогда F индуцирует гомотопию $F': (X/\alpha) \times I \rightarrow Y$, удовлетворяющую условию $F' \circ (p_\alpha \times 1) = F$.

Доказательство. Условие на гомотопию F означает в точности, что F пропускается через $\frac{X \times I}{\alpha \times 1}$, т. е. что существует непрерывное отображение $F'': \frac{X \times I}{\alpha \times 1} \rightarrow Y$, для которого $F'' \cdot \rho_{\alpha \times 1} = F$.

В силу п. 0.4 отображение $\phi: \frac{X \times I}{\alpha \times 1} \rightarrow (X/\alpha) \times I$ — гомеоморфизм. Теперь $F' = F'' \cdot \phi^{-1}: (X/\alpha) \times I \rightarrow Y$ и есть требуемая гомотопия. $\square$

Пример. Пусть A — замкнутое подпространство в X и $F: X \times I \rightarrow Y$ — такая гомотопия, что $F(a, t) = F(a', t)$ для всех $a, a' \in A, t \in I$. Тогда F индуцирует гомотопию $F': (X/A) \times I \rightarrow Y$.

0.9. Функциональные пространства. Для топологических пространств X и Y обозначим через Y^X множество всех непрерывных отображений $f: X \rightarrow Y$. Снабдим это множество так называемой *компактно-открытой топологией*, взяв в качестве предбазы топологии все множества вида $N_{K,U} = \{f: f(K) \subset U\}$, где $K \subset X$ компактно, а $U \subset Y$ открыто.

0.10. Отображение вычисления $e: Y^X \times X \rightarrow Y$ определяется формулой $e(f, x) = f(x)$. Если пространство X локально компактно, то отображение e непрерывно. Во всех интересующих нас случаях X будет единичным отрезком $I = [0, 1]$.

0.11. Экспоненциальный закон. Пусть X, Z — хаусдорфовы пространства и, кроме того, Z локально компактно. Тогда естественное отображение

$$E: Y^{Z \times X} \rightarrow (Y^Z)^X,$$

определенное равенством $((Ef)(x))(z) = f(z, x)$, является гомеоморфизмом.

0.12. Отмеченные точки. В дальнейшем нам часто придется рассматривать топологическое пространство X вместе с выбранной в нем точкой x_0 , называемой *отмеченной точкой*. Пара (X, x_0) называется *пунктированным пространством* или *пространством с отмеченной точкой* (точно так же можно говорить и о пунктированных множествах). В тех случаях, когда мы имеем дело с пунктированными пространствами (X, x_0) , (Y, y_0) и т. д., мы всегда требуем, чтобы все отображения $f: X \rightarrow Y$ сохраняли отмеченные точки, т. е. $f(x_0) = y_0$, а также, чтобы все гомотопии $F: X \times I \rightarrow Y$ были гомотопиями относительно отмеченной точки, т. е. $F(x_0, t) = y_0$ для любых $t \in I$, — за исключением тех случаев, когда явно оговорено противное. Множество гомотопических классов отображений, сохраняющих отмеченные точки, будем обозначать через $[X, x_0; Y, y_0]$; конечно же, все гомотопии являются гомотопиями $\text{rel } x_0$. Множество $[X, x_0; Y, y_0]$ представляет собой пунктированное множество с отмеченной точкой f_0 , где f_0 — постоянное отображение: $f_0(x) = y_0$ для всех $x \in X$.

Пусть A и B — подпространства топологических пространств X и Y соответственно. Обозначим через $(Y, B)^{(X, A)}$ подпространство

в Y^X , состоящее из тех отображений $f: X \rightarrow Y$, для которых $f(A) \subset B$. Существуют очевидные обобщения этого обозначения, такие, как $(Y, B, B')^{(X, A, A')}$ и т. д. В частности, если (X, x_0) , (Y, y_0) — пунктированные пространства, мы получаем пространство $(Y, y_0)^{(X, x_0)}$ отображений, сохраняющих отмеченные точки. Отмеченной точкой пространства $(Y, y_0)^{(X, x_0)}$ является f_0 , где $f_0(x) = y_0$ для всех $x \in X$.

Если (X, x_0) , (Y, y_0) и (Z, z_0) — три пунктированных пространства, то можно образовать пространство

$$((Y, y_0)^{(Z, z_0)}, f_0)^{(X, x_0)}, \quad f_0(z) = y_0 \text{ для всех } z \in Z,$$

которое является подпространством в $(Y^Z)^X$.

Естественно выяснить, какое подпространство в $Y^{Z \times X}$ соответствует $((Y, y_0)^{(Z, z_0)}, f_0)^{(X, x_0)}$ при экспоненциальном отображении 0.11. Легко видеть, что это будет подпространство

$$(Y, y_0)^{(Z \times X, Z \times \{x_0\} \cup \{z_0\} \times X)}.$$

Обозначим через $Z \vee X$ подпространство $Z \times \{x_0\} \cup \{z_0\} \times X \subset Z \times X$. Его можно представить себе как пространство, получающееся из несвязного объединения $Z \cup X$ отождествлением точек z_0 и x_0 . Очевидно, что $Z \vee X$ является пунктированным пространством с отмеченной точкой (z_0, x_0) . Таким образом, мы имеем

0.13. Предложение. *Экспоненциальное отображение $E: Y^{Z \times X} \rightarrow (Y^Z)^X$ индуцирует непрерывное отображение*

$$E: (Y, y_0)^{(Z \times X, Z \vee X)} \rightarrow ((Y, y_0)^{(Z, z_0)}, f_0)^{(X, x_0)},$$

которое является гомеоморфизмом, если пространства Z и X хаусдорфовы, и, кроме того, Z локально компактно.

Замечание. Подпространство $Z \times \{x_0\} \cup \{z_0\} \times X \subset Z \times X$ называется *букетом* пространств Z и X и характеризуется следующим свойством: для любых непрерывных отображений $f: (Z, z_0) \rightarrow (W, w_0)$ и $g: (X, x_0) \rightarrow (W, w_0)$ существует и единственно такое непрерывное отображение $h: (Z \vee X, *) \rightarrow (W, w_0)$, что $h|Z = f$, $h|X = g$ (ср. это с п. 0.2). Это единственное отображение h будет обозначаться так: $(Z \vee X, *) \xrightarrow{(f, g)} (W, w_0)$. Если заданы непрерывные отображения $f: (X, x_0) \rightarrow (X', x'_0)$ и $g: (Y, y_0) \rightarrow (Y', y'_0)$, то очевидным образом существует непрерывное отображение $f \vee g: (X \vee Y, (x_0, y_0)) \rightarrow (X' \vee Y', (x'_0, y'_0))$, совпадающее с f на X и с g на Y . В дальнейшем отмеченная точка (x_0, y_0) букета $X \vee Y$, как правило, будет обозначаться через $*$.

Упражнение. Используя экспоненциальный закон 0.11, дать независимое доказательство теоремы п. 0.4 в случае, когда пространства X и Y хаусдорфовы.

КАТЕГОРИИ, ФУНКТОРЫ И ЕСТЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

В современной математике всякий раз, когда определяют новый класс математических объектов, одновременно с этим описывают и класс исследуемых отображений между объектами. Например, рассматриваются топологические пространства и непрерывные отображения, группы и гомоморфизмы, кольца и кольцевые гомоморфизмы. Формализуя это наблюдение, мы приходим к понятию категории.

1.1. Определение. Категория состоит из

а) некоторого класса объектов (например, пространств, групп и т. д.);

б) множеств $\text{hom}(X, Y)$ морфизмов с областью определения X и областью значений Y для каждой упорядоченной пары объектов X и Y ; если $f \in \text{hom}(X, Y)$, то мы пишем $f: X \rightarrow Y$ или $X \xrightarrow{f} Y$;

с) заданного для каждой упорядоченной тройки (X, Y, Z) объектов отображения $\text{hom}(Y, Z) \times \text{hom}(X, Y) \rightarrow \text{hom}(X, Z)$, называемого композицией; если $f \in \text{hom}(X, Y)$, $g \in \text{hom}(Y, Z)$, то образ пары (g, f) в $\text{hom}(X, Z)$ обозначается через $g \cdot f$.

При этом должны выполняться две следующие аксиомы:

C1) если $f \in \text{hom}(X, Y)$, $g \in \text{hom}(X, Z)$, $h \in \text{hom}(Z, W)$, то $h \cdot (g \cdot f) = (h \cdot g) \cdot f \in \text{hom}(X, W)$;

C2) для всякого объекта Y существует такой морфизм $1_Y \in \text{hom}(Y, Y)$, что для произвольных морфизмов $g \in \text{hom}(X, Y)$ и $h \in \text{hom}(Y, Z)$ мы имеем $1_Y \cdot g = g$ и $h \cdot 1_Y = h$.

Нетрудно показать, что морфизм 1_Y единствен.

1.2. Определение. Два объекта X и Y называются эквивалентными, если существуют такие морфизмы $f \in \text{hom}(X, Y)$ и $g \in \text{hom}(Y, X)$, что $g \cdot f = 1_X$ и $f \cdot g = 1_Y$. Морфизмы f и g в этом случае называются эквивалентностями.

1.3. Примеры. i) Категория $\mathcal{S}$ всех множеств и всех отображений.

ii) Категория $\mathcal{T}$ всех топологических пространств и всех непрерывных отображений.

iii) Категория $\mathcal{PS}$ пунктированных множеств и отображений, сохраняющих отмеченные точки.

iv) Категория $\mathcal{PT}$ пунктированных топологических пространств и непрерывных отображений, сохраняющих отмеченные точки.

v) Категория $\mathcal{G}$ групп и гомоморфизмов.

vi) Категория $\mathcal{A}$ абелевых групп и гомоморфизмов.

vii) Категория $\mathcal{M}_R$ левых R -модулей (R — некоторое фиксированное кольцо) и R -гомоморфизмов.

viii) Категория $\mathcal{T}'$, объектами которой являются топологические пространства, но $\text{hom}(X, Y) = [X, Y]$. Для данных $[f] \in \text{hom}(X, Y)$, $[g] \in \text{hom}(Y, Z)$ композиция $[g] \cdot [f]$ определяется как $[g \cdot f]$. Легко проверить, что морфизм $[g] \cdot [f]$ корректно определен и выполнены аксиомы C1) и C2). Аналогичным образом определяется категория $\mathcal{T}\mathcal{T}'$.

Заметим, что пространства X и Y эквивалентны в категории $\mathcal{T}$ тогда и только тогда, когда они гомеоморфны; в категории же $\mathcal{T}'$ пространства X и Y эквивалентны в том и только в том случае, когда они *гомотопически эквивалентны*.

Алгебраическая топология изучает топологические пространства методами алгебры. Это означает, что каждому топологическому пространству X сопоставляется некоторый алгебраический объект $F(X)$ таким образом, что любому непрерывному отображению $f: X \rightarrow Y$ соответствует гомоморфизм $F(f): F(X) \rightarrow F(Y)$. Достоинства такого подхода можно проиллюстрировать следующим важным примером. Предположим, что мы хотим доказать несуществование непрерывного отображения $f: X \rightarrow Y$, обладающего некоторыми свойствами. Указанный подход позволяет свести доказательство к сравнительно более простому доказательству несуществования соответствующего алгебраического отображения $F(f)$. Решив эту алгебраическую задачу, мы тем самым получим решение исходной топологической задачи. Таким образом, сопоставление F представляет собой «гомоморфизм» из одной категории (скажем, $\mathcal{T}$) в некоторую другую (например, $\mathcal{G}$ или $\mathcal{A}$). Формализация этого понятия приводит к определению функтора

1.4. Определение. *Функтором* из категории $\mathcal{C}$ в категорию $\mathcal{D}$ называется соответствие, которое

а) каждому объекту $X \in \mathcal{C}$ сопоставляет объект $F(X) \in \mathcal{D}$;

б) каждому морфизму $f \in \text{hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ сопоставляет морфизм $F(f) \in \text{hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$.

При этом должны выполняться следующие две аксиомы:

F1) Для любого объекта $X \in \mathcal{C}$ имеет место равенство $F(1_X) = 1_{F(X)}$.

F2) Для любых $f \in \text{hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $g \in \text{hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$

$$F(g \cdot f) = F(g) \cdot F(f) \in \text{hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Z)).$$

Итак, функтор — это соответствие, «сохраняющее стрелки», т. е. если $f: X \rightarrow Y$, то $F(f): F(X) \rightarrow F(Y)$.

Дуальным для функтора является понятие кофунктора; кофунктор «обращает стрелки».

1.5. Определение. *Кофунктором* F^* из категории $\mathcal{C}$ в категорию $\mathcal{D}$ называется соответствие, которое

- а) каждому объекту $X \in \mathcal{C}$ сопоставляет объект $F^*(X) \in \mathcal{D}$;
 б) каждому морфизму $f \in \text{hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ сопоставляет морфизм $F^*(f) \in \text{hom}_{\mathcal{D}}(F^*(Y), F^*(X))$.

При этом должны выполняться следующие аксиомы:

CF1) Для любого объекта $X \in \mathcal{C}$ имеет место равенство $F^*(1_X) = 1_{F^*(X)}$.

CF2) Для любых $f \in \text{hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ и $g \in \text{hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$

$$F^*(g \circ f) = F^*(f) \circ F^*(g) \in \text{hom}_{\mathcal{D}}(F^*(Z), F^*(X)).$$

З а м е ч а н и е. В математической литературе функторы в смысле нашего определения часто называются ковариантными функторами, а кофункторы — контравариантными функторами.

1.6. П р и м е р ы. i) Определим функтор $F: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ следующим образом. Если $X \in \mathcal{T}$, то $F(X)$ — это подстилающее множество для X (т. е. X без топологии), и если $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение, то $F(f)$ — подстилающее отображение (т. е. f без непрерывности). По очевидным соображениям F называется пренебрегающим функтором. Читатель может привести много других примеров пренебрегающих функторов

ii) Пусть даны некоторое фиксированное кольцо R и левый R -модуль K . Определим функтор $F_K: \mathcal{M}_R \rightarrow \mathcal{A}$, полагая для произвольного объекта $M \in \mathcal{M}_R$

$$F_K(M) = \text{Hom}_R(K, M),$$

и для произвольного гомоморфизма $\phi: M \rightarrow M'$

$$F_K(\phi) = \text{Hom}_R(1_K, \phi): \text{Hom}_R(K, M) \rightarrow \text{Hom}_R(K, M').$$

Аналогично можно определить кофунктор $F_K^*: \mathcal{M}_R \rightarrow \mathcal{A}$, если положить $F_K^*(M) = \text{Hom}_R(M, K)$, $F_K^*(\phi) = \text{Hom}_R(\phi, 1_K)$.

iii) Подобным же образом для данного пунктированного пространства $(K, k_0) \in \mathcal{PT}$ определим функтор

$$F_K: \mathcal{PT} \rightarrow \mathcal{PT},$$

полагая для каждого объекта $(X, x_0) \in \mathcal{PT}$

$$F_K(X, x_0) = [K, k_0; X, x_0]$$

и задавая для каждого морфизма $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ морфизм $F_K(f)$ формулой

$$F_K(f)[g] = [f \circ g] \in [K, k_0; Y, y_0], \quad [g] \in [K, k_0; X, x_0].$$

Аналогично получается кофунктор $F_K^*: \mathcal{PT} \rightarrow \mathcal{PT}$. Для его определения нужно положить на объектах

$$F_K^*(X, x_0) = [X, x_0; K, k_0]$$

и для каждого морфизма $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ задать $F_K^*(f)$ формулой

$$F_K^*(f)[g] = [g \circ f] \in [X, x_0; K, k_0], \quad [g] \in [Y, y_0; K, k_0].$$

Заметим, что из соотношения $f \simeq f' \text{ rel } x_0$ вытекает $F_K(f) = F_K(f')$ и, аналогично, $F_K^*(f) = F_K^*(f')$. Следовательно, F_K (соответственно, F_K^*) можно рассматривать как функтор (соответственно, кофунктор) из категории $\mathcal{TS}'$ в категорию $\mathcal{SS}$.

iv) Определим функтор $C: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$, сопоставляя любому пространству $X \in \mathcal{T}$ пространство $C(X) = \hat{X}$ — одноточечную компактификацию пространства X . Если $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение, то существует и единственно такое непрерывное отображение $\hat{f}: \hat{X} \rightarrow \hat{Y}$, что $\hat{f}|X = f$. Поэтому для любого $f \in \text{hom}(X, Y)$ положим $C(f) = \hat{f}$.

v) Пусть $\mathcal{T}$ — категория всех областей целостности и кольцевых мономорфизмов, а $\mathcal{F}$ — категория всех полей и кольцевых гомоморфизмов. Определим функтор $Q: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{F}$, сопоставляя любой области целостности A ее поле частных $Q(A)$. Для любого мономорфизма $\phi: A \rightarrow B$ областей целостности существует и единствен гомоморфизм $Q(\phi): Q(A) \rightarrow Q(B)$, ограничение которого на $A \subset Q(A)$ совпадает с ϕ . Поэтому Q — функтор.

vi) Пусть $\mathcal{B}$ — категория банаховых пространств над $\mathbb{R}$ и ограниченных линейных отображений. Определим $D: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$, полагая $D(X) = X^*$, где X^* — банахово пространство ограниченных линейных функционалов на X и $D(f) = f^*$ для ограниченного линейного отображения $f: X \rightarrow Y$. Тогда D — кофунктор.

Для того чтобы сравнить два функтора $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, вводится понятие естественного преобразования.

1.7. Определение. Пусть $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ — две категории и $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ функторы из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{D}$. *Естественным преобразованием* T из F в G называется соответствие, которое сопоставляет каждому $X \in \mathcal{C}$ морфизм $T(X) \in \text{hom}_{\mathcal{D}}(F(X), G(X))$ так, что для любого морфизма $f \in \text{hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ имеет место равенство

$$T(Y) \cdot F(f) = G(f) \cdot T(X),$$

т. е. коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ \downarrow T(X) & & \downarrow T(Y) \\ G(X) & \xrightarrow{G(f)} & G(Y) \end{array}$$

Обращая стрелки, мы получаем определение естественного преобразования двух кофункторов.

1.8. Если для каждого $X \in \mathcal{E}$ морфизм $T(X)$ является эквивалентностью категории D , то T называется *естественной эквивалентностью*, а функторы F и G называются *естественно эквивалентными*.

1.9. Примеры. i) Пусть $\phi: (K, k_0) \rightarrow (L, l_0)$ — некоторый морфизм в категории $\mathcal{F}\mathcal{F}$. Определим $T_\phi: F_L \rightarrow F_K$, полагая для любых (X, x_0) и $[g] \in F_L(X, x_0) = [L, l_0; X, x_0]$

$$T_\phi(X, x_0)[g] = [g \cdot \phi] \in [K, k_0; X, x_0].$$

$T_\phi(X, x_0)$ переводит постоянное отображение в постоянное и поэтому принадлежит множеству морфизмов $\text{hom}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}(F_L(X, x_0), F_K(X, x_0))$. Кроме того, для любого $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} [L, l_0; X, x_0] & \xrightarrow{F_L(f)} & [L, l_0; Y, y_0] \\ \downarrow T_\phi(X, x_0) & & \downarrow T_\phi(Y, y_0) \\ [K, k_0; X, x_0] & \xrightarrow{F_K(f)} & [K, k_0; Y, y_0] \end{array}$$

коммутативна. Действительно, если $[g] \in [L, l_0; X, x_0]$, то

$$\begin{aligned} T_\phi(Y, y_0) \cdot F_L(f)[g] &= T_\phi(Y, y_0)[f \cdot g] = [f \cdot g \cdot \phi] = \\ &= F_K(f)[g \cdot \phi] = F_K(f) \cdot T_\phi(X, x_0)[g]. \end{aligned}$$

Упражнение. Показать, что отображение $\phi: (K, k_0) \rightarrow (L, l_0)$ является гомотопической эквивалентностью в том и только в том случае, когда T_ϕ — естественная эквивалентность.

ii) Рассмотрим функтор $D: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ из примера 1.6, vi). Легко проверить, что $D^2 = D \circ D$ — также функтор. Кроме того, мы имеем тождественный функтор $1: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$. Определим $T: 1 \rightarrow D \circ D$, сопоставляя каждому банахову пространству $X \in \mathcal{B}$ естественное вложение $T(X): X \rightarrow D^2 X = X^{**}$. Другими словами, если $x \in X$, то мы имеем $[T(X)(x)](f) = f(x)$ для любого $f \in X^*$. Тривиальная проверка показывает, что T — естественное преобразование. На подкатегории конечномерных банаховых пространств T является даже естественной эквивалентностью. Наибольшая подкатегория в $\mathcal{B}$, на которой T — естественная эквивалентность, называется категорией рефлексивных банаховых пространств.

В алгебраической топологии особо важную роль играют функторы F_K и кофункторы F_K^* , введенные в примере 1.6, iii). В настоящей главе мы опишем условия на пространство (K, k_0) , выполнение которых гарантирует групповую структуру на множествах $F_K(X, x_0)$ и $F_K^*(X, x_0)$ для любых пунктированных пространств (X, x_0) . Другими словами, мы опишем условия на (K, k_0) , которые превращают F_K (соответственно, F_K^*) в функтор (соответственно, кофунктор) из категории $\mathcal{PT}$ (или $\mathcal{PT}'$) в категорию групп $\mathcal{G}$. В частности, если $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ — единичная сфера и $s_0 = (1, 0, \dots, 0)$, то оказывается, что для пунктированного пространства (S^n, s_0) F_{S^n} является функтором из $\mathcal{PT}'$ в категорию групп $\mathcal{G}$; мы исследуем здесь некоторые свойства групп $\pi_n(X, x_0) = F_{S^n}(X, x_0)$, $n \geq 0$.

Всюду в этой главе термин «отображение» означает непрерывное отображение одного топологического пространства в другое.

2.1. Путь в топологическом пространстве X есть, по определению, любое непрерывное отображение $w: I \rightarrow X$. Часто w называют путем из $w(0)$ в $w(1)$ или путем, соединяющим точки $w(0)$ и $w(1)$. Таким образом, X' представляет собой пространство всех путей в X с компактно-открытой топологией. Введем на пространстве X отношение $\sim$, полагая, что $x \sim y$ в том и только в том случае, когда существует путь $w: I \rightarrow X$ из x в y . Очевидно, что $\sim$ является отношением эквивалентности. Множество классов эквивалентности обозначим через $\pi_0(X)$. Элементы множества $\pi_0(X)$ называются *компонентами линейной связности* или *0-компонентами* пространства X . Если $\pi_0(X)$ содержит ровно один элемент, то пространство X называется *линейно связным* или *0-связным*.

Упражнение. Показать, что из 0-связности следует связность, и привести контрпример к обратному утверждению.

Для пунктированного пространства (X, x_0) мы можем рассматривать $\pi_0(X)$ как пунктированное множество, отмеченным элементом которого является 0-компонента точки x_0 . Если мы хотим подчеркнуть, что $\pi_0(X)$ рассматривается как пунктированное множество, то будем использовать обозначение $\pi_0(X, x_0)$. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — произвольное отображение. Тогда f переводит 0-компоненты пространства X в 0-компоненты пространства Y и, следовательно, определяет отображение $\pi_0(f): \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$. Аналогично, сохраняющее отмеченные точки отображение f :

$(X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ индуцирует морфизм пунктированных множеств $\pi_0(f): \pi_0(X, x_0) \rightarrow \pi_0(Y, y_0)$. Немедленно проверяется, что $\pi_0(1_X) = 1_{\pi_0(X)}$ и что $\pi_0(f \cdot g) = \pi_0(f) \cdot \pi_0(g)$. Таким образом, π_0 представляет собой функтор $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}$ или $\mathcal{P}\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{P}\mathcal{S}$.

Можно предложить и другое описание функтора π_0 . Обозначим через $*$ любое пространство, состоящее ровно из одной точки. Обозначим, далее, через S^0 0-мерную сферу $\{+1, -1\} \subset \mathbb{R}^1$; снабдим S^0 отмеченной точкой $s_0 = +1$.

2.2. Предложение. *Существует естественная эквивалентность*

$$[* , X] \leftrightarrow \pi_0(X),$$

задаваемая правилом

$$[f] \mapsto \{0\text{-компонента точки } f(*)\}.$$

Доказательство. Существует очевидное взаимно однозначное соответствие между отображениями $f: * \rightarrow X$ и точками пространства X , задаваемое формулой $f \mapsto f(*)$. Отображения f и g гомотопны тогда и только тогда, когда $f(*)$ и $g(*)$ лежат в одной и той же компоненте линейной связности. $\square$

Соответствующий результат в категории $\mathcal{P}\mathcal{T}$ формулируется следующим образом.

2.3. Предложение. *Существует естественная эквивалентность*

$$[S^0, s_0; X, x_0] \leftrightarrow \pi_0(X, x_0),$$

задаваемая правилом

$$[f] \mapsto \{0\text{-компонента точки } f(-1)\}.$$

2.4. Пусть $(X, x_0), (Y, y_0) \in \mathcal{P}\mathcal{T}$. Определим *приведенное произведение* $(X \wedge Y, *) \in \mathcal{P}\mathcal{T}$ пунктированных пространств (X, x_0) и (Y, y_0) как факторпространство

$$X \wedge Y = X \times Y / X \vee Y,$$

отмеченной точкой в котором является точка $* = p(X \vee Y)$. Здесь $p: X \times Y \rightarrow X \wedge Y$ — естественная проекция. Для любой пары $(x, y) \in X \times Y$ будем обозначать точку $p(x, y)$ через $[x, y]$. Если заданы отображения

$$f: (X, x_0) \rightarrow (X', x'_0) \quad \text{и} \quad g: (Y, y_0) \rightarrow (Y', y'_0),$$

то $f \times g: X \times Y \rightarrow X' \times Y'$ переводит $X \vee Y$ в $X' \vee Y'$ и поэтому индуцирует отображение $f \wedge g: X \wedge Y \rightarrow X' \wedge Y'$.

Замечание. В обозначении $X \wedge Y$ опущены отмеченные точки. Строго говоря, мы должны были бы писать $(X, x_0) \wedge (Y, y_0)$, но для сокращения записи точки x_0 и y_0 лишь подразумеваются. Это явление встречается довольно часто; например, так же всегда опускаются обозначения топологий на X и Y .

У п р а ж н е н и е. Показать, что

$$X \wedge (Y \wedge Z) \cong (X \wedge Y) \wedge Z.$$

2.5. Теорема. Пусть (X, x_0) , (Y, y_0) , $(Z, z_0) \in \mathcal{FT}$, пространства X и Z хаусдорфовы и Z локально компактно. Тогда существует естественная эквивалентность

$$A: [Z \wedge X, *; Y, y_0] \rightarrow [X, x_0; (Y, y_0)^{(Z, z_0)}, f_0],$$

задаваемая формулой $A[f] = [\hat{f}]$, где $\hat{f}: X \rightarrow Y^Z$ строится по f :

$$Z \wedge X \rightarrow Y \text{ следующим образом: } (\hat{f}(x))(z) = f[z, x].$$

Доказательство. i) Отображение A сюръективно. Действительно, для любого отображения $f': (X, x_0) \rightarrow ((Y, y_0)^{(Z, z_0)}, f_0)$, в силу предложения 0.13, отображение $\tilde{f}: (Z \times X, Z \vee X) \rightarrow (Y, y_0)$, определяемое формулой $\tilde{f}(z, x) = (f'(x))(z)$, непрерывно ($\tilde{f} = E^{-1}f'$). Согласно п. 0.3 $\tilde{f}$ определяет отображение $f: (Z \wedge X, *) \rightarrow (Y, y_0)$ такое, что $f[z, x] = \tilde{f}(z, x) = (f'(x))(z)$. Таким образом, $\hat{f} = f'$, т. е. $A[f] = [f']$.

ii) Отображение A инъективно. Предположим, что $f, g: (Z \wedge X, *) \rightarrow (Y, y_0)$ — такие отображения, что $A[f] = A[g]$, т. е. $\hat{f} \simeq \hat{g}$. Пусть $H': X \times I \rightarrow (Y, y_0)^{(Z, z_0)}$ — гомотопия $\text{rel } x_0$. В силу п. 0.13 отображение $\bar{H}: Z \times X \times I \rightarrow Y$, определенное соотношением $\bar{H}(z, x, t) = (H'(x, t))(z)$, непрерывно ($\bar{H} = E^{-1}H'$). Для каждого $t \in I$ мы имеем $\bar{H}((Z \vee X) \times \{t\}) = y_0$, поэтому в силу предложения 0.8 существует такая гомотопия $H: (Z \wedge X) \times I \rightarrow Y \text{ rel } *$, что $H([z, x], t) = \bar{H}(z, x, t) = (H'(x, t))(z)$. Таким образом, $H_0([z, x]) = (H'_0(x))(z) = (\hat{f}(x))(z) = f[z, x]$ и, аналогично, $H_1 = g$. Следовательно, $[f] = [g]$. $\square$

Важным частным случаем теоремы 2.5 является ситуация, когда пространство Z — это окружность

$$S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2: \|x\| = 1\} \text{ и } z_0 = s_0 = (1, 0).$$

2.6. Для $(Y, y_0) \in \mathcal{FT}$ определим пространство петель $(\Omega Y, \omega_0) \in \mathcal{FT}$ как пространство отображений

$$\Omega Y = (Y, y_0)^{(S^1, s_0)}$$

с постоянной петлей ω_0 ($\omega_0(s) = y_0$ для всех $s \in S^1$) в качестве отмеченной точки.

2.7. Для $(X, x_0) \in \mathcal{FT}$ определим надстройку $(SX, *) \in \mathcal{FT}$ над X как приведенное произведение $(S^1 \wedge X, *)$ пространства X и окружности S^1 .

2.8. Следствие. Если $(X, x_0), (Y, y_0) \in \mathcal{FT}$ и пространство X хаусдорфово, то имеет место естественная эквивалент-

ность

$$A: [SX, *; Y, y_0] \rightarrow [X, x_0; \Omega Y, \omega_0].$$

Замечания. i) В действительности мы получили два новых функтора, которые стоит принять во внимание; оба они действуют из $\mathcal{FS}$ в $\mathcal{FS}$. Функтор надстройки S переводит пространство (X, x_0) в $(SX, *)$. Если задано отображение $f: (X, x_0) \rightarrow (X', x'_0)$, определим Sf как отображение

$$1 \wedge f: (S^1 \wedge X, *) \rightarrow (S^1 \wedge X', *).$$

Функтор петель Ω переводит пространство (Y, y_0) в $(\Omega Y, \omega_0)$. Если задано отображение $g: (Y, y_0) \rightarrow (Y', y'_0)$, определим $\Omega g: (\Omega Y, \omega_0) \rightarrow (\Omega Y', \omega'_0)$ формулой

$$(\Omega g(\omega))(s) = g \cdot \omega(s), \quad s \in S^1.$$

Определенное таким образом отображение Ωg непрерывно в силу утверждений 0.10 и 0.13. Согласно следствию 2.8 функторы S и Ω сопряжены друг другу в категории $\mathcal{FS}'$.

ii) Соответствие A из следствия 2.8 естественно в том смысле, что для любых отображений $f: (X', x'_0) \rightarrow (X, x_0)$ и $g: (Y, y_0) \rightarrow (Y', y'_0)$ диаграммы

$$\begin{array}{ccc} [SX, *; Y, y_0] & \xrightarrow{A} & [X, x_0; \Omega Y, \omega_0] \\ \downarrow Sf^* & & \downarrow f^* \\ [SX', *; Y, y_0] & \xrightarrow{A} & [X', x'_0; \Omega Y, \omega_0] \end{array}$$

и

$$\begin{array}{ccc} [SX, *; Y, y_0] & \xrightarrow{A} & [X, x_0; \Omega Y, \omega_0] \\ \downarrow g_* & & \downarrow \Omega g_* \\ [SX, *; Y', y'_0] & \xrightarrow{A} & [X, x_0; \Omega Y', \omega'_0] \end{array}$$

коммутативны. Здесь $f^* = F_{\Omega Y}^*(f)$, $g_* = F_{SX}(g)$ и т. д.

Теперь займемся изучением тех свойств пространств (K, k_0) , которые превращают F_K в функтор со значениями в категории групп (или F_K^* — в кофунктор со значениями в категории групп). Путеводной нитью в этом изучении нам будет служить следующее описание групп.

Определение. Группой называется пунктированное множество (G, e) с такими заданными на нем операциями умножения $\mu: G \times G \rightarrow G$ и обращения $\nu: G \rightarrow G$, что следующие диаграммы коммутативны:

$$i) \quad \begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow{(e, 1)} & G \times G & \xleftarrow{(1, e)} & G \\ & \searrow 1 & \downarrow \mu & \swarrow 1 & \\ & & G & & \end{array} \quad (e - \text{двусторонняя единица}),$$

$$ii) \quad \begin{array}{ccc} G \times G \times G & \xrightarrow{\mu \times 1} & G \times G \\ \downarrow 1 \times \mu & & \downarrow \mu \\ G \times G & \xrightarrow{\mu} & G \end{array} \quad (\text{ассоциативность}),$$

$$iii) \quad \begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow{(v, 1)} & G \times G & \xleftarrow{(1, v)} & G \\ & \searrow e & \downarrow \mu & \swarrow e & \\ & & G & & \end{array} \quad (\text{существование обратного элемента}).$$

Здесь через $e: G \rightarrow G$ обозначено постоянное отображение: $e(g) = e$ для всех $g \in G$. Через $(e, 1)$ обозначено такое отображение $G \rightarrow G \times G$, что $(e, 1)(g) = (e, g)$; аналогично определяются $(1, e)$, $(v, 1)$, $(1, v)$. Группа G называется *коммутативной*, или *абелевой*, если в дополнение к условиям i) — iii) коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{T} & G \times G \\ & \searrow \mu & \swarrow \mu \\ & & G \end{array},$$

где $T: G \times G \rightarrow G \times G$ — отображение, переставляющее аргументы, т. е. $T(g_1, g_2) = (g_2, g_1)$ для любых пар $(g_1, g_2) \in G \times G$.

Отправляясь от этого определения группы, введем следующие объекты.

2.9. Определение. *H-пространством* называется пунктированное множество (K, k_0) с заданным отображением $\mu: K \times K \rightarrow K$, называемым умножением, таким, что относительно этого умножения элемент k_0 является *гомотопической единицей*, т. е. что диаграмма

$$2.10. \quad \begin{array}{ccccc} K & \xrightarrow{(k_0, 1)} & K \times K & \xleftarrow{(1, k_0)} & K \\ & \searrow 1 & \downarrow \mu & \swarrow 1 & \\ & & K & & \end{array}$$

коммутативна с точностью до гомотопии:

$$\mu \cdot (1, k_0) \simeq 1 \simeq \mu_0 \cdot (k_0, 1).$$

Говорят, что умножение μ *гомотопически ассоциативно*, если коммутативна с точностью до гомотопии диаграмма

$$2.11. \quad \begin{array}{ccc} K \times K \times K & \xrightarrow{\mu \times 1} & K \times K \\ \downarrow 1 \times \mu & & \downarrow \mu \\ K \times K & \xrightarrow{\mu} & K, \end{array} \quad \text{т. е. если } \mu \cdot (\mu \times 1) \simeq \mu \cdot (1 \times \mu).$$

Отображение $v: (K, k_0) \rightarrow (K, k_0)$ называется *гомотопическим обращением*, если коммутативна с точностью до гомотопии диаграмма

$$2.12. \quad \begin{array}{ccccc} K & \xrightarrow{(v, 1)} & K \times K & \xleftarrow{(1, v)} & K \\ & \searrow k_0 & \downarrow \mu & \swarrow k_0 & \\ & & K, & & \end{array} \quad \text{т. е. если } \mu \cdot (v, 1) \simeq k_0 \simeq \mu \cdot (1, v).$$

Говорят, что умножение μ *гомотопически коммутативно*, если коммутативна с точностью до гомотопии диаграмма

$$2.13. \quad \begin{array}{ccc} K \times K & \xrightarrow{T} & K \times K \\ & \searrow \mu & \swarrow \mu \\ & & K, \end{array} \quad \text{т. е. если } \mu \cdot T \simeq \mu.$$

H-группой называется *H-пространство* (K, k_0) с гомотопически ассоциативным умножением μ и заданным гомотопическим обращением v .

Замечание Все упомянутые в определениях отображения и гомотопии рассматриваются относительно отмеченной точки; произведение $K \times K$ имеет отмеченную точку (k_0, k_0) .

Основанием для введения только что сформулированных определений является следующее предложение.

2.14. Предложение. Пусть (K, k_0) — некоторая *H-группа* с умножением μ и гомотопическим обращением v . Тогда для любого $(X, x_0) \in \mathcal{FT}$ множество

$$[X, x_0; K, k_0]$$

можно снабдить групповой структурой, определив произведение $[f] \cdot [g]$ как гомотопический класс композиции

$$X \xrightarrow{\Delta} X \times X \xrightarrow{f \times g} K \times K \xrightarrow{\mu} K.$$

Здесь Δ — диагональное отображение, задаваемое формулой $\Delta(x) = (x, x)$. Единицей группы является класс $[k_0]$ постоянного отображения, а обратный элемент определяется как $[f]^{-1} = [\nu \cdot f]$. Если умножение μ гомотопически коммутативно, то группа $[X, x_0; K, k_0]$ абелева. Каждое отображение $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ индуцирует гомоморфизм

$$f^*: [Y, y_0; K, k_0] \rightarrow [X, x_0; K, k_0].$$

Доказательство. Покажем прежде всего, что произведение $[f] \cdot [g]$ определено корректно. Пусть $H: X \times I \rightarrow K$ — некоторая гомотопия между отображениями f и f' , а $G: X \times I \rightarrow K$ — гомотопия между отображениями g и g' . Определим гомотопию $M: X \times I \rightarrow K$, полагая

$$M(x, t) = \mu(H(x, t), G(x, t)).$$

Тогда $M_0 = \mu \cdot (f \times g) \cdot \Delta$ и $M_1 = \mu \cdot (f' \times g') \cdot \Delta$. Тот факт, что определенное таким образом умножение удовлетворяет групповым аксиомам, по существу, следует из диаграмм 2.10 — 2.13. Докажем, в качестве примера, ассоциативность умножения. Имеем

$$\begin{aligned} [f] \cdot ([g] \cdot [h]) &= [\mu \cdot (f \times \{\mu \cdot (g \times h) \cdot \Delta\}) \cdot \Delta] = \\ &= [\mu \cdot (1 \times \mu) \cdot (f \times g \times h) \cdot (1 \times \Delta) \cdot \Delta] \quad (\text{в силу коммутативности диаграммы 2.11}) = \\ &= [\mu \cdot (\mu \times 1) \cdot (f \times g \times h) \cdot (\Delta \times 1) \cdot \Delta] = \\ &= [\mu \cdot (\{\mu \cdot (f \times g) \cdot \Delta\} \times h) \cdot \Delta] = \\ &= ([f] \cdot [g]) \cdot [h]. \quad \square \end{aligned}$$

Итак, если (K, k_0) является H -группой, то F_K^* представляет собой кофунктор из категории $\mathcal{PS}'$ в категорию групп $\mathcal{G}$.

2.15. Примеры. i) Очевидно, что всякая топологическая группа является H -группой.

ii) Наиболее важным примером H -группы является пространство петель $(\Omega Y, \omega_0)$ произвольного пунктированного топологического пространства $(Y, y_0) \in \mathcal{PS}$. Перед тем так определить умножение

$$\mu: \Omega Y \times \Omega Y \rightarrow \Omega Y,$$

сделаем следующее замечание. Имеет место очевидный гомеоморфизм

$$(I/\{0, 1\}, *) \rightarrow (S^1, *),$$

индуцирующий гомеоморфизм

$$(Y, y_0)^{(S^1, *)} \cong (Y, y_0)^{(I, \{0, 1\})}.$$

Очень часто нам будет удобнее рассматривать ΩY как $(Y, y_0)^{(I, \{0, 1\})}$, т. е. как пространство путей, начинающихся и кончающихся в точке y_0 . В этих терминах определим умножение μ , полагая

$$\mu(\omega, \omega')(t) = \begin{cases} \omega(2t), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ \omega'(2t-1), & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

В действительности мы определили отображение

$$\mu: \Omega Y \times \Omega Y \times I \rightarrow Y,$$

непрерывное в силу утверждений 0.1, 0.2 и 0.10. Но тогда экспоненциальный закон 0.11 доставляет нам желаемое отображение

$$\mu: \Omega Y \times \Omega Y \rightarrow \Omega Y.$$

Петля $\mu(\omega, \omega')$ будет обозначаться через $\omega * \omega'$. Схематически петлю $\omega * \omega'$ можно представить диаграммой (рис. 1).

Мы должны показать, что тривиальная петля ω_0 является гомотопической единицей. Другими словами, нам нужна гомотопия $H: \Omega Y \times I \rightarrow \Omega Y$, связывающая отображения $\mu \cdot (1 \times \omega_0)$ и 1 . Для фиксированной петли $\omega \in \Omega Y$ наша гомотопия H выглядит так, как показано на схеме (рис. 2),

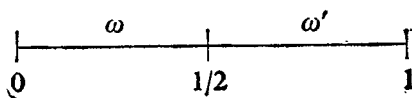


Рис. 1.

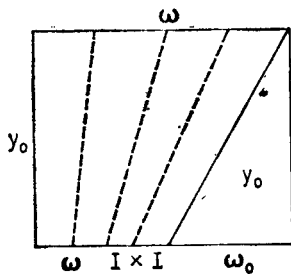


Рис. 2.

где штриховыми линиями обозначены «изоклины». Более точно, определим отображение $H: \Omega Y \times I \times I \rightarrow Y$, полагая

$$H(\omega, t, s) = \begin{cases} \omega\left(\frac{2s}{t+1}\right), & 0 \leq s \leq \frac{t+1}{2}, \\ y_0, & \frac{t+1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Как и в предыдущих случаях, отображение H непрерывно в силу утверждений из 0.1 и 0.10 и поэтому определяет гомотопию $H: \Omega Y \times I \rightarrow \Omega Y$. Немедленно проверяется, что $H_0 = \mu \cdot (1 \times \omega_0)$ и $H_1 = 1$. Тот факт, что $\mu \cdot (\omega_0 \times 1) \simeq 1$, устанавливается совершенно аналогично.

Для гомотопии $\mu \cdot (1 \times \mu) \simeq \mu \cdot (\mu \times 1)$ мы укажем лишь схематическую диаграмму (рис. 3)

Предлагаем читателю попытаться выписать точные формулы для этой гомотопии.

Определим теперь гомотопическое обращение $v: \Omega Y \rightarrow \Omega Y$, полагая $v(\omega) = \omega^{-1}$, где $\omega^{-1}(t) = \omega(1-t)$, $t \in I$. Схематическая диаграмма, устанавливающая гомотопию между $\mu \cdot (1, v)$ и ω_0 , изображена на рис. 4.

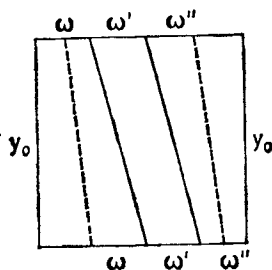


Рис. 3.

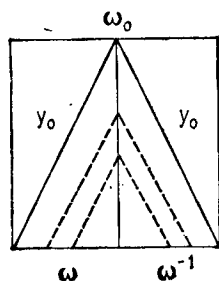


Рис. 4.

Существует очевидное понятие H -гомоморфизма $\phi: (K, k_0) \rightarrow (K', k'_0)$ одной H -группы в другую; конечно же, Ωf является H -гомоморфизмом для любого отображения $f: (Y, y_0) \rightarrow (Y', y'_0)$.

Таким образом, мы нашли те условия на пространство (K, k_0) , при выполнении которых кофунктор F_K^* пропускается через категорию групп $\mathcal{G}$. В частности, таковым является кофунктор $F_{\Omega Y}^*$ для любого $(Y, y_0) \in \mathcal{P}\mathcal{T}$. Аналогичный вопрос для функтора F_K приводит к двойственному понятию H -когруппы.

2.16. Определение. H -когруппой называется пунктированное пространство (K, k_0) с таким заданным непрерывным отображением $\mu': K \rightarrow K \vee K$, называемым коумножением, что относительно этого коумножения элемент k_0 является гомотопической единицей, т. е. диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}
 & & (k_0, 1) & & (1, k_0) \\
 & & \leftarrow K & K \vee K & \rightarrow K \\
 2.17. & \swarrow & & \uparrow \mu' & \searrow \\
 & 1 & & & 1 \\
 & & K & &
 \end{array}$$

коммутативна с точностью до гомотопии. Здесь через $(k_0, 1)$ обозначено такое отображение, что $(k_0, 1)(k, k_0) = k_0$ и $(k_0, 1)(k_0, k) = k$ для любых $k \in K$. Далее, предполагается, что коумножение μ' гомотопически ассоциативно, т. е. что диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 K \vee K \vee K & \xleftarrow{\mu' \vee 1} & K \vee K \\
 \uparrow 1 \vee \mu' & & \uparrow \mu' \\
 K \vee K & \xleftarrow{\mu'} & K
 \end{array}$$

2.18.

коммутативна с точностью до гомотопии. Кроме того, пространство K должно обладать гомотопическим обращением $v': K \rightarrow K$, таким, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}
 & & K & \xleftarrow{(v', 1)} & K \vee K & \xrightarrow{(1, v')} & K \\
 & \swarrow k_0 & & & \uparrow \mu' & & \nearrow k_0 \\
 & & K & & & &
 \end{array}$$

2.19.

коммутативна с точностью до гомотопии. И, наконец, H -когруппа K называется *гомотопически коммутативной*, если в добавление к сформулированным выше условиям коммутативна с точностью до гомотопии диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 K \vee K & \xrightarrow{T} & K \vee K \\
 \mu' \swarrow & & \nearrow \mu' \\
 & K &
 \end{array}$$

2.20.

Метаматематическое замечание. Наблюдательный читатель мог заметить, что способ дуализации понятия H -группы заключается в замене произведения пространств букетом и в обращении всех стрелок. Эта процедура еще не раз встретится нам в различных контекстах.

А теперь сформулируем предложение, двойственное предложению 2.14.

2.21. Предложение. Пусть (K, k_0) — некоторая H -когруппа с коумножением μ' и гомотопическим обращением v' . Тогда для любого пунктированного пространства $(X, x_0) \in \mathcal{PT}$ множество $[K, k_0; X, x_0]$

можно снабдить групповой структурой, определив произведение $[f] \cdot [g]$ как гомотопический класс композиции

$$K \xrightarrow{\mu'} K \vee K \xrightarrow{f \vee g} X \vee X \xrightarrow{\Delta'} X.$$

Здесь Δ' — отображение «складывания букета», задаваемое формулой $\Delta'(x, x_0) = x = \Delta'(x_0, x)$. Единицей группы служит класс $[x_0]$ постоянного отображения, а обратный элемент определяется формулой $[f]^{-1} = [f \cdot v']$. Если коумножение μ' гомотопически комму-

тативно, то группа $[K, k_0; X, x_0]$ абелева. Каждое отображение $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ индуцирует гомоморфизм

$$f_*: [K, k_0; X, x_0] \rightarrow [K, k_0; Y, y_0].$$

И на сей раз доказательство данного предложения вполне очевидно.

2.22. Поскольку основными примерами H -групп служат пространства петель ΩY для произвольных Y , то в свете следствия 2.8 неудивительно, что основными примерами H -когрупп являются надстройки SX произвольных пространств X . Прежде чем явно определить коумножение

$$\mu': SX \rightarrow SX \vee SX,$$

сделаем следующее замечание: в силу гомеоморфизма $(S^1, s_0) \cong (I/\{0, 1\}, *)$ можно рассматривать SX как факторпространство

$$I \times X / \{0\} \times X \cup I \times \{x_0\} \cup \{1\} \times X.$$

Пусть $p: I \times X \rightarrow SX$ — естественная проекция; будем обозначать точку $p(t, x) \in SX$ через $[t, x]$, $t \in I$, $x \in X$. При этих соглашениях коумножение μ' определяется следующим образом:

$$\mu'[t, x] = \begin{cases} ([2t, x], x_0), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ (x_0, [2t-1, x]), & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Если представить надстройку SX следующим схематическим рисунком

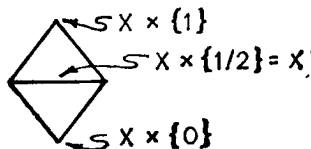


Рис. 5.

то коумножение μ' можно изобразить так:

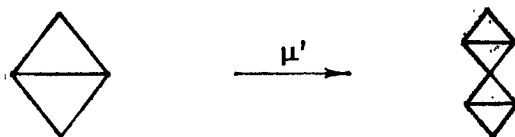


Рис. 6.

Другими словами, отображение μ' «сжимает надстройку SX в ее середине». Отображение $\nu': SX \rightarrow SX$, задающее гомотопически обратный элемент, «переворачивает SX », т. е.

$$\nu'[t, x] = [1-t, x], \quad t \in I, x \in X.$$

Доказательство того факта, что пространство $(SX, *)$, снабженное отображениями μ' и ν' , является H -когруппой, проводится прямыми выкладками. Требуемые гомотопии изображаются теми же самыми схематическими диаграммами, что и гомотопии для ΩY ; лишь интерпретации этих диаграмм несколько различаются.

2.23. Предложение. Соответствие

$$A: [SX, *, Y, y_0] \rightarrow [X, x_0; \Omega Y, \omega_0]$$

является изоморфизмом групп.

Доказательство. Для заданных отображений $f, g: (SX, *) \rightarrow (Y, y_0)$ обозначим через $f \cdot g$ композицию

$$SX \xrightarrow{\mu'} SX \vee SX \xrightarrow{f \vee g} Y \vee Y \xrightarrow{\Delta'} Y.$$

Для заданных отображений $f', g': (X, x_0) \rightarrow (\Omega Y, \omega_0)$ обозначим через $f' * g'$ композицию

$$X \xrightarrow{\Delta} X \times X \xrightarrow{f' \times g'} \Omega Y \times \Omega Y \xrightarrow{\mu} \Omega Y.$$

Мы должны показать, что $(\widehat{f \cdot g}) = \widehat{f} * \widehat{g}$. Но для любых $x \in X$, $t \in I$ мы имеем

$$((\widehat{f \cdot g})(x))(t) = (f \cdot g)[t, x] = \begin{cases} f([2t, x]), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ g([2t-1, x]), & 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$$(f * \widehat{g})(x)(t) = \begin{cases} (\widehat{f}(x))(2t) & 0 \leq t \leq 1/2, \\ (\widehat{g}(x))(2t-1) & 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases} = \begin{cases} f([2t, x]), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ g([2t-1, x]), & 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

что и требовалось. $\square$

Предположим теперь, что (K, k_0) — некоторая H -когруппа, а (L, l_0) — некоторая H -группа. В этом случае существует два способа введения групповой структуры в множестве $[K, k_0; L, l_0]$; будут ли совпадать эти групповые структуры? Ответ оказывается утвердительным, и объяснение этого явления вытекает из следующего общего наблюдения.

2.24. Предложение. Предположим, что на множестве X заданы две операции умножения $\cdot$ и $*$, удовлетворяющие следующим условиям:

i) для операций $\cdot$ и $*$ существует общая двусторонняя единица e , т. е. для всех $x \in X$ выполняются равенства

$$x \cdot e = x * e = x = e * x = e \cdot x;$$

ii) операции $\cdot$ и $*$ взаимно дистрибутивны, т. е. для любых $x, x', y, y' \in X$

$$(x \cdot x') * (y \cdot y') = (x * y) \cdot (x' * y').$$

Тогда операции $\cdot$ и $*$ совпадают и, кроме того, обе они ассоциативны и коммутативны.

Доказательство. Пусть $x, y, z \in X$. Тогда

$$a) \quad x \circ y = (x * e) \circ (e * y) = (x \circ e) * (e \circ y) = x * y.$$

Следовательно, операции $\circ$ и $*$ совпадают. Далее,

$$b) \quad x \circ y = (e * x) \circ (y * e) = (e \circ y) * (x \circ e) = y * x = y \circ x.$$

Таким образом, операция $\circ$ (и, значит, $*$) коммутативна. И, наконец,

$$c) \quad x \circ (y \circ z) = (x * e) \circ (y * z) = (x \circ y) * (e \circ z) = (x \circ y) \circ z.$$

Следовательно, операции $\circ$ и $*$ ассоциативны. $\square$

2.25. Предложение. Если (K, k_0) — некоторая H -когруппа, а (L, l_0) — некоторая H -группа, то обе групповые структуры на $[K, k_0; L, l_0]$ совпадают и являются абелевыми.

Доказательство. Поскольку мы уже установили, что класс постоянного отображения является общей двусторонней единицей, то, согласно предложению 2.24, нам достаточно доказать лишь, что два заданных умножения взаимно дистрибутивны. Пусть μ' — коумножение на K и μ — умножение на L . Мы по-прежнему используем обозначения, введенные при доказательстве предложения 2.23. Покажем, что для любых $f, f', g, g': (K, k_0) \rightarrow (L, l_0)$ имеет место равенство

$$(f \cdot f') * (g \cdot g') = (f * g) \cdot (f' * g').$$

С этой целью рассмотрим следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc}
 K \times K & \xrightarrow{\mu' \times \mu'} & (K \vee K) \times (K \vee K) & \xrightarrow{(f \vee f') \times (g \vee g')} & (L \vee L) \times (L \vee L) & & \\
 \cup & & \cup & & \cup & \searrow \Delta' \times \Delta' & \\
 \Delta(K) & \longrightarrow & K \times k_0 \times K \times k_0 & \longrightarrow & L \times l_0 \times L \times l_0 & \longrightarrow & L \times L \\
 \nearrow \Delta & & \cup k_0 \times K \times k_0 \times K & & \cup l_0 \times L \times l_0 \times L & & \searrow \mu \\
 K & & \downarrow 1 \times T \times 1 & & \downarrow 1 \times T \times 1 & & L \\
 \searrow \mu' & & & & & & \nearrow \Delta' \\
 K \vee K & \xrightarrow{\Delta \vee \Delta} & (K \times K) \vee (K \times K) & \xrightarrow{(f \times g) \vee (f' \times g')} & (L \times L) \vee (L \times L) & \xrightarrow{\mu \vee \mu} & L \vee L.
 \end{array}$$

В этой диаграмме композиция отображений из K в L , включающая верхние строки, представляет собой $(f \cdot f') * (g \cdot g')$, а композиция отображений из K в L , включающая нижние строки, есть $(f * g) \cdot (f' * g')$. Очевидно, что средний квадрат диаграммы коммутативен. И, наконец, без труда проверяется, что коммутативны два крайних пятиугольника. $\square$

Тот факт, что множество $[SX, *; \Omega Y, \omega_0]$ оказывается абелевой группой, воспринимается как неожиданный подарок.

Образуем итерированные пространства петель $\Omega^n Y$, определяя их по индукции: $\Omega^n Y = \Omega(\Omega^{n-1} Y)$, $n \geq 1$, $\Omega^0 Y = Y$. Аналогично определяются итерированные надстройки $S^n X = S(S^{n-1} X)$, $n \geq 1$, $S^0 X = X$. Тогда группа $[SX, *, \Omega Y, \omega_0]$ изоморфна $[X, x_0; \Omega^2 Y, \omega_0]$, а также $[S^2 X, *, Y, y_0]$.

2.26. Предложение. $\Omega^n Y$ является гомотопически коммутативной H -группой для $n \geq 2$. Аналогично, $S^n X$ является гомотопически коммутативной H -когруппой для $n \geq 2$.

Доказательство. Как мы уже знаем, для любого $(X, x_0) \in \mathcal{FT}$ группа

$$[X, x_0; \Omega^n Y, \omega_0] \cong [SX, *, \Omega^{n-1} Y, \omega_0] = [SX, *, \Omega(\Omega^{n-2} Y), \omega_0]$$

абелева. Таким образом, если $[f], [g] \in [X, x_0; \Omega^n Y, \omega_0]$, то $[f] \cdot [g] = [g] \cdot [f]$, т. е. $\mu \cdot (f \times g) \cdot \Delta \simeq \mu \cdot (g \times f) \cdot \Delta$. Возьмем $X = \Omega^n Y \times \Omega^n Y$, $f = p_1$ (проекция на первый сомножитель) и $g = p_2$. Тогда для $(x, y) \in \Omega^n Y \times \Omega^n Y$ мы имеем

$$(f \times g) \cdot \Delta(x, y) = (p_1 \times p_2)((x, y), (x, y)) = (x, y),$$

т. е. $(f \times g) \cdot \Delta = 1_X$. С другой стороны, очевидно $(g \times f) \cdot \Delta(x, y) = (p_2 \times p_1)((x, y), (x, y)) = (y, x) = T(x, y)$, т. е. $(g \times f) \cdot \Delta = T$. Значит мы доказали, что $\mu \simeq \mu \cdot T$, т. е. что умножение μ гомотопически коммутативно. Доказательство того факта, что H -когруппа $S^n X$ гомотопически коммутативна, совершенно аналогично. Конечно, это предложение можно доказать и непосредственно. $\square$

2.27. Лемма. Для любого $n \geq 0$ пространство $S^1 \wedge S^n$ гомеоморфно S^{n+1} .

Доказательство. Мы рассматриваем сферы S^n и S^{n+1} вложенными в $\mathbb{R}^{n+2}$. На самом деле мы используем следующие подмножества в $\mathbb{R}^{n+2}$:

$S^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+2}: \|x\| = 1\}$ — единичная сфера;

$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+2}: \|x\| = 1, x_{n+2} = 0\}$ — экватор;

$D^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+2}: \|x\| \leq 1, x_{n+2} = 0\}$ — диск в экваториальной плоскости;

$H_+^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+2}: \|x\| = 1, x_{n+2} \geq 0\}$ — верхняя полусфера;

$H_-^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+2}: \|x\| = 1, x_{n+2} \leq 0\}$ — нижняя полусфера;

$s_0 = (1, 0, \dots, 0)$ — отмеченная точка.

Существуют очевидные гомеоморфизмы

$$p_+: (D^{n+1}, S^n) \rightarrow (H_+^{n+1}, S^n),$$

$$p_-: (D^{n+1}, S^n) \rightarrow (H_-^{n+1}, S^n),$$

задаваемые формулами

$$p_+(x_1, \dots, x_{n+1}, 0) = \left(x_1, \dots, x_{n+1}, \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2} \right),$$

$$p_-(x_1, \dots, x_{n+1}, 0) = \left(x_1, \dots, x_{n+1}, -\sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2} \right).$$

Если $x \in S^n$, то для каждого $t \in I$ мы имеем $tx + (1-t)s_0 \in D^{n+1}$.

Определим отображение $h: S^1 \wedge S^n \rightarrow S^{n+1}$, полагая

$$h[t, x] = \begin{cases} p_-(2tx + (1-2t)s_0), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ p_+(2(1-t)x + (2t-1)s_0), & 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases} \quad x \in S^n.$$

Здесь мы снова рассматриваем $S^1 \wedge S^n$ как

$$I \times S^n / \{0\} \times S^n \cup I \times \{s_0\} \cup \{1\} \times S^n.$$

Легко видеть, что это отображение корректно определено, биективно и непрерывно. Поскольку оба пространства $S^1 \wedge S^n$ и S^{n+1} компактны, то отсюда следует, что h — гомеоморфизм. $\square$

2.28. Следствие. Для любого $n \geq 0$ пространство $S^n X$ гомеоморфно $S^n \wedge X$.

Доказательство. Так как $S^0 = \{-1, 1\}$, то

$$S^0 \wedge X = \{-1, 1\} \times X / \{1\} \times X \cup \{-1, 1\} \times \{x_0\} \cong \{-1\} \times X \cong X = S^0 X.$$

Предположим, что уже доказан гомеоморфизм $S^n X \cong S^n \wedge X$. Тогда

$$S^{n+1} X = S(S^n X) \cong S(S^n \wedge X) = S^1 \wedge (S^n \wedge X) \cong (S^1 \wedge S^n) \wedge X \cong S^{n+1} \wedge X.$$

Следовательно, по индукции, наше утверждение верно для всех $n \geq 0$. $\square$

Всякий раз, когда в поле зрения алгебраического тополога оказываются группы, его ближайшей заботой является отыскание связывающих их точных последовательностей. Сейчас мы и приступим к построению точных последовательностей гомотопических множеств и групп.

2.29. Пусть (A, a_0) , (B, b_0) , $(C, c_0) = \mathcal{FS}$ и $f: (A, a_0) \rightarrow (B, b_0)$, $g: (B, b_0) \rightarrow (C, c_0)$ — два отображения. Последовательность

$$(A, a_0) \xrightarrow{f} (B, b_0) \xrightarrow{g} (C, c_0)$$

называется *точной*, если $\text{im } f = g^{-1}c_0$. Если A, B, C — группы с единичными элементами a_0, b_0, c_0 соответственно и если f, g — гомоморфизмы, то последовательность точна в обычном для групп смысле (т. е. $\text{im } f = \ker g$) тогда и только тогда, когда она точна

как последовательность множеств. Длинная последовательность

$$(A_1, a_1) \xrightarrow{f_1} (A_2, a_2) \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_r} (A_{r+1}, a_{r+1})$$

называется *точной*, если каждая из коротких последовательностей

$$(A_{k-1}, a_{k-1}) \xrightarrow{f_{k-1}} (A_k, a_k) \xrightarrow{f_k} (A_{k+1}, a_{k+1}), \quad 2 \leq k \leq r,$$

точна.

2.30. Определение. Последовательность

$$(X, x_0) \rightarrow (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$$

в $\mathcal{FT}$ называется *коточной*, если для каждого $(W, \omega_0) \in \mathcal{FT}$ точна в смысле определения 2.29 последовательность пунктированных множеств

$$[X, x_0; W, \omega_0] \xrightarrow{f^*} [Y, y_0; W, \omega_0] \xrightarrow{g^*} [Z, z_0; W, \omega_0].$$

(Здесь мы используем для $F_W^*(f)$ более короткое обозначение f^* ; в дальнейшем мы часто будем прибегать к сокращениям такого рода.)

Покажем теперь, что любое отображение $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ из категории $\mathcal{FT}$ может быть включено в коточную последовательность

$$(X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \xrightarrow{g} (Z, z_0)$$

при подходящем выборе пространства (Z, z_0) и отображения g .

2.31. Определение. Для любого пространства $(X, x_0) \in \mathcal{FT}$ определим *конус* $(CX, *) \in \mathcal{FT}$ над X как приведенное произведение

$$(CX, *) = (I \wedge X, *),$$

где в качестве отмеченной точки отрезка I взята точка 0. Более подробно, CX — это факторпространство

$$CX = I \times X / \{0\} \times X \cup I \times \{x_0\}.$$

Как и в случае надстройки, обозначим через $[t, x]$ образ точки $(t, x) \in I \times X$ в CX . Отображение $i: X \rightarrow CX$, определенное формулой $i(x) = [1, x]$, $x \in X$, задает гомеоморфизм пространства X на образ $\text{im } i$, поэтому мы можем отождествить X с $\text{im } i$ и считать X подпространством конуса CX . Отметим, что

$$CX/X \cong SX.$$

2.32. Предложение. Отображение $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ гомотопно $\text{rel } x_0$ постоянному отображению (нульгомотопно) тогда и только тогда, когда оно продолжается до отображения

$$g: (CX, *) \rightarrow (Y, y_0).$$

Доказательство. Предположим, что f гомотопно $\text{rel } x_0$ постоянному отображению y_0 . Пусть $H: X \times I \rightarrow Y$ — гомотопия

между y_0 и f . Если определить отображение $h: I \times X \rightarrow Y$ формулой $h(t, x) = H(x, t)$, то $h(\{0\} \times X \cup I \times \{x_0\}) = y_0$. Следовательно, h индуцирует отображение $g: CX \rightarrow Y$, удовлетворяющее условиям $g[1, x] = h(1, x) = H_1(x) = f(x)$ для всех $x \in X$. А это означает, что $g|X = f$.

Обратно, предположим, что задано продолжение $g: (CX, *) \rightarrow (Y, y_0)$ отображения f . Обозначим через $H: X \times I \rightarrow Y$ композицию

$$X \times I \xrightarrow{f} I \times X \xrightarrow{q} CX \xrightarrow{g} Y,$$

где q — естественная проекция. Тогда $H_0(x) = g([0, x]) = y_0$, $H_1(x) = g[1, x] = f(x)$ для всех $x \in X$ и $H(x_0, t) = g[t, x_0] = y_0$ для всех $t \in I$. Следовательно, H является требуемой гомотопией $\text{rel } x_0$ между отображениями y_0 и f . $\square$

2.33. Для данного отображения $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ в $\mathcal{FT}$ построим конус отображения $Y \cup_f CX$ следующим образом: $Y \cup_f CX$ получается из $Y \vee CX$ отождествлением $[1, x] \in CX$ с $f(x) \in Y$ для всех $x \in X$. Неформально, мы приклеиваем основание конуса CX к пространству Y при помощи отображения f . Ясно, что проекция $q: Y \vee CX \rightarrow Y \cup_f CX$ определяет гомеоморфизм между пространствами Y и $q(Y)$, поэтому мы можем рассматривать Y как подпространство в $Y \cup_f CX$.

2.34. Предложение. Для любого отображения $g: (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$ соотношение $g \circ f \simeq z_0$ выполняется тогда и только тогда, когда g обладает продолжением

$$h: (Y \cup_f CX, *) \rightarrow (Z, z_0).$$

Доказательство получается очевидным обобщением доказательства предложения 2.32. $\square$

2.35. Предложение. Для любого отображения $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ из категории $\mathcal{FT}$ последовательность

$$(X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \xrightarrow{j} (Y \cup_f CX, *),$$

где j — очевидное включение, точна.

Доказательство. Мы должны показать, что для любого пространства $(W, w_0) \in \mathcal{FT}$ последовательность множеств

$$[X, x_0; \cdot, w_0] \xrightarrow{f} [Y, y_0; W, w_0] \xrightarrow{j} [Y \cup_f CX, *; W, w_0]$$

точна. Прежде всего заметим, что поскольку включение $j: Y \rightarrow Y \cup_f CX$ продолжается до $1_{Y \cup_f CX}: Y \cup_f CX \rightarrow Y \cup_f CX$, то $j \circ f \simeq *$. Следовательно, $j^* \circ f^* = (j \circ f)^* = *$, т. е. $\text{im } j^* \subset f^{*-1}(*)$. Предположим теперь, что элемент $[h] \in [Y, y_0; W, w_0]$ лежит в $f^{*-1}(*)$, т. е. $h \circ f \simeq *$. Согласно предложению 2.34, отсюда вытекает, что h продолжается до отображения $h': Y \cup_f CX \rightarrow W$. Но тогда $j^*[h'] = [h' \circ j] = [h]$, так что $[h] \in \text{im } j^*$. $\square$

Процедуру перехода к конусу отображения можно итерировать.

2.36. Лемма. Для любого отображения $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ категории $\mathcal{PT}$ последовательность

$$(X, x_0) \xrightarrow{l} (Y, y_0) \xrightarrow{l} (Y \cup_f CX, *) \xrightarrow{k} ((Y \cup_f CX) \cup_j CY, *) \xrightarrow{l} \\ ((Y \cup_f CX) \cup_j CY) \cup_k C(Y \cup_f CX, *),$$

где j, k, l — очевидные включения, точна.

Доказательство. Мы должны проверить точность для пар (f, j) , (j, k) , (k, l) . Но каждая из этих пар имеет вид

$$(U, u_0) \xrightarrow{\phi} (V, v_0) \xrightarrow{l} (V \cup_{\phi} CU, *)$$

для подходящих U, V, ϕ . Поэтому данная лемма следует из предложения 2.35. $\square$

Фигурирующие в лемме пространства

$$(Y \cup_f CX) \cup_j CY \quad \text{и} \quad ((Y \cup_f CX) \cup_j CY) \cup_k C(Y \cup_f CX)$$

представляются довольно нескладными. Оказывается, что их можно заменить гомотопически эквивалентными пространствами, работать с которыми гораздо удобнее. Прежде всего отметим, что если в $(Y \cup_f CX) \cup_j CY$ сжать в точку подпространство CY , то результирующее пространство $(Y \cup_f CX) \cup_j CY/CY$ будет гомеоморфно SX . Аналогично

$$((Y \cup_f CX) \cup_j CY) \cup_k C(Y \cup_f CX)/C(Y \cup_f CX) \cong SY.$$

Нам хотелось бы, чтобы этот процесс сжатия не изменял гомотопического типа объемлющих пространств. Покажем, что это действительно так.

2.37. Лемма. Для любого отображения $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ проекция

$$q: (Y \cup_f CX) \cup_j CY \rightarrow (Y \cup_f CX) \cup_j CY/CY$$

является гомотопической эквивалентностью.

Доказательство. Пусть $Z = (Y \cup_f CX) \cup_j CY$. Пространство Z получается из $CX \vee CY$ отождествлением точек $[1, x] \in CX$ с точками $[1, fx] \in CY$ для каждого $x \in X$. Определим отображение $H: Z \times I \rightarrow Z$, полагая

$$H([s, y], t) = [(1-t)s, y], \quad s, t \in I, y \in Y, \\ H([s, x], t) = \begin{cases} [(1+t)s, x], & 0 \leq s \leq 1/(1+t), \\ [2 - (1+t)s, fx], & 1/(1+t) \leq s \leq 1, \end{cases} \quad t \in I, x \in X.$$

Получающееся таким образом отображение H непрерывно и $H_0 = 1_Z$, $H_1(CY) = *$. Поэтому H_1 индуцирует такое отображение $r: Z/CY \rightarrow Z$, что $r \cdot q = H_1$. Ясно, что $r \cdot q \simeq 1_Z \text{ rel } *$. Заметим также, что $H_t(CY) \subset CY$ для каждого $t \in I$, и поэтому $q \cdot H_t(CY) = *$ в Z/CY при любых t . Согласно предложению 0.8 композиция $q \cdot H$ индуцирует такое отображение $\bar{H}: Z/CY \times I \rightarrow Z/CY$, что $\bar{H} \cdot (q \times 1) = q \cdot H$. Тогда для каждого $z \in Z$ мы имеем $\bar{H}_0(q(z)) = q \cdot H_0(z) = q(z)$. Поскольку проекция q сюръективна, то $\bar{H}_0 = 1_{Z/CY}$. Аналогично доказывается, что $\bar{H}_1(q(z)) = q \cdot H_1(z) =$

$q \circ r \circ q(z)$. Таким образом, $\bar{H}$ является гомотопией $\text{rel} *$, связывающей 1 и $q \circ r$. Другими словами, отображение r служит гомотопически обратным для q , так что q — гомотопическая эквивалентность. $\square$

Из леммы 2.37 вытекает также, что естественная проекция

$$q': ((Y \cup_f CX) \cup_j CY) \cup_k C(Y \cup_f CX) \rightarrow ((Y \cup_f CX) \cup_j CY) \cup_k C(Y \cup_f CX) / C(Y \cup_f CX)$$

является гомотопической эквивалентностью.

2.38. Предложение Пусть A — подпространство пространства X и $i: A \rightarrow X$ — естественное включение. Тогда $X \cup_i CA / CA$ гомеоморфно X/A .

Доказательство. Пусть $q: X \cup_i CA \rightarrow X \cup_i CA / CA$ — проекция и $j: X \rightarrow X \cup_i CA$ — вложение. Тогда $q \circ j(A) = *$ и, значит, $q \circ j$ индуцирует такое отображение $\phi: X/A \rightarrow X \cup_i CA / CA$, что $\phi \circ p = q \circ j$ (здесь через p обозначена проекция $p: X \rightarrow X/A$). С другой стороны, можно определить отображение $k: X \vee CA \rightarrow X/A$, полагая $k|_X = p$, $k|_{CA} = *$. Отображение k пропускается через $X \cup_i CA$ и задает тем самым отображение $\bar{k}: X \cup_i CA \rightarrow X/A$. Ясно, что $\bar{k}(CA) = *$, поэтому $\bar{k}$, в свою очередь, индуцирует отображение

$$\psi: X \cup_i CA / CA \rightarrow X/A.$$

Легко видеть, что $\phi \circ \psi = 1$, $\psi \circ \phi = 1$. $\square$

В частности,

$$\begin{aligned} (Y \cup_f CX) \cup_j CY / CY &\cong Y \cup_f CX / Y \cong CX / X \cong SX, \\ ((Y \cup_f CX) \cup_j CY) \cup_k C(Y \cup_f CX) / C(Y \cup_f CX) &\cong \\ &\cong (Y \cup_f CX) \cup_j CY / Y \cup_f CX \cong CY / Y \cong SY. \end{aligned}$$

Комбинируя эти гомеоморфизмы с гомотопическими эквивалентностями, доказанными в лемме 2.37, мы получаем гомотопические эквивалентности

$$\begin{aligned} \bar{q}: (Y \cup_f CX) \cup_j CY &\rightarrow SX, \\ \bar{q}': ((Y \cup_f CX) \cup_j CY) \cup_k C(Y \cup_f CX) &\rightarrow SY. \end{aligned}$$

В действительности мы получаем, что следующая диаграмма коммутативна с точностью до гомотопии:

2.39.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \xrightarrow{j} \\ & \searrow v' \circ k' & \downarrow v' \circ \bar{q} \\ Y \cup_f CX & \xrightarrow{k} (Y \cup_f CX) \cup_j CY \xrightarrow{l} ((Y \cup_f CX) \cup_j CY) \cup_k C(Y \cup_f CX) & \\ & \searrow Sf & \downarrow \bar{q}' \\ & SX & \longrightarrow SY \end{array}$$

Здесь $k' = \bar{q} \cdot k$ рассматривается как композиция $Y \cup_f CX \rightarrow Y \cup_f CX / Y \cong SX$, а $v': SX \rightarrow SX$ — гомотопическое обращение в H -когруппе (см. п. 2.22). Замечая, что верхняя строка в диаграмме 2.39 кочотчна, мы получаем следующий результат.

2.40. Лемма. Для любого отображения $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ последовательность

$$(X, x_0) \perp (Y, y_0) \perp (Y \cup_f CX, *) \xrightarrow{k'} (SX, *) \xrightarrow{Sf} (SY, *)$$

кочотчна.

Доказательство. Для любого пространства $(W, w_0) \in \mathcal{PT}$ отображения $\bar{q}^*$, $\bar{q}'^*$, v'^* биективны. $\square$

2.41. Теорема. Для любого отображения $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ последовательность

$$(X, x_0) \perp (Y, y_0) \perp (Y \cup_f CX, *) \xrightarrow{k'} (SX, *) \xrightarrow{Sf} (SY, *) \xrightarrow{Sf} \dots \rightarrow (S^n X, *) \xrightarrow{S^n f} (S^n Y, *) \xrightarrow{S^n f} (S^n (Y \cup_f CX), *) \xrightarrow{S^n k'} \dots$$

кочотчна.

Доказательство. Пусть $(W, w_0) \in \mathcal{PT}$. Мы должны проверить точность длинной последовательности гомотопических множеств. Каждая возможная пара соседних морфизмов будет появляться в последовательности вида

$$\begin{aligned} [S^n X, *; W, w_0] &\xrightarrow{S^n f^*} [S^n Y, *; W, w_0] \xrightarrow{S^n j^*} \\ &[S^n (Y \cup_f CX), *; W, w_0] \xleftarrow{S^n k'^*} \\ &[S^{n+1} X, *; W, w_0] \xleftarrow{S^{n+1} f^*} [S^{n+1} Y, *; W, w_0] \end{aligned}$$

для некоторого $n \geq 0$. Опуская для краткости обозначения отмеченных точек, мы получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} [S^n X; W] & \xleftarrow{S^n f^*} & [S^n Y; W] & \xleftarrow{S^n j^*} & [S^n (Y \cup_f CX); W] \\ \cong \downarrow A^n & & \cong \downarrow A^n & & \cong \downarrow A^n \\ [X; \Omega^n W] & \xleftarrow{f^*} & [Y; \Omega^n W] & \xleftarrow{j^*} & [Y \cup_f CX; \Omega^n W] \\ & & & \xleftarrow{S^n k'^*} & [S^{n+1} X; W] \xleftarrow{S^{n+1} f^*} [S^{n+1} Y; W] \\ & & & \cong \downarrow A^n & \cong \downarrow A^n \\ & & & \xleftarrow{k'^*} & [SX; \Omega^n W] \xleftarrow{Sf^*} [SY; \Omega^n W]. \end{array}$$

Нижняя строка в этой диаграмме точна и, следовательно, точна верхняя строка, что и утверждалось. $\square$

Разумеется, часть последовательности

$$[X, x_0; W, \omega_0] \xrightarrow{f^*} [Y, y_0; W, \omega_0] \xrightarrow{f^*} [Y \cup_f CX, *; W, \omega_0] \xrightarrow{h'^*} [SX, *; W, \omega_0] \xrightarrow{f'^*} [SY, *; W, \omega_0] \leftarrow \dots,$$

расположенная справа от члена $[SX, *; W, \omega_0]$, точно как последовательность групп. Слева от $[SX, *; W, \omega_0]$ она точна как последовательность пунктированных множеств. Однако в члене $[Y \cup_f CX, *; W, \omega_0]$ можно ввести несколько более сильное условие точности. Именно, на множестве $[Y \cup_f CX, *; W, \omega_0]$ можно задать такое действие группы $[SX, *; W, \omega_0]$, что множества $j_*^{-1}x$, $x \in [Y, y_0; W, \omega_0]$, представляют собой орбиты этого действия.

2.42. Определение. Говорят, что группа G *действует* (слева) на множестве A , если задано отображение $\alpha: G \times A \rightarrow A$, для которого коммутативны следующие диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} \text{i)} & A & \xrightarrow{(e, 1)} G \times A \\ & \searrow 1 & \downarrow \alpha \\ & & A \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} \text{ii)} & G \times G \times A & \xrightarrow{1 \times \alpha} G \times A \\ & \downarrow \mu \times 1 & \downarrow \alpha \\ & G \times A & \xrightarrow{\alpha} A. \end{array}$$

Здесь $\mu: G \times G \rightarrow G$ — умножение в группе G , $(e, 1)(x) = (e, x)$ для всех $x \in A$, e — единичный элемент группы G . Орбитами данного действия называются множества вида $Gx = \{gx: g \in G\}$ для $x \in A$.

2.43. Определение. Говорят, что H -когруппа (K, k_0, μ') *кодействует* на пространстве (X, x_0) , если существует отображение *кодействия* $\alpha': X \rightarrow K \vee X$, для которого коммутативны с точностью до гомотопии следующие диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} \text{i)} & X & \xleftarrow{(x_0, 1)} K \vee X \\ & \nwarrow 1 & \uparrow \alpha' \\ & & X, \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \text{ii)} & K \vee K \vee X & \xleftarrow{1 \vee \alpha'} K \vee X \\ & \uparrow \mu' \vee 1 & \uparrow \alpha' \\ & K \vee X & \xleftarrow{\alpha'} X. \end{array}$$

Следующее утверждение очевидно.

2.44. Предложение. Если H -когруппа (K, k_0, μ') кодействует на пространстве (X, x_0) и α' — отображение кодействия, то для любого пространства (W, ω_0) существует естественное действие группы $[K, k_0; W, \omega_0]$ на множестве $[X, x_0; W, \omega_0]$, задаваемое формулой

$$\alpha([f], [g]) = [\Delta' \cdot (f \vee g) \cdot \alpha']$$

для $f: (K, k_0) \rightarrow (W, \omega_0)$, $g: (X, x_0) \rightarrow (W, \omega_0)$.

2.45. В дальнейшем нашим основным примером будет отображение

$$\alpha': Y \cup_i CX \rightarrow SX \vee (Y \cup_i CX),$$

определяемое следующим образом:

$$\alpha'(y) = (*, y),$$

$$\alpha'[t, x] = \begin{cases} ([2t, x], *) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ (*, [2t-1, x]) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}, \quad x \in X.$$

Схематически это отображение выглядит так:

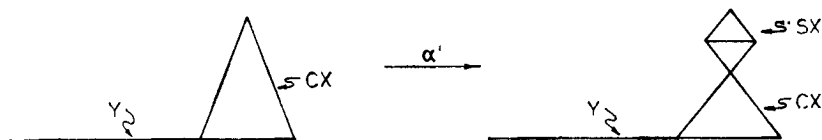


Рис. 7.

2.46. Лемма. Отображение α' является кодействием и обладает следующими свойствами:

$$i) \alpha' \cdot j = (*, j), \quad ii) \mu' \cdot k' = (1 \vee k') \cdot \alpha'.$$

Доказательство почти очевидно. $\square$

Пусть заданы два отображения $f_1: Y \cup_i CX \rightarrow W$, $f_2: Y \cup_i CX \rightarrow W$, таких, что $f_1|_Y = f_2|_Y$. Тогда можно построить новое отображение $d(f_1, f_2): SX \rightarrow W$, которое определяется формулой

$$d(f_1, f_2)[t, x] = \begin{cases} f_1[2t, x], & 0 \leq t \leq 1/2, \\ f_2[2-2t, x], & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Ясно, что если $f_1 \simeq f'_1 \text{ rel } Y$, $f_2 \simeq f'_2 \text{ rel } Y$, то $d(f_1, f_2) \simeq d(f'_1, f'_2)$.

2.47. Лемма. Для любых двух таких отображений $f_1, f_2: Y \cup_i CX \rightarrow W$, что $f_1|_Y = f_2|_Y$, имеем

$$\Delta' \cdot (d(f_1, f_2) \vee f_2) \cdot \alpha' \simeq f_1,$$

$$m. e. [d(f_1, f_2)] \cdot [f_2] = [f_1].$$

Доказательство.

$$\Delta' \cdot (d(f_1, f_2) \vee f_2) \cdot \alpha'(y) = f_2(y) = f_1(y), \quad y \in Y,$$

$$\Delta' \cdot (d(f_1, f_2) \vee f_2) \cdot \alpha'[t, x] = \begin{cases} f_1[4t, x], & 0 \leq t \leq 1/4, \\ f_2[2-4t, x], & 1/4 \leq t \leq 1/2, \\ f_2[2t-1, x], & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Определим отображение $H: (Y \cup_f CX) \times I \rightarrow W$, полагая

$$H(y, t) = f_1(y),$$

$$H([s, x], t) = \begin{cases} f_1[(4-3t)s, x], & 0 \leq s \leq \frac{1}{4-3t}, \\ f_2\left[\frac{4-t-(2-t)(4-3t)s}{2}, x\right], & \frac{1}{4-3t} \leq s \leq \frac{1}{2-t}, \\ f_2[(2-t)s + t-1, x], & \frac{1}{2-t} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Тогда $H_0 = \Delta' \cdot (d(f_1, f_2) \vee f_2) \cdot \alpha'$, $H_1 = f_1$. $\square$

2.48. Предложение. Пусть $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ — произвольное отображение. Тогда для любого пространства $(W, \omega_0) \in \mathcal{FT}$ существует такое естественное действие группы $[SX; *; W, \omega_0]$ на множестве $[Y \cup_f CX, *; W, \omega_0]$, что отображения в точной последовательности

$$[X; W] \xrightarrow{f_*} [Y; W] \xrightarrow{j_*} [Y \cup_f CX; W] \xrightarrow{k'^*} [SX; W] \xrightarrow{Sf_*} [SY; W]$$

удовлетворяют следующим условиям:

- i) для $x_1, x_2 \in [Y \cup_f CX; W]$ равенство $j^*x_1 = j^*x_2$ выполняется тогда и только тогда, когда существует $\theta \in [SX; W]$ с $\theta x_2 = x_1$;
- ii) для $y_1, y_2 \in [SX; W]$ имеем $k'^*(y_1 + y_2) = y_1 \cdot k'^*(y_2)$;
- iii) для $y_1, y_2 \in [SX; W]$ равенство $k'^*y_1 = k'^*y_2$ выполняется тогда и только тогда, когда существует такой $\gamma \in [SY; W]$, что $y_2 = y_1 + Sf^*(\gamma)$;
- iv) $k'^*(y) = y \cdot [w_0]$ для всех $y \in [SX; W]$.

Доказательство. i) Предположим, что x_1, x_2 представлены отображениями $f_1, f_2: Y \cup_f CX \rightarrow W$ и $j^*x_1 = j^*x_2$. Тогда

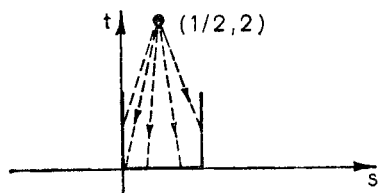


Рис. 8.

$f_2|Y \simeq f_1|Y$. Обозначим через H гомотопию, связывающую $f_1|Y$ и $f_2|Y$. Продолжим ее до гомотопии $\bar{H}: (Y \cup_f CX) \times I \rightarrow W$ с $\bar{H}_0 = f_2$. Это можно сделать следующим образом. Пусть $r: I \times I \rightarrow I \times \{0\} \cup \{0, 1\} \times I$ — некоторая ретракция, скажем, проекция из

точки $(1/2, 2)$ (рис. 8). Определим отображение $F: Y \times I \cup (Y \cup_f CX) \times \{0\} \rightarrow W$, полагая $F|Y \times I = H$ и $F|(Y \cup_f CX) \times \{0\} = f_2$. Теперь требуемая гомотопия $\bar{H}$ задается формулами

$$\bar{H}(y, t) = F(y, t),$$

$$\bar{H}([s, x], t) = F([\pi_1 r(s, t), x], \pi_2 r(s, t)),$$

где $\pi_i: I \times I \rightarrow I$, $i = 1, 2$, — проекции соответственно на первый и второй сомножители. Очевидно, что $\bar{H}_0 = f_2$. Таким образом,

$f_2' = \bar{H}$, является еще одним представителем для x_2 , и $f_2' \mid Y = f_1 \mid Y$. Тогда мы имеем $x_1 = [d(f_1, f_2')] \cdot [f_2'] = \theta x_2$ для $\theta = [d(f_1, f_2')] \in [SX; W]$. С другой стороны, если $[g] \in [SX; W]$, то

$$j^*([g]x_1) = j^*[\Delta' \cdot (g \vee f_1) \cdot \alpha'] = [\Delta' \cdot (g \vee f_1) \cdot \alpha' \cdot j] = \\ [\Delta' \cdot (g \vee f_1) \cdot (*, j)] = [f_1 \cdot j] = j^*x_1.$$

ii) Предположим, что $y_1, y_2 \in [SX; W]$ представлены соответственно отображениями $f_1: SX \rightarrow W$ и $f_2: SX \rightarrow W$. Тогда элемент $k'^*(y_1 + y_2)$ представляется как

$$[\Delta' \cdot (f_1 \vee f_2) \cdot \mu' \cdot k'] = [\Delta' \cdot (f_1 \vee f_2) \cdot (1 \vee k') \cdot \alpha'] = y_1 \cdot k'^*(y_2).$$

iii) Из свойства ii) следует, что если $k'^*(y_1) = k'^*(y_2)$, то

$$[w_0] = k'^*(-y_1 + y_1) = (-y_1) \cdot k'^*(y_1) = (-y_1) k'^*(y_2) = \\ k'^*(-y_1 + y_2).$$

Это показывает, что существует такой элемент $\gamma \in [SY; W]$, что $Sf^*(\gamma) = -y_1 + y_2$, т. е. $y_2 = y_1 + Sf^*(\gamma)$. С другой стороны, для любого γ

$$k'^*(y_1 + Sf^*(\gamma)) = y_1 \cdot k'^*(Sf^*(\gamma)) = y \cdot [w_0] = k'^*(y_1 + 0) = k'^*(y_1).$$

iv) Для $y \in [SX; W]$ имеем $k'^*(y) = k'^*(y + 0) =$

$$y \cdot k'^*(0) = y \cdot [w_0]. \quad \square$$

Теперь мы займемся дуализацией результатов пп. 2.30 — 2.48. Возможность этого после всего изложенного выше представляется совершенно естественной. Более того, по-видимому, читатель был бы очень удивлен и разочарован, если бы оказалось, что какие-то из результатов, двойственные к 2.30 — 2.48, неверны.

2.49. Последовательность

$$(X, x_0) \xrightarrow{L} (Y, y_0) \xrightarrow{R} (Z, z_0)$$

из категории $\mathcal{FT}$ называется *точной* (в топологическом смысле), если для каждого пространства $(W, w_0) \in \mathcal{FT}$ точна последовательность пунктированных множеств

$$[W, w_0; X, x_0] \xrightarrow{L_*} [W, w_0; Y, y_0] \xrightarrow{R_*} [W, w_0; Z, z_0].$$

З а м е ч а н и е. К сожалению, понятие точности в категории $\mathcal{FT}$ не совпадает с этим понятием в категории $\mathcal{FS}$, определенным в п. 2.29. Однако и то и другое использование термина «точный» общепотребительно в литературе. Поэтому остается надеяться, что в настоящей книге из контекста всегда будет ясно, в каком смысле употреблен этот термин.

2.50. Обозначим через PY пространство $(Y, y_0)^{(1,0)}$ путей, начинающихся в точке y_0 . Легко видеть, что экспоненциальный закон задает взаимно однозначное соответствие

$$[CX, *, Y, y_0] \leftrightarrow [X, x_0; PY, w_0].$$

Отображение $p: PY \rightarrow Y$, определенное формулой $p(\omega) = \omega(1)$, непрерывно. Заметим, что $p^{-1}(y_0) = \Omega Y$. Двойственным к предложению 2.32 является следующее утверждение.

2.51. Предложение. *Отображение $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ нульгомотопно тогда и только тогда, когда оно обладает таким поднятием $g: (X, x_0) \rightarrow (PY, \omega_0)$, что $p \circ g = f$.*

2.52. По данному отображению $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$, определим пространство P_f , полагая $P_f = \{(x, \omega) \in X \times PY: f(x) = p(\omega) = \omega(1)\} \subset X \times PY$. Ясно, что отображение $\pi: P_f \rightarrow X$, определенное формулой $\pi(x, \omega) = x$, непрерывно.

Двойственным к предложению 2.34 служит следующее

2.53. Предложение. *Для любого отображения $g: (Z, z_0) \rightarrow (X, x_0)$ соотношение $f \circ g \simeq y_0$ выполнено тогда и только тогда, когда g обладает поднятием $h: (Z, z_0) \rightarrow (P_f, *)$, для которого $\pi \circ h = g$.*

2.54. Предложение. *Для любого отображения $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ в категории $\mathcal{FT}$ последовательность*

$$(P_f, *) \xrightarrow{\pi} (X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0)$$

точна.

2.55. Лемма. *Для любого отображения $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ в категории $\mathcal{FT}$ последовательность*

$$(P_\rho, \omega_0) \xrightarrow{\sigma} (P_\pi, \omega_0) \xrightarrow{\rho} (P_f, *) \xrightarrow{\pi} (X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0),$$

где π, ρ, σ — естественные проекции, точна.

Как и ранее, отождествим P_π и P_ρ с более привычными пространствами, именно, с пространствами петель ΩY и ΩX соответственно.

2.56. Лемма. *Для любого $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ отображение $q: \Omega Y \rightarrow P_\pi$, определенное формулой $q(\omega) = (x_0, \omega, \omega_0)$, является гомотопической эквивалентностью.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что

$$P_\pi = \{(x, \omega, \omega') \in X \times PY \times PX: f(x) = \omega(1), x = \omega'(1)\}.$$

Поэтому $q(\omega)$ принадлежит P_π для всех $\omega \in \Omega Y$. Определим теперь еще три отображения

$$r: P_\pi \rightarrow \Omega Y,$$

$$H: \Omega Y \times I \rightarrow \Omega Y,$$

$$K: P_\pi \times I \rightarrow P_\pi,$$

полагая

$$r(x, \omega, \omega') = \omega \times (f \circ \omega')^{-1}, (x, \omega, \omega') \in P_\pi,$$

$$H(\omega, t)(s) = \begin{cases} \omega\left(\frac{2s}{t+1}\right), & 0 \leq s \leq \frac{t+1}{2}, \\ y_0, & \frac{t+1}{2} \leq s \leq 1, \end{cases}$$

$$K(x, \omega, \omega', t) = (\omega'(t), \alpha(\omega, \omega', t), \omega'_t),$$

где $\omega'_t(s) = \omega'(st)$, $s, t \in I$, $\omega' \in PX$ и

$$\alpha(\omega, \omega', t)(s) = \begin{cases} \omega(s(2-t)), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2-t}, \quad t \in I, \quad \omega \in PY, \\ f \circ \omega'(s(t-2) + 2), & \frac{1}{2-t} \leq s \leq 1, \quad \omega' \in PX. \end{cases}$$

Нетрудно показать, что отображения r, H, K непрерывны. Кроме того, очевидно, что $H_0 = r \circ q$, $H_1 = 1_{\Omega Y}$, $K_0 = q \circ r$ и $K_1 = 1_{P_\pi}$. Следовательно, r является гомотопически обратным к отображению q . $\square$

Из диаграммы 2.39 следует, что отображение $q': \Omega X \rightarrow P_\rho$, определенное формулой $q'(\omega) = (x_0, \omega_0, \omega, \omega_0)$, является гомотопической эквивалентностью. Кроме того, диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} P_\rho & \xrightarrow{\sigma} & P_\pi & \xrightarrow{\rho} & P_f & \xrightarrow{\pi} & X \xrightarrow{f} Y \\ 2.57. \quad q' \uparrow & & q \circ v \uparrow & \nearrow & \rho' \circ v & & \\ \Omega X & \xrightarrow{\Omega f} & \Omega Y & & & & \end{array}$$

в которой $\rho' = \rho \circ q$ (т. е. $\rho'(\omega) = (x_0, \omega)$), а $v: \Omega X \rightarrow \Omega X$ — гомотопическое обращение в H -группе ΩX , коммутативна с точностью до гомотопии. Поскольку верхняя строка диаграммы 2.57 точна, мы получаем следующее утверждение.

2.58. Лемма. Для любого отображения $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ последовательность

$$(\Omega X, \omega_0) \xrightarrow{\Omega f} (\Omega Y, \omega_0) \xrightarrow{\rho'} (P_f, *) \xrightarrow{\pi} (X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0)$$

точна.

2.59. Теорема. Для любого отображения $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ последовательность

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow (\Omega^n P_f, \omega_0) \xrightarrow{\Omega^n \pi} (\Omega^n X, \omega_0) \xrightarrow{\Omega^n f} (\Omega^n Y, \omega_0) \rightarrow \dots \\ (\Omega X, \omega_0) \xrightarrow{\Omega f} (\Omega Y, \omega_0) \xrightarrow{\rho'} (P_f, *) \xrightarrow{\pi} (X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \end{aligned}$$

точна.

Аналогично можно сформулировать двойственные понятия и утверждения для 2.43 — 2.48.

В заключение главы обратим внимание читателя на одно из важнейших понятий теории гомотопий — понятие гомотопической группы.

2.60. Определение. Для любого пунктированного пространства (X, x_0) мы уже определили пунктированное множество $\pi_0(X, x_0)$. Если $n \geq 1$, определим n -мерную гомотопическую группу $\pi_n(X, x_0)$ пространства (X, x_0) , полагая

$$\pi_n(X, x_0) = \pi_0(\Omega^n X, \omega_0).$$

Согласно предложению 2.3, мы можем рассматривать $\pi_0(Y, y_0)$ как множество $[S^0, +1; Y, y_0]$, поэтому имеют место следующие изоморфизмы:

$$\pi_n(X, x_0) = \pi_0(\Omega^n X, \omega_0) = [S^0, +1; \Omega^n X, \omega_0] \cong [S^1, s_0; \Omega^{n-1} X, \omega_0] \cong [S^2, s_0; \Omega^{n-2} X, \omega_0] \cong \dots \cong [S^n, s_0; X, x_0].$$

Таким образом, можно определить $\pi_n(X, x_0)$ как множество гомотопических классов отображений $(S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$. Из этого определения непосредственно вытекает, что $\pi_n(X, x_0)$ — группа для $n \geq 1$ и даже абелева группа для $n \geq 2$. В главах 3, 4 и 6 мы изучим свойства этих групп.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Гомотопические множества $[X, Y]$ и $[X, x_0; Y, y_0]$ впервые систематически изучались М. Барратом в [20]. В частности, в этой работе он ввел точную последовательность

$$[X, W] \xleftarrow{*} [Y, W] \leftarrow [Y \cup_i CX; W] \leftarrow [SX; W] \leftarrow \dots$$

Исчерпывающее изучение этой последовательности и ее свойств было проведено Пуппе [64] (в связи с чем она получила название «последовательности Пуппе»). Описанная в этой главе двойственность (например, между CX и PY , между $Y \cup_i CX$ и P_i и т. д.) была впервые систематически исследована Экманом и Хилтоном (см., например, их работу в *C. R. Acad. Sci., Paris*, 1958, 246, p. 2444—2447). Часто эту двойственность называют двойственностью Экмана — Хилтона ¹⁾.

ССЫЛКИ НА ЛИТЕРАТУРУ

1. Баррат [20].
2. Пуппе [64].

¹⁾ См. также работу Д. Б. Фукса [9*]. — *Прим. ред.*

В этой главе мы докажем некоторые простейшие свойства гомотопических групп. Затем мы построим относительные гомотопические группы $\pi_n(X, A, x_0)$ пунктированной топологической пары $x_0 \in A \subset X$, а также длинную точную последовательность, связывающую эти группы с группами $\pi_n(A, x_0)$ и $\pi_n(X, x_0)$. И, наконец, мы изучим связь между группами $\pi_n(X, x_0)$ и $\pi_n(X, x_1)$ для различных отмеченных точек.

3.1. Установим прежде всего, что π_n является функтором из категории $\mathcal{PT}'$ в категорию групп $\mathcal{G}$, $n \geq 1$ (и даже в категорию абелевых групп $\mathcal{A}$, если $n \geq 2$). Любому (непрерывному) отображению $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ отвечает отображение

$$\pi_0(\Omega^n f): \pi_0(\Omega^n X, \omega_0) \rightarrow \pi_0(\Omega^n Y, \omega_0),$$

задающее гомоморфизм $\pi_n(f): \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$. На самом деле Ω^n есть функтор из $\mathcal{PT}'$ в $\mathcal{PT}'$ ($f \simeq f' \Rightarrow \Omega^n f \simeq \Omega^n f'$), а π_0 — функтор из $\mathcal{PT}'$ в $\mathcal{G}$, принимающий на $\text{im } \Omega^n$ значения в категории групп. Поскольку композиция двух функторов есть функтор, то $\pi_n = \pi_0 \circ \Omega^n$ является функтором. Очевидно, что установленный в п. 2.60 изоморфизм $\pi_n(X, x_0) \cong F_{S^n}(X, x_0)$ представляет собой естественную эквивалентность функторов.

Во всех случаях, когда исключены возможности недоразумений, мы будем обозначать $\pi_n(f)$ просто через f_* .

3.2. Из общекатегорных соображений вытекает, что если f — эквивалентность в $\mathcal{PT}'$, то $f_* = \pi_n(f)$ — эквивалентность в $\mathcal{G}$. Класс $[f] \in [X, x_0; Y, y_0]$ является эквивалентностью в $\mathcal{PT}'$ тогда и только тогда, когда существует такой класс $[g] \in [Y, y_0; X, x_0]$, что $[g] \circ [f] = [1_X]$, $[f] \circ [g] = [1_Y]$, т. е. когда $g \circ f \simeq 1_X \text{ rel } x_0$, $f \circ g \simeq 1_Y \text{ rel } y_0$. Такое отображение f (или g) мы будем называть *гомотопической эквивалентностью*, а о пространствах (X, x_0) и (Y, y_0) будем говорить, что они имеют один и тот же *гомотопический тип*. Итак, если f — гомотопическая эквивалентность, то $f_*: \pi_n(X, x_0) \cong \pi_n(Y, y_0)$ — изоморфизм для любого $n \geq 0$, и если пространства (X, x_0) и (Y, y_0) имеют один и тот же гомотопический тип, то $\pi_n(X, x_0) \cong \pi_n(Y, y_0)$ для любого $n \geq 0$.

3.3. Определение. Пунктированное пространство (X, x_0) называется *стягиваемым*, если включение $i: (\{x_0\}, x_0) \rightarrow (X, x_0)$ является гомотопической эквивалентностью. Если обозначить через $c: (X, x_0) \rightarrow (\{x_0\}, x_0)$ отображение, переводящее пространство X в отмеченную точку x_0 , то очевидно, что $c \circ i = 1_{\{x_0\}}$. Таким обра-

зом, (X, x_0) стягиваемо тогда и только тогда, когда существует гомотопия $H: X \times I \rightarrow X \text{ rel } x_0$, для которой $H_0 = 1_X$, $H_1 = i \cdot c$, т. е. $H_1(X) = x_0$. Такая гомотопия H называется *стягивающей гомотопией*. Согласно п. 3.2, если (X, x_0) стягиваемо, то $\pi_n(X, x_0) \cong \pi_n(\{x_0\}, x_0)$ для всех $n \geq 0$. Но для каждого $n \geq 0$ существует ровно одно отображение $(S^n, s_0) \rightarrow (\{x_0\}, x_0)$, а именно, «постоянное» отображение. Таким образом, $\pi_n(\{x_0\}, x_0) = 0 = \{\text{группа (множество) из одного элемента}\}$. Итак, мы доказали следующий результат.

3.4. Предложение. Если пространство (X, x_0) стягиваемо, то $\pi_n(X, x_0) = 0$ для всех $n \geq 0$.

3.5. Примеры. Диск (D^n, x) размерности $n \geq 0$ стягиваем при любом выборе точки $x \in D^n$. Следовательно, $\pi_r(D^n, x) = 0$ для всех $r \geq 0$, $n \geq 0$. Аналогично

$$\pi_r(\mathbb{R}^n, x) = 0$$

для всех $r \geq 0$, $n \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$.

После этих элементарных вычислений может показаться, что такие вычисления можно проделать и для других простых пространств, например, для n -мерной сферы S^n . В главе 6 мы докажем, что $\pi_r(S^n, s_0) = 0$ для $r < n$ и $\pi_n(S^n, s_0) = \mathbb{Z}$, $n \geq 1$. Однако группы $\pi_r(S^n, s_0)$ для $r > n$ не обязательно обращаются в нуль и в общем случае неизвестны. Вычисление этих групп представляет собой важнейшее направление исследований в современной алгебраической топологии.

3.6. Определение. Пусть A — некоторое подпространство в X и $i: A \rightarrow X$ — включение. Подпространство A называется *ретрактом* пространства X , если существует такое отображение $r: X \rightarrow A$, что $r \cdot i = 1_A$. Применяя функтор π_n , $n \geq 2$, мы получаем: $r_* \cdot i_* = (r \cdot i)_* = (1_A)_* = 1_{\pi_n(A, x_0)}$ для любой отмеченной точки $x_0 \in A$. Следовательно, гомоморфизм r_* является левым обратным к i_* . Таким образом, $i_*: \pi_n(A, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$ является мономорфизмом. Верен и более сильный результат, а именно:

$$\pi_n(X, x_0) \cong \text{im } i_* \oplus \ker r_* \cong \pi_n(A, x_0) \oplus \ker r_*.$$

В самом деле, $\text{im } i_* \cap \ker r_* = \{0\}$ и каждый элемент $\alpha \in \pi_n(X, x_0)$ может быть записан в виде

$$\alpha = i_*(r_*(\alpha)) + (\alpha - i_*(r_*(\alpha))),$$

где $i_*(r_*(\alpha)) \in \text{im } i_*$, $\alpha - i_*(r_*(\alpha)) \in \ker r_*$.

Позже мы увидим, что $\ker r_*$ можно отождествить с относительной гомотопической группой $\pi_n(X, A, x_0)$.

Для $n=1$ мы получаем, что гомоморфизм $i_*: \pi_1(A, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ является мономорфизмом, $\ker r_*$ есть нормальная подгруппа в $\pi_1(X, x_0)$, и каждый элемент $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$ может быть единственным образом представлен в виде $\alpha = \alpha' \cdot \alpha''$, где $\alpha' \in \text{im } i_*$, $\alpha'' \in \ker r_*$. Это означает, что группа $\pi_1(X, x_0)$ есть так

называемое полупрямым произведением своих подгрупп $\text{im } i_*$ и $\ker r_*$.

3.7. Определение. Если $A \subset X$ — ретракт (с ретракцией r) и если, сверх того, $i \cdot r \simeq 1_X$, то подпространство A называется *деформационным ретрактом* в X . В случае, когда $i \cdot r \simeq 1_X \text{ rel } A$, т. е. когда гомотопия постоянна на A , подпространство A называется *сильным деформационным ретрактом* в X . Гомотопия $H: X \times I \rightarrow X$, для которой $H_0 = 1_X$ и $H_1(X) \subset A$, называется *деформацией* пространства X в A . Если $x_0 \in A$ и H — гомотопия относительно x_0 (что выполняется, например, для сильного деформационного ретракта), то вложение $i: (A, x_0) \rightarrow (X, x_0)$ является гомотопической эквивалентностью и, значит, $i_*: \pi_n(A, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$ — изоморфизм для любого $n \geq 0$. Отметим, что пространство (X, x_0) стягиваемо тогда и только тогда, когда $\{x_0\}$ является сильным деформационным ретрактом в X .

3.8. Определение. Обозначим через $\mathcal{T}^2$ категорию топологических пар (X, A) , где A — подпространство в X , и непрерывных отображений $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$. Аналогично, через $\mathcal{PT}^2$ обозначим категорию пунктированных пар (X, A, x_0) , $x_0 \in A \subset X$, и отображений $f: (X, A, x_0) \rightarrow (Y, B, y_0)$, сохраняющих отмеченные точки. Мы также имеем гомотопические категории $\mathcal{T}^{2'}$, $\mathcal{PT}^{2'}$, морфизмами в которых являются гомотопические классы отображений пар¹⁾.

Для данной пары $(X, A, x_0) \in \mathcal{PT}^2$ обозначим через

$$P(X; x_0, A) = (X, x_0, A)^{(1, 0, 1)}$$

пространство путей в X , начинающихся в точке x_0 и кончающихся в подпространстве A . Формула $\pi(\omega) = \omega(1)$ задает непрерывное отображение

$$\pi: P(X; x_0, A) \rightarrow A.$$

Пространство $P(X; x_0, A)$ нам уже встречалось; именно, это есть P_i для включения $i: A \rightarrow X$. Вернее, мы имеем гомеоморфизм

$$h: P(X; x_0, A) \rightarrow P_i,$$

задаваемый формулой $h(\omega) = (\omega(1), \omega)$. Обратный гомеоморфизм $h^{-1}: P_i \rightarrow P(X; x_0, A)$ задается формулой

$$h^{-1}(a, \omega) = \omega.$$

Определим теперь для пары $(X, A, x_0) \in \mathcal{PT}^2$ *n-мерное относительно гомотопическое множество* $\pi_n(X, A, x_0)$, $n \geq 1$, полагая

$$\pi_n(X, A, x_0) = \pi_{n-1}(P(X; x_0, A), \omega_0) = \pi_0(\Omega^{n-1} P(X; x_0, A), \omega_0).$$

¹⁾ То есть гомотопии имеют вид $(X \times I, A \times I, x_0 \times I) \rightarrow (Y, B, y_0)$. — Прим. ред.

Ясно, что $\pi_n(X, A, x_0)$ является группой при $n \geq 2$ и абелевой группой при $n \geq 3$. Итак, π_n представляет собой функтор из категории $\mathcal{FS}^{2'}$ в категорию $\mathcal{FS}$, $\mathcal{S}$ или $\mathcal{A}$. Определив гомоморфизм $\partial: \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \pi_{n-1}(A, x_0)$ как $\pi_{n-1}(\pi): \pi_{n-1}(P(X; x_0, A), \omega_0) \rightarrow \pi_{n-1}(A, x_0)$, мы зададим естественное преобразование функтора $\pi_n: \mathcal{FS}^{2'} \rightarrow \mathcal{FS}$ в функтор $\pi_{n-1} \circ R$, где $R: \mathcal{FS}^{2'} \rightarrow \mathcal{FS}$ имеет вид $R(X, A, x_0) = (A, x_0)$. Пусть $l_*: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(X, A, x_0)$ — гомоморфизм, определенный как

$$\pi_{n-1}(\rho'): \pi_{n-1}(\Omega X, \omega_0) \rightarrow \pi_{n-1}(P(X; x_0, A), \omega_0).$$

3.9. Предложение. Для любой пары $(X, A, x_0) \in \mathcal{FS}^2$ последовательность

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \pi_{n+1}(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{l_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{l_*} \\ \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \dots \rightarrow \pi_1(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(A, x_0) \xrightarrow{l_*} \pi_0(X, x_0) \end{aligned}$$

точна.

Доказательство. Согласно теореме 2.59 имеет место точная последовательность пространств

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \Omega^n A \xrightarrow{\Omega^n l} \Omega^n X \xrightarrow{\Omega^{n-1} \rho'} \Omega^{n-1} P(X; x_0, A) \xrightarrow{\Omega^{n-1} \pi} \\ \Omega^{n-1} A \rightarrow \dots \xrightarrow{\rho'} P(X; x_0, A) \xrightarrow{\pi} A \xrightarrow{l} X. \end{aligned}$$

Применяя к этой последовательности функтор $[S^0, +1; -]$, совпадающий в силу предложения 2.3 с функтором $\pi_0(-)$, мы получаем требуемую точную последовательность 3.9. $\square$

Точная последовательность 3.9 называется *точной гомотопической последовательностью* пары (X, A, x_0) .

3.10. Ранее мы установили, что группу $\pi_n(X, x_0)$ можно отождествить с группой гомотопических классов отображений n -мерной сферы в пространство X . Точно так же можно показать, что элементы $\pi_n(X, A, x_0)$ — это гомотопические классы отображений $(D^n, S^{n-1}, *) \rightarrow (X, A, x_0)$. Действительно, как и в п. 2.50, экспоненциальный закон задает взаимно однозначное соответствие

$$[CX, X, *; Y, B, y_0] \leftrightarrow [X, x_0; P(Y; y_0, B), \omega_0].$$

Таким образом, мы получаем

$$\begin{aligned} \pi_n(X, A, x_0) = \pi_{n-1}(P(X; x_0, A), \omega_0) \cong \\ [S^{n-1}, s_0; P(X; x_0, A), \omega_0] \cong [CS^{n-1}, S^{n-1}, *; X, A, x_0]. \end{aligned}$$

Но конус CS^{n-1} гомеоморфен диску D^n . Конкретный гомеоморфизм $h: CS^{n-1} \rightarrow D^n$ задается, например, формулой $h([t, x]) = ix + (1-t)s_0$, $t \in I$, $x \in S^{n-1}$. Следовательно, $\pi_n(X, A, x_0) \cong [D^n, S^{n-1}, s_0; X, A, x_0]$. В этой интерпретации гомоморфизм $\partial: \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \pi_{n-1}(A, x_0)$ описывается простой формулой $\partial[f] = [f|S^{n-1}]$.

3.11. Рассмотрим точную гомотопическую последовательность пунктированной пары $(X, \{x_0\}, x_0)$. Поскольку $\pi_r(\{x_0\}, x_0) = 0$

для всех $r \geq 0$, то гомоморфизм $j_*: \pi_r(X, x_0) \rightarrow \pi_r(X, \{x_0\}, x_0)$ является изоморфизмом. Поэтому всякий раз, когда это удобно, мы можем считать абсолютные группы частным случаем относительных групп. Более того, если отождествить $\pi_r(X, x_0)$ с $\pi_r(X, \{x_0\}, x_0)$, то для любой пары (X, A, x_0) можно считать, что гомоморфизм $j_*: \pi_r(X, x_0) \rightarrow \pi_r(X, A, x_0)$ индуцирован включением

$$j: (X, \{x_0\}, x_0) \rightarrow (X, A, x_0).$$

3.12. Определение. Пара $(X, A) \in \mathcal{T}^2$ называется *0-связной*, если каждая компонента линейной связности пространства X пересекает A . Пара (X, A) называется *n -связной*, если она 0-связна и $\pi_r(X, A, a) = 0$ для $1 \leq r \leq n$ и всех $a \in A$. Пространство X называется *n -связным*, если $\pi_k(X, x) = 0$ для $0 \leq k \leq n$ и всех $x \in X$.

Из точности гомотопической последовательности пары (X, A, x_0) легко получается следующий результат.

3.13. Предложение. Пара $(X, A) \in \mathcal{T}^2$ является *n -связной* ($n \geq 0$) тогда и только тогда, когда для любой точки $x_0 \in A$ отображение

$$i_*: \pi_r(A, x_0) \rightarrow \pi_r(X, x_0)$$

биективно при $r < n$ и сюръективно при $r = n$.

В частности, пара (X, X) является *n -связной* для всех $n \geq 0$.

Следующее условие часто используется для характеристики тех отображений $f: (D^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$, которые определяют нулевой элемент в $\pi_n(X, A, x_0)$

3.14. Предложение. Отображение $f: (D^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$ определяет нулевой элемент в $\pi_n(X, A, x_0)$ тогда и только тогда, когда f гомотопно относительно S^{n-1} такому отображению f' , что $f'(D^n) \subset A$.

Доказательство. Пусть $f \simeq f' \text{ rel } S^{n-1}$ и $f'(D^n) \subset A$. Обозначим через H гомотопию, связывающую f и f' . Определим теперь гомотопию $G: (D^n \times I, S^{n-1} \times I, s_0 \times I) \rightarrow (X, A, x_0)$, полагая

$$G(x, t) = \begin{cases} H(x, 2t), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ f'((2-2t)x + (2t-1)s_0), & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Тогда $G_0 = f$, $G_1 = x_0$.

Обратно, предположим, что $G: (D^n \times I, S^{n-1} \times I, s_0 \times I) \rightarrow (X, A, x_0)$ задает нульгомотопию отображения f .

Определим новую гомотопию $H: D^n \times I \rightarrow X$ формулой

$$H(x, t) = \begin{cases} G\left(\frac{2x}{2-t}, t\right), & 0 \leq \|x\| \leq 1 - t/2, \\ G\left(\frac{x}{1-t}, 2 - 2\|x\|\right), & 1 - t/2 \leq \|x\| \leq 1, \end{cases}$$

где $x \in D^n$, $t \in I$. Тогда $H_0 = G_0 = f$; для всех $x \in S^{n-1}$, $t \in I$, $H(x, t) = G(x, 0) = H(x, 0)$ и $H_1(D^n) \subset A$. $\square$

Таким образом, пара (X, A) является n -связной тогда и только тогда, когда любое отображение $f: (D^k, S^{k-1}) \rightarrow (X, A)$ гомотопно относительно S^{k-1} отображению в A , $0 \leq k \leq n$ (по определению, $D^0 = \text{точка}$, $S^{-1} = \emptyset$).

3.15. Для любого отображения $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ можно включить морфизм $f_*: \pi_r(X, x_0) \rightarrow \pi_r(Y, y_0)$ в длинную точную последовательность. С этой целью мы используем стандартный прием превращения отображения f во вложение. Назовем *приведенным цилиндром* $\tilde{M}_f$ отображения f пространство, которое получается из $(I \times X / I \times \{x_0\}) \vee Y$ отождествлением $[1, x] \in I \times X / I \times \{x_0\}$ с $f(x) \in Y$ для всех $x \in X$. Пусть $q: (I \times X / I \times \{x_0\}) \vee Y \rightarrow \tilde{M}_f$ — естественная проекция; обозначим через $[t, x]$ образ $q([t, x])$ для $[t, x] \in (I \times X / I \times \{x_0\})$ и через $[y]$ — образ $q(y)$ для $y \in Y$. Имеются следующие отображения:

$$i: (X, x_0) \rightarrow (\tilde{M}_f, *), \quad i(x) = [0, x];$$

$$j: (Y, y_0) \rightarrow (\tilde{M}_f, *), \quad j(y) = [y];$$

$$r: (\tilde{M}_f, *) \rightarrow (Y, y_0), \quad r([y]) = y, \quad r([s, x]) = f(x);$$

$$H: \tilde{M}_f \times I \rightarrow \tilde{M}_f, \quad H([y], t) = [y],$$

$$H([s, x], t) = [t + s - st, x].$$

Эти отображения удовлетворяют перечисленным ниже соотношениям:

$$\text{i) } r \circ i = f,$$

$$\text{ii) } r \circ j = 1_Y,$$

$$\text{iii) } H_0 = 1_{\tilde{M}_f},$$

$$\text{iv) } H_1 = j \circ r.$$

Следовательно, r и j являются гомотопическими эквивалентностями. Кроме того, очевидно, что i представляет собой гомеоморфизм пространства X на его образ $i(X)$ в $\tilde{M}_f$, так что мы можем рассматривать X как подпространство в $\tilde{M}_f$.

Замечание 1. $\tilde{M}_f / X \cong Y \cup_f CX$.

Замечание 2. Для любого отображения $f: X \rightarrow Y$ из категории $\mathcal{T}$ можно определить пространство M_f , отождествляя в $(I \times X) \cup Y$ точки $[1, x]$ и $f(x)$ для всех $x \in X$. Пространство M_f называется *неприведенным цилиндром отображения*.

Рассмотрим теперь точную гомотопическую последовательность пары $(\tilde{M}_f, X)$:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & \pi_{r+1}(\tilde{M}_f, X, *) & \xrightarrow{\partial} & \pi_r(X, x_0) & \xrightarrow{i_*} & \pi_r(\tilde{M}_f, *) \xrightarrow{k_*} \pi_r(\tilde{M}_f, X, *) \xrightarrow{\partial} \dots \\ & & & & \searrow f_* & \downarrow r_* \approx \uparrow j_* & \\ & & & & & \pi_r(Y, y_0) & \end{array}$$

Изображенная здесь диаграмма коммутативна, а r_* и j_* являются изоморфизмами, так как r и j — гомотопические эквивалентности. Таким образом, мы получаем длинную точную последовательность

$$3.16. \dots \rightarrow \pi_{r+1}(\tilde{M}_f, X, *) \xrightarrow{\partial} \pi_r(X, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_r(Y, y_0) \xrightarrow{k_* \circ j_*} \pi_r(\tilde{M}_f, X, *) \xrightarrow{\partial} \dots,$$

называемую *точной гомотопической последовательностью отображения f* . С помощью этой последовательности утверждение о том, что f_* — изоморфизм, сводится к утверждению о связности пары $(\tilde{M}_f, X, *)$.

3.17. Определение. Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *n -эквивалентностью*, $n \geq 0$, если для всех $x_0 \in X$ отображение $f_*: \pi_r(X, x_0) \rightarrow \pi_r(Y, y_0)$ биективно при $r < n$ и сюръективно при $r = n$. Отображение f называется *слабой гомотопической эквивалентностью*, если оно есть n -эквивалентность для всех $n \geq 0$. Отметим, что каждая гомотопическая эквивалентность (в $\mathcal{T}$) является слабой гомотопической эквивалентностью.

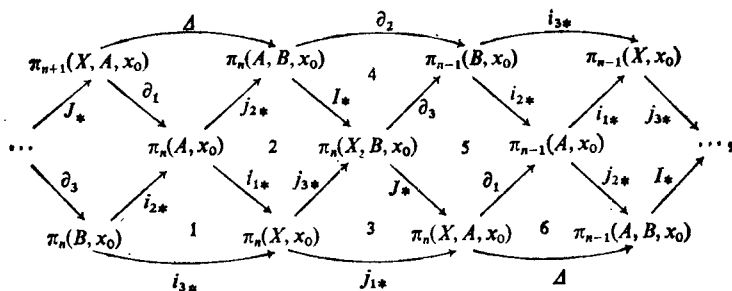
Из точности последовательности 3.16 вытекает следующий результат.

3.18. Предложение. Отображение $f: X \rightarrow Y$ является n -эквивалентностью (соответственно, слабой гомотопической эквивалентностью) тогда и только тогда, когда для всех $x_0 \in X$ пара $(\tilde{M}_f, X)$ 0-связна и $\pi_r(\tilde{M}_f, X, *) = 0$ для $1 \leq r \leq n$ (соответственно, для $1 \leq r$).

3.19. Тройка (X, A, B, x_0) — это топологическое пространство X и два его подпространства $B \subset A \subset X$ с отмеченной точкой $x_0 \in B$. С данной тройкой (X, A, B, x_0) можно связать целый ряд различных вложений:

$$\begin{aligned} i_1: A \rightarrow X, \quad i_2: B \rightarrow A, \quad i_3: B \rightarrow X, \\ j_1: (X, \{x_0\}) \rightarrow (X, A), \quad j_2: (A, \{x_0\}) \rightarrow (A, B), \\ j_3: (X, \{x_0\}) \rightarrow (X, B), \\ I: (A, B) \rightarrow (X, B), \quad J: (X, B) \rightarrow (X, A). \end{aligned}$$

Индукцированные этими вложениями отображения гомотопических групп и соответствующие морфизмы $\partial_1, \partial_2, \partial_3$, называемые граничными, нетрудно организовать в следующую диаграмму:



где через Δ обозначена композиция $j_{2*} \circ \partial_1$. Эта диаграмма коммутативна. Действительно, треугольники 1, 3 и квадрат 2 содержат лишь морфизмы, индуцированные вложениями. Так как π_n — функтор, то они коммутативны. Треугольник 4 и квадрат 5 коммутативны в силу естественности граничного морфизма. Треугольник же 6 коммутативен по определению отображения Δ .

3.20. Теорема. Для любой тройки (X, A, B, x_0) последовательность

$$\dots \rightarrow \pi_{n+1}(X, A, x_0) \xrightarrow{\Delta} \pi_n(A, B, x_0) \xrightarrow{I_*} \pi_n(X, B, x_0) \xrightarrow{J_*}$$

$$\pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\Delta} \dots \rightarrow \pi_1(A, B, x_0) \xrightarrow{I_*} \pi_1(X, B, x_0) \xrightarrow{J_*} \pi_1(X, A, x_0)$$

точна.

Доказательство. Читатель может проверить, что следующее доказательство пригодно и для $n=1$. Мы должны проверить шесть следующих утверждений.

i) $I_* \circ \Delta = 0$. Поскольку $i_{1*} \circ \partial_1 = 0$, имеем $I_* \circ \Delta = I_* \circ j_{2*} \circ \partial_1 = j_{3*} \circ i_{1*} \circ \partial_1 = 0$.

ii) $\Delta \circ J_* = 0$. Так как $j_{2*} \circ i_{2*} = 0$, то $\Delta \circ J_* = j_{2*} \circ \partial_1 \circ J_* = j_{2*} \circ i_{2*} \circ \partial_3 = 0$.

iii) $J_* \circ I_* = 0$. Нетрудно видеть, что $J \circ I$ совпадает с композицией вложений $(A, B) \rightarrow (A, A) \rightarrow (X, A)$. Так как $\pi_n(A, A, x_0) = 0$, то $J_* \circ I_* = 0$.

iv) $\ker I_* \subset \text{im } \Delta$. Предположим, что $x \in \pi_n(A, B, x_0)$ и $I_* x = 0$. Тогда $\partial_2 x = \partial_3 I_* x = 0$ и поэтому существует такой элемент $y \in \pi_n(A, x_0)$, что $j_{2*} y = x$. Следовательно, $j_{3*} \circ i_{1*} y = I_* \circ j_{2*} y = I_* x = 0$, так что найдется $z \in \pi_n(B, x_0)$ с $i_{3*} z = i_{1*} y$. Но тогда $i_{1*}(y - i_{2*} z) = i_{1*} y - i_{1*} i_{2*} z = i_{1*} y - i_{3*} z = 0$ и, значит, существует такой элемент

$$\omega \in \pi_{n+1}(X, A, x_0),$$

для которого $\partial_1 \omega = y - i_{2*} z$. Имеем $\Delta \omega = j_{2*} \circ \partial_1 \omega = j_{2*} (y - i_{2*} z) = j_{2*} y - j_{2*} \circ i_{2*} z = x$. Таким образом, $x \in \text{im } \Delta$.

v) $\ker \Delta \subset \text{im } J_*$. Предположим, что $x \in \pi_n(X, A, x_0)$ и $\Delta x = 0$. Тогда $j_{2*} \circ \partial_1 x = 0$ и поэтому найдется $y \in \pi_{n-1}(B, x_0)$ с $i_{2*} y = \partial_1 x$. Но $i_{3*} y = i_{1*} \circ i_{2*} y = i_{1*} \circ \partial_1 x = 0$. Поэтому существует такой элемент $z \in \pi_n(X, B, x_0)$, что $\partial_3 z = y$. Следовательно, $\partial_1 (x - J_* z) = \partial_1 x - \partial_1 J_* z = \partial_1 x - i_{2*} \partial_3 z = \partial_1 x - i_{2*} y = 0$, так что найдется элемент $w \in \pi_n(X, x_0)$, для которого $j_{1*} w = x - J_* z$. Тогда $J_* (j_{3*} w + z) = j_{1*} w + J_* z = x$. Значит, $x \in \text{im } J_*$.

vi) $\ker J_* \subset \text{im } I_*$. Пусть $x \in \pi_n(X, B, x_0)$ и $J_* x = 0$. Тогда $i_{2*} \partial_3 x = \partial_1 J_* x = 0$, т. е. существует элемент $y \in \pi_n(A, B, x_0)$, для которого $\partial_2 y = \partial_3 x$. Таким образом, $\partial_3 (x - I_* y) = \partial_3 x - \partial_3 I_* y = \partial_3 x - \partial_2 y = 0$, а значит, найдется такой элемент $z \in \pi_n(X, x_0)$, что $j_{3*} z = x - I_* y$. Но тогда $j_{1*} z = J_* j_{3*} (z) = J_* (x - I_* y) = 0$ и поэтому существует $w \in \pi_n(A, x_0)$ с $i_{1*} w = z$. Имеем: $I_* j_{2*} w = j_{3*} i_{1*} w = j_{3*} z = x - I_* y$, т. е. $x = I_* (j_{2*} w + y)$. Следовательно, $x \in \text{im } I_*$. $\square$

Последовательность 3.20 естественна в том смысле, что если $f: (X, A, B, x_0) \rightarrow (X', A', B', x'_0)$ — отображение троек, то диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}
 \cdots & \longrightarrow & \pi_{n+1}(X, A, x_0) & \xrightarrow{\Delta} & \pi_n(A, B, x_0) & \xrightarrow{J_*} \\
 & & \downarrow f_* & & \downarrow (f|A)_* & \\
 \cdots & \longrightarrow & \pi_{n+1}(X', A', x'_0) & \xrightarrow{\Delta} & \pi_n(A', B', x'_0) & \xrightarrow{J_*} \\
 & & & & & \\
 & & & & \pi_n(X, B, x_0) & \xrightarrow{J_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\Delta} \cdots \\
 & & & & \downarrow f_* & \downarrow f_* \\
 & & & & \pi_n(X', B', x'_0) & \xrightarrow{J_*} \pi_n(X', A', x'_0) \xrightarrow{\Delta} \cdots
 \end{array}$$

коммутативна.

Разумеется, если мы рассмотрим тройку $(X, A, \{x_0\}, x_0)$, то точная последовательность 3.20 после очевидных отождествлений $\pi_n(A, \{x_0\}, x_0) = \pi_n(A, x_0)$ и т. д. сведется к точной последовательности 3.9 пары (X, A, x_0) .

3.21. Вернемся теперь к случаю, когда существует ретракция $r: X \rightarrow A$ пространства X на некоторое его подпространство (см. определение 3.6). Так как $r_* \circ i_* = (r \circ i)_* = 1_*$, то i_* — мономорфизм. Следовательно, в точной последовательности пары (X, A, x_0)

$$\cdots \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{I_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{J_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \cdots$$

гомоморфизм δ обязан быть нулевым гомоморфизмом, и мы получаем семейство коротких точных последовательностей

$$0 \longrightarrow \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \longrightarrow 0,$$

$$\quad \quad \quad \xleftarrow{r_*}$$

в которых $r_* \cdot i_* = 1$. Сейчас мы покажем, что в такой ситуации средняя группа $\pi_n(X, x_0)$, $n > 1$, всегда изоморфна прямой сумме крайних групп, т. е.

$$\pi_n(X, x_0) \cong \pi_n(A, x_0) \oplus \pi_n(X, A, x_0).$$

3.22. Лемма. Для любой короткой точной последовательности абелевых групп

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \rightarrow 0$$

эквивалентны следующие условия:

i) существует такой гомоморфизм $r: B \rightarrow A$, что $r \cdot i = 1_A$;

ii) существует такой гомоморфизм $q: C \rightarrow B$, что $j \cdot q = 1_C$.

В каждом из этих случаев имеет место изоморфизм $B \cong A \oplus C$.

Доказательство. i) Предположим, что нам задан гомоморфизм $r: B \rightarrow A$, удовлетворяющий соотношению $r \cdot i = 1_A$. Тогда можно определить отображение $\phi: B \rightarrow A \oplus C$, полагая $\phi(b) = (rb, jb)$. Ясно, что ϕ — гомоморфизм. Если $\phi(b) = 0$, то $jb = 0$ и поэтому найдется такой элемент $a \in A$, что $ia = b$. Но $a = ria = rb = 0$, и, значит, $b = ia = 0$. Следовательно, ϕ — мономорфизм. Возьмем теперь какой-нибудь элемент $(a, c) \in A \oplus C$ и выберем $b' \in B$ так, чтобы $jb' = c$. Положим $b = ia + b' - irb'$; тогда $rb = ria + rb' - rirb' = a + rb' - rb' = a$ и $jb = jia + jb' - jirb' = jb' = c$. Следовательно, ϕ — эпиморфизм. И, наконец, определим отображение $q: C \rightarrow B$, полагая $q(c) = \phi^{-1}(0, c)$. Легко видеть, что q — гомоморфизм и $j \cdot q(c) = j \cdot \phi^{-1}(0, c) = c = 1_C(c)$ для всех $c \in C$, т. е. $j \cdot q = 1_C$.

ii) Предположим теперь, что нам задан гомоморфизм $q: C \rightarrow B$, удовлетворяющий условию $j \cdot q = 1_C$. Для любого $b \in B$ имеем $j(b - qjb) = jb - jqjb = jb - jb = 0$. Следовательно, поскольку i — мономорфизм, то существует и единствен такой элемент $a_b \in A$, что $i(a_b) = b - qjb$. Определим отображение $r: B \rightarrow A$, полагая $r(b) = a_b$. Так как $i(a_b + a_{b'}) = (b - qjb) + (b' - qjb') = (b + b') - qj(b + b') = i(a_{b+b'})$, то $r(b + b') = rb + rb'$, т. е. r — гомоморфизм. Кроме того, для любого $a \in A$ имеем $ir(ia) = ia - qj(ia) = ia$ и, следовательно, $ri(a) = a$ для всех a . Итак, $r \cdot i = 1_A$, но тогда из пункта i) вытекает, что $B \cong A \oplus C$. $\square$

Если выполняются условия i) или ii) (и, значит, оба), говорят, что короткая точная последовательность *расщепляется*. Если группы, входящие в точную последовательность леммы 3.22, некоммутативны, условие ii) выполняется тогда и только тогда,

когда B изоморфно полупрямому произведению групп C и A . В этом случае условия i) и ii) не эквивалентны.

Мы завершим эту главу исследованием зависимости гомотопических групп от отмеченной точки. Получим ли мы изоморфные гомотопические группы, выбрав другую отмеченную точку? Следующий пример показывает, что в общем случае ответ на этот вопрос отрицателен. Пусть X — несвязное объединение $S^1 \cup \{x_0\}$ окружности S^1 и точки x_0 . В главе 4 будет показано, что $\pi_1(S^1, s_0) \cong \mathbb{Z}$ для любой точки $s_0 \in S^1$. Так как окружность S^1 линейно связна, то для любого непрерывного отображения $f: (S^1, s_0) \rightarrow (X, y)$, $y \in X$, образ $f(S^1)$ обязан лежать в компоненте линейной связности точки y . Следовательно, $\pi_1(X, s_0) \cong \pi_1(S^1, s_0) \cong \mathbb{Z}$, но в то же время $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(\{x_0\}, x_0) = 0$. Таким образом, если пространство X не линейно связно, то группы $\pi_1(X, x_0)$ и $\pi_1(X, x_1)$ вообще говоря, не изоморфны. Однако ниже мы покажем, что наличие линейной связности достаточно для изоморфизма $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$.

3.23. Определение. Пусть G и A — две группы с умножениями $\mu: A \times A \rightarrow A$ и $\mu': G \times G \rightarrow G$ соответственно. Говорят, что действие $\alpha: G \times A \rightarrow A$ группы G на множестве A в смысле определения 2.42 согласовано с умножением μ на A , если коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc}
 G \times A \times A & \xrightarrow{1 \times \mu} & G \times A \\
 \downarrow \Delta \times 1 & & \downarrow \alpha \\
 G \times G \times A \times A & & \\
 \downarrow 1 \times T \times 1 & & \\
 G \times A \times G \times A & & \\
 \downarrow \alpha \times \alpha & & \downarrow \\
 A \times A & \xrightarrow{\mu} & A.
 \end{array}$$

Другими словами, $g(a_1 a_2) = (ga_1)(ga_2)$ для $g \in G$, $a_1, a_2 \in A$.

Замечания. i) Группа всегда согласованно действует слева на себе самой при помощи сопряжения $\alpha: G \times G \rightarrow G$, задаваемого формулой $\alpha(g, a) = gag^{-1}$.

ii) Если группа A абелева, то задание на A согласованного действия группы G эквивалентно заданию на A структуры модуля над целочисленным групповым кольцом $\mathbb{Z}[G]$. Если, например, $\alpha: G \times A \rightarrow A$ — согласованное действие, то $\alpha': \mathbb{Z}[G] \otimes A \rightarrow A$ определяется формулой $\alpha'(\sum n_i g_i \otimes a_i) = \sum n_i \alpha(g_i, a_i)$. Наоборот, если $\alpha': \mathbb{Z}[G] \otimes A \rightarrow A$ — модульная структура на A , то согла-

сованное действие $\alpha: G \times A \rightarrow A$ задается равенством $\alpha(g, a) = \alpha'(g \otimes a)$

Аналогично тому как мы переделали определение группы в определение H -группы, можно также переделать определение согласованного группового действия в определение согласованного H -группового действия.

3.24. Определение. *Согласованным действием H -группы (K, k_0, μ_K) на H -группе (L, l_0, μ_L) называется такое действие $\alpha: K \times L \rightarrow L$, что диаграмма*

$$\begin{array}{ccc}
 K \times L \times L & \xrightarrow{1 \times \mu_L} & K \times L \\
 \downarrow \Delta \times 1 & & \downarrow \alpha \\
 K \times K \times L \times L & & \\
 \downarrow 1 \times T \times 1. & & \\
 K \times L \times K \times L & & \\
 \downarrow \alpha \times \alpha & & \\
 L \times L & \xrightarrow{\mu_L} & L
 \end{array}$$

коммутативна с точностью до гомотопии.

Для наших целей больший интерес представляет двойственное понятие согласованного кодействия одной H -когруппы на другой.

3.25. Определение Пусть (K, k_0, μ'_K) и (L, l_0, μ'_L) — некоторые H -когруппы. *Согласованным кодействием H -когруппы K на H -когруппе L называется такое кодействие $\alpha': L \rightarrow K \vee L$, что коммутативна с точностью до гомотопии диаграмма, дуальная диаграмме 3.24 (т. е. полученная из нее обращением стрелок и заменой знаков $\times$ знаками $\vee$).*

Следующие предложения очевидны.

3.26. Предложение. *Если (K, k_0, μ_K) , (L, l_0, μ_L) — некоторые H -группы и $\alpha: K \times L \rightarrow L$ — согласованное действие, то для каждого пространства $(W, \omega_0) \in \mathcal{PT}$ естественное действие группы $[W, \omega_0; K, k_0]$ на группе $[W, \omega_0; L, l_0]$, определенное формулой*

$$[f] \cdot [g] = [\alpha \cdot (f \times g) \cdot \Delta]$$

(где $[f]$ и $[g]$ — гомотопические классы отображений соответственно $f: (W, \omega_0) \rightarrow (K, k_0)$ и $g: (W, \omega_0) \rightarrow (L, l_0)$), является согласованным действием.

3.27. Предложение. *Если (K, k_0, μ'_K) , (L, l_0, μ'_L) — некоторые H -когруппы и $\alpha': L \rightarrow K \vee L$ — согласованное кодействие, то для каждого пространства $(W, \omega_0) \in \mathcal{PT}$ естественное действие*

группы $[K, k_0; W, \omega_0]$ на группе $[L, l_0; W; \omega_0]$, определенное формулой

$$[f] \cdot [g] = [\Delta' \cdot (f \vee g) \cdot \alpha']$$

(где $[f]$ и $[g]$ — гомотопические классы отображений соответственно $f: (K, k_0) \rightarrow (W, \omega_0)$ и $g: (L, l_0) \rightarrow (W, \omega_0)$), является согласованным действием.

3.28. Пример. Построим для каждого $n \geq 1$ согласованное кодействие окружности (S^1, s_0) на сфере (S^n, ε_0) . С этой целью заметим, что если $\mu': S^n \rightarrow S^n \vee S^n$ — определенное в п. 2.22 коумножение на S^n , то $C_\mu': CS^n \rightarrow C(S^n \vee S^n) \cong CS^n \vee CS^n$ является коумножением на $CS^n = D^{n+1}$, превращающим CS^n в H -группу, причем $C_\mu'|S^n = \mu'$. Мы определим сейчас согласованное кодействие $\alpha': CS^n \rightarrow S^1 \vee CS^n$ таким образом, чтобы $\alpha'|S^n$ оказалось требуемым кодействием окружности S^1 на S^n .

Представим сферу S^n , $n \geq 1$, как пространство, полученное из цилиндра $S^{n-1} \times I$ сжатием нижнего основания $S^{n-1} \times \{0\}$ в точку (отмеченная точка), а верхнего основания $S^{n-1} \times \{1\}$ — еще в одну точку (это — так называемая неприведенная надстройка над S^{n-1}). Будем считать, что отмеченной точкой отрезка I служит 1. Зададим отображение $\beta': CS^n \rightarrow I \vee CS^n$, полагая

$$\beta'([s, x, t]) = \begin{cases} (2st, *), & 2st \leq 1 \\ \left(1, \left[\frac{2st-1}{2t-1}, x, 2t-1\right]\right), & 2st > 1 \end{cases} \quad s, t \in I, x \in S^{n-1}.$$

Доказательство непрерывности этого отображения не составляет труда, хотя и требует определенного времени. Ограничение $\beta'|S^n$ задает отображение $\beta: S^n \rightarrow I \vee S^n$. Если в нарушение принятого соглашения считать отмеченными точками в $I \vee S^n$ и $I \vee CS^n$ точки¹⁾ $(0, *)$, то β и β' будут сохранять отмеченные точки. Отображение β' можно схематически представить следующим образом:

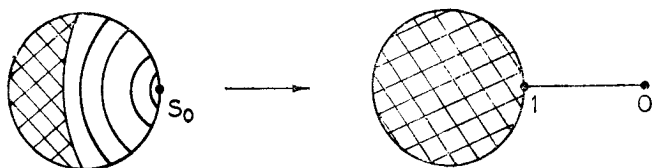


Рис. 9.

Точка s_0 переходит в 0, та часть диска, на которой изображены кривые линии, переходит в I (эти кривые представляют собой поверхности уровня), а заштрихованная часть покрывает диск D^n .

¹⁾ Напомним, что $X \vee Y$ определяется как подмножество произведения $X \times Y$ и очевидно, что точка $(0, *)$, не будучи отмеченной в $X \vee Y$, тем не менее лежит в $X \vee Y$. — Прим. ред.

Пусть $I * I = (I, 1) \vee (I, 0)$ с отмеченной точкой ¹⁾ $(1, 1)$. Определим отображение $\hat{\mu}: I \rightarrow I * I$, полагая

$$\hat{\mu}(t) = \begin{cases} (2t, 0), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ (1, 2t - 1), & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Тогда для любых путей ω, ω' в X , удовлетворяющих условию $\omega(1) = \omega'(0)$, путь $\omega * \omega'$ можно представить как

$$I \xrightarrow{\hat{\mu}} I * I \xrightarrow{\omega \vee \omega'} X \vee X \xrightarrow{\Delta'} X,$$

считая отмеченной точкой в X точку $\omega(1) = \omega'(0)$.

Соберем в отдельную лемму необходимые нам свойства отображения β' .

3.29. Лемма. Диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \text{i)} & \begin{array}{ccc} CS^n & \xleftarrow{(*, 1)} & I \vee CS^n \\ & \searrow 1 & \uparrow \beta' \\ & & CS^n \end{array} & \text{ii)} \quad \begin{array}{ccc} (I * I) \vee CS^n \cong I \vee (I \vee CS^n) & \xleftarrow{1 \vee \beta'} & I \vee CS^n \\ \uparrow \hat{\mu} \vee 1 & & \uparrow \beta' \\ I \vee CS^n & \xleftarrow{\beta'} & CS^n \end{array} \\ & & \text{iii)} \quad \begin{array}{ccc} I \vee CS^n \vee CS^n & \xleftarrow{1 \vee C\mu'} & I \vee CS^n \\ \uparrow \bar{\Delta} & & \uparrow \beta' \\ (I \vee CS^n) \vee (I \vee CS^n) & & \\ \uparrow \beta' \vee \beta' & & \\ CS^n \vee CS^n & \xleftarrow{C\mu'} & CS^n \end{array} \end{array}$$

коммутативны с точностью до гомотопии. Здесь $\bar{\Delta} = (\bar{\Delta}_1, \bar{\Delta}_2)$, $\bar{\Delta}_1(t, x) = (t, x, *)$, $\bar{\Delta}_2(t, x) = (t, *, x)$.

Доказательство.

$$\text{i)} \quad (*, 1) \circ \beta'([s, x, t]) = \begin{cases} *, & 2st \leq 1, \\ \left[\frac{2st-1}{2t-1}, x, 2t-1 \right], & 2st > 1. \end{cases}$$

Определим гомотопию $H: CS^n \times I \rightarrow CS^n$, полагая

$$H([s, x, t], u) = \begin{cases} *, & st \leq \frac{u}{1+u}, \\ \left[\frac{st(u+1)-u}{t(u+1)-u}, x, t(u+1)-u \right], & st > \frac{u}{1+u}. \end{cases}$$

¹⁾ См. примечание на с. 59. — Прим. ред.

Тогда $H_0 = 1$, $H_1 = (*, 1) \cdot \beta'$.

$$\text{ii) } (1 \vee \beta') \cdot \beta' ([s, x, t]) = \begin{cases} (2st, 0, *), & 0 \leq st \leq 1/2, \\ (1, 4st - 2, *), & 1/2 \leq st \leq 3/4, \\ \left(1, 1, \left[\frac{4st-3}{4t-3}, x, 4t-3\right]\right), & 3/4 < st \leq 1; \end{cases}$$

$$(\mu \vee 1) \cdot \beta' ([s, x, t]) = \begin{cases} (4st, 0, *), & 0 \leq st \leq 1/4, \\ (1, 4st - 1, *), & 1/4 \leq st \leq 1/2, \\ \left(1, 1, \left[\frac{2st-1}{2t-1}, x, 2t-1\right]\right), & 1/2 < st \leq 1 \end{cases}$$

Определим отображение $H: CS^n \times I \rightarrow I \vee (I \vee CS^n)$, полагая

$$H([s, x, t], u) = \begin{cases} \left(\frac{4st}{u+1}, 0, *\right), & 0 \leq st \leq \frac{u+1}{4}, \\ (1, 4st - u - 1, *), & \frac{u+1}{4} \leq st \leq \frac{u+2}{4}, \\ \left(1, 1, \left[\frac{4st-u-2}{4t-u-2}, x, \frac{4t-u-2}{2-u}\right]\right), & \frac{u+2}{4} < st \leq 1. \end{cases}$$

Тогда H является гомотопией и $H_0 = (\mu' \vee 1) \cdot \beta'$, $H_1 = (1 \vee \beta') \cdot \beta'$.

iii) Если $n \geq 2$, то диаграмма iii) даже строго коммутативна, поскольку отображения β' и C_μ включают в себя различные координаты надстроек. Для случая $n=1$ доказательство элементарно, но довольно утомительно. Оно аналогично доказательству соотношения

$$\omega * \omega * \omega' * \omega^{-1} \simeq \omega * \omega * \omega^{-1} * \omega * \omega' * \omega^{-1}. \square$$

Пусть теперь $q: I \rightarrow S^1$ — естественная проекция ($q(t) = e^{2\pi i t}$). Определим отображения $\alpha': CS^n \rightarrow S^1 \vee CS^n$ и $\alpha: S^n \rightarrow S^1 \vee S^n$, полагая $\alpha' = (q \vee 1) \cdot \beta'$, $\alpha = (q \vee 1) \cdot \beta$. Тогда $\alpha'|S^n = \alpha$. Введя в соответствующие места диаграмм i), ii) и iii) множитель $^1) q \vee 1$, получим, что α' и α — кодействия.

3.30. Предложение. Для любой пары $(X, A, x_0) \in \mathcal{PT}^2$ существуют согласованные действия групп $\pi_1(A, x_0)$ на $\pi_n(X, A, x_0)$, $n \geq 2$, и $\pi_1(X, x_0)$ на $\pi_n(X, x_0)$, $n \geq 1$, обладающие следующими свойствами:

¹⁾ Имеется в виду, что, например, в диаграмме i) отображение $I \vee CS^n \rightarrow CS^n$ разложится в композицию $I \vee CS^n \xrightarrow{q \vee 1} S^1 \vee CS^n \rightarrow CS^n$ и т. д. — Прим. ред.

i) действия естественны, т. е. для любого отображения $f: (X, A, x_0) \rightarrow (Y, B, y_0)$ имеют место коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(A, x_0) \times \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \pi_n(X, A, x_0) & \pi_1(X, x_0) \times \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0) \\ \downarrow (f|_A)_* \times f_* & \downarrow f_* & \downarrow f_* \times f_* \quad \downarrow f_* \\ \pi_1(B, y_0) \times \pi_n(Y, B, y_0) \rightarrow \pi_n(Y, B, y_0) & \pi_1(Y, y_0) \times \pi_n(Y, y_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0); \end{array}$$

ii) при $n \geq 2$ гомоморфизм $\partial: \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \pi_{n-1}(A, x_0)$ является гомоморфизмом групп с $\pi_1(A_1, x_0)$ -действием, т. е. имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(A, x_0) \times \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \pi_n(X, A, x_0) \\ \downarrow 1 \times \partial & & \downarrow \partial \\ \pi_1(A, x_0) \times \pi_{n-1}(A, x_0) \rightarrow \pi_{n-1}(A, x_0); \end{array}$$

iii) действие группы $\pi_1(X, x_0)$ на самой себе задается сопряжением, другими словами, если $\gamma, \alpha \in \pi_1(X, x_0)$, то $\gamma \cdot \alpha = \gamma \alpha \gamma^{-1}$.

Доказательство. Действие группы $\pi_1(X, x_0) = [S^1, s_0; X, x_0]$ на группе $\pi_n(X, x_0) = [S^n, s_0; X, x_0]$ задается отображением α и в соответствии с формулой предложения 3.27. Действие группы $\pi_1(A, x_0)$ на $\pi^n(X, A, x_0) = [CS^{n-1}, S^{n-1}, *; X, A, x_0]$ определяется аналогичным образом с использованием отображения α' . Естественность немедленно следует из определений. Свойство ii) вытекает из того, что $\alpha' | S^{n-1} = \alpha$ и $\partial[f] = [f | S^{n-1}]$ для любого $f: (CS^{n-1}, S^{n-1}, *) \rightarrow (X, A, x_0)$. Чтобы доказать свойство iii), отметим, что отображение $\alpha: S^1 \rightarrow S^1 \vee S^1$ задается формулой

$$\alpha([t]) = \begin{cases} ([4t], *), & 0 \leq t \leq 1/4, \\ (*, [2t - 1/2]), & 1/4 \leq t \leq 3/4, \\ ([4(1-t)], *), & 3/4 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Следовательно, если $\gamma = [f]$ и $\alpha = [g]$, то элемент $\gamma \alpha$ представляется отображением $h: I \rightarrow S^1$, где

$$h(t) = \begin{cases} f(4t), & 0 \leq t \leq 1/4, \\ g(2t - 1/2), & 1/4 \leq t \leq 3/4, \\ f(4(1-t)), & 3/4 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

С другой стороны, элемент $(\gamma \alpha) \gamma^{-1}$ представляется отображе-

нием h' , где

$$h'(t) = \begin{cases} f(4t), & 0 \leq t \leq 1/4, \\ g(4t-1), & 1/4 \leq t \leq 1/2, \\ f(2(1-t)), & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Ясно, что $h \simeq h' \text{ rel } \{0, 1\}$. $\square$

Вернемся теперь к сравнению гомотопических групп, построенных по различным отмеченным точкам. Пусть $PX[x_0, x_1]$ — множество гомотопических классов путей с началом в x_0 и концом в x_1 . Для любой пары (X, A) и любых точек $x_0, x_1 \in A$ определим отображение

$$\theta: PA[x_0, x_1] \times \pi_n(X, A, x_1) \rightarrow \pi_n(X, A, x_0),$$

задавая $\theta([w], [f])$ как гомотопический класс композиции

$$(CS^{n-1}, S^{n-1}, s_0) \xrightarrow{B'} (I \vee CS^{n-1}, I \vee S^{n-1}, (0, *)) \xrightarrow{w \vee f} (A \vee X, A \vee A, (x_0, x_1)) \xrightarrow{\Delta'} (X, A, x_0).$$

Здесь для построения букета $A \vee X$ в обоих пространствах A и X отмечена точка x_1 . Из леммы 3.29 немедленно вытекают следующие соотношения:

- i) для любого $[f] \in \pi_n(X, A, x_0)$ имеем $\theta([w_0], [f]) = [f]$;
- ii) для любых $[w] \in PA[x_0, x_1]$, $[w'] \in PA[x_1, x_2]$ и $[f] \in \pi_n(X, A, x_2)$ имеем $\theta([w * w'], [f]) = \theta([w], \theta([w'], [f]))$;
- iii) для любых $[w] \in PX[x_0, x_1]$, $[f], [f'] \in \pi_n(X, A, x_1)$ имеем $\theta([w], [f] + [f']) = \theta([w], [f]) + \theta([w], [f'])$.

Для фиксированного класса путей $[w]$ отображение

$$\theta([w], -): \pi_n(X, A, x_1) \rightarrow \pi_n(X, A, x_0)$$

является гомоморфизмом в силу соотношения iii). Из соотношений i) и ii) следует, что

$$\theta([w^{-1}], \theta([w], [f])) = \theta([w^{-1} * w], [f]) = \theta([w_0], [f]) = [f].$$

Таким образом, гомоморфизм $\theta([w^{-1}], -)$ является обратным к $\theta([w], -)$. Следовательно, для каждого гомотопического класса путей $[w] \in PX[x_0, x_1]$ имеет место изоморфизм

$$\theta([w], -): \pi_n(X, A, x_1) \rightarrow \pi_n(X, A, x_0).$$

Итак, мы получили следующее утверждение.

3.31. Предложение. Пусть (X, A) — произвольная пара топологических пространств. Если A линейно связно, то $\pi_n(X, A, x_0) \cong \pi_n(X, A, x_1)$ для любых $x_0, x_1 \in A$, $n \geq 1$. Аналогично, если пространство X линейно связно, то $\pi_n(X, x_0) \cong \pi_n(X, x_1)$ для любых $x_0, x_1 \in X$, $n \geq 0$.

Замечание. Из определений ясно, что для $\gamma \in \pi_1(A, x_0)$, $\alpha \in \pi_n(X, A, x_0)$ мы имеем $\gamma \cdot \alpha = \theta(\gamma, \alpha)$. Можно показать, что

построенный изоморфизм $\pi_n(X, A, x_1) \cong \pi_n(X, A, x_0)$ *единствен*¹⁾ в том и только в том случае, когда действие $\pi_1(A, x_0)$ на $\pi_n(X, A, x_0)$ тривиально, т. е. $\gamma \cdot \alpha = \alpha$ для всех $\gamma \in \pi_1(A, x_0)$, $\alpha \in \pi_n(X, A, x_0)$.

Замечание. Поскольку действие группы $\pi_1(X, x_0)$ на $\pi_n(X, x_0)$, $n \geq 1$, естественно, то пространства (X, x_0) и (Y, y_0) могут иметь один и тот же гомотопический тип лишь тогда, когда $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, y_0)$ и $\pi_n(X, x_0), \pi_n(Y, y_0)$ при $n \geq 2$ изоморфны как модули над кольцом $\mathbb{Z}[\pi_1(X, x_0)]$. Это более сильное условие, чем просто требование, чтобы группы $\pi_n(X, x_0), \pi_n(Y, y_0)$ были изоморфными для всех $n \geq 0$.

3.32. Упражнение. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — некоторое отображение и M_f — неприведенный цилиндр отображения f . Показать, что ретракция $r: M_f \rightarrow Y$ индуцирует изоморфизм $r_*: \pi_q(M_f, x_0) \rightarrow \pi_q(Y, y_0)$, $q \geq 0$. Таким образом, в точной последовательности 3.16 можно заменить $\hat{M}_f$ пространством M_f .

3.33. Упражнение. Показать, что если $f: X \rightarrow Y$ — гомотопическая эквивалентность (в $\mathcal{S}$), то индуцированные морфизмы $f_*: \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(Y, f(x))$ являются изоморфизмами для всех $n \geq 0$ и всех $x \in X$.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Фундаментальную группу открыл Анри Пуанкаре. Серьезный интерес к высшим гомотопическим группам появился лишь в 1931 году, когда Хопф [94] открыл, что $\pi_3(S^2, s_0) \neq 0$. С тех пор их значение в топологии и геометрии неуклонно растет. Например, в главе 12 мы покажем, что задача классификации гладких многообразий может быть сведена к вычислению некоторых гомотопических групп.

ССЫЛКИ НА ЛИТЕРАТУРУ

1. Спеньер [72].	3. Хопф [94].
2. Хилтон [89].	4. Ху [95].

¹⁾ То есть не зависит от выбора элемента γ . — *Прим. ред.*

Читатель, знакомый с теорией гомологий, по-видимому, уже заметил, что в предыдущей главе мы доказали для $\pi_n(X, A, x_0)$ аналоги первых пяти аксиом Стинрода — Эйленберга. Вместо седьмой аксиомы (аксиомы размерности) мы получили равенства: $\pi_n(\{x_0\}, x_0) = 0$ для всех $n \geq 0$. Что же касается шестой аксиомы (аксиомы вырезания), которая позволяет вычислить группы гомологий для широкого класса пространств (включающего сферы S^i), то в шестой главе мы увидим, что для гомотопических групп эта аксиома верна лишь при весьма жестких ограничениях. Однако этот недостаток гомотопических групп восполняется наличием точной гомотопической последовательности расслоения. Настоящая глава посвящена построению этой последовательности и доказательству некоторых вытекающих из нее следствий. Мы начнем с простого случая.

4.1. Теорема. Для любых $(X, x_0), (Y, y_0) \in \mathcal{P}\mathcal{E}$ имеет место изоморфизм

$$(p_{X*}, p_{Y*}): \pi_n(X \times Y, (x_0, y_0)) \rightarrow \pi_n(X, x_0) \times \pi_n(Y, y_0), \quad n \geq 0.$$

Доказательство. Для доказательства теоремы дважды применим универсальное свойство произведений п. 0.2. Пусть $([f], [g]) \in \pi_n(X, x_0) \times \pi_n(Y, y_0)$. Тогда существует такое отображение $(f, g): (S^n, s_0) \rightarrow (X \times Y, (x_0, y_0))$, что $p_X \circ (f, g) = f$, $p_Y \circ (f, g) = g$. Следовательно, $(p_{X*}, p_{Y*})[(f, g)] = ([f], [g])$ и, значит, (p_{X*}, p_{Y*}) — эпиморфизм.

Пусть теперь $h: (S^n, s_0) \rightarrow (X \times Y, (x_0, y_0))$ — такое отображение, что $p_X \circ h \simeq x_0$, $p_Y \circ h \simeq y_0$. Обозначим через $H: S^n \times I \rightarrow X$, $G: S^n \times I \rightarrow Y$ соответствующие гомотопии. Тогда $K = (H, G): S^n \times I \rightarrow X \times Y$ — тоже гомотопия и $p_X \circ K_0 = H_0 = p_X \circ h$, $p_Y \circ K_0 = G_0 = p_Y \circ h$. В силу однозначной определенности отображения (H_0, G_0) отсюда следует, что $K_0 = h$. Кроме того, очевидно, что $K_1 = (x_0, y_0)$. Поэтому $h \simeq (x_0, y_0)$, т. е. отображение (p_{X*}, p_{Y*}) — мономорфизм. $\square$

Отображение $p_X: X \times Y \rightarrow X$ представляет собой простейший пример расслоения.

4.2. Определение. Говорят, что отображение $p: E \rightarrow B$ обладает свойством *накрывающей гомотопии* относительно пространства X , если для любого отображения $f: X \rightarrow E$ и любой гомотопии $G: X \times I \rightarrow B$ отображения $p \circ f$ найдется такая гомо-

топия $F: X \times I \rightarrow E$, что $f = F_0$ и $p \circ F = G$. Гомотопия F называется *поднятием* гомотопии G .

Свойство накрывающей гомотопии можно изобразить диаграммой

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & E \\ i_0 \downarrow & \nearrow F & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{G} & B, \end{array}$$

в которой $i_0(x) = (x, 0)$ для всех $x \in X$.

Отображение $p: E \rightarrow B$ называется *расслоением*, если оно обладает свойством накрывающей гомотопии относительно любых пространств X , и *слабым расслоением*, если оно обладает этим свойством относительно всех дисков D^n , $n \geq 0$. Пространство $F = p^{-1}(b_0)$, где $b_0 \in B$ — отмеченная точка, называется *слоем* расслоения p .

Очевидно, что проекция $p_B: B \times F \rightarrow B$ является расслоением. Это расслоение называется *тривиальным расслоением* над B со слоем F . В предыдущих главах мы уже встречались и с нетривиальными расслоениями.

4.3. Предложение. *Отображение $\pi: PX \rightarrow X$ является расслоением со слоем¹⁾ ΩX .*

Доказательство. Пусть заданы отображения $f: Y \rightarrow PX$ и $G: Y \times I \rightarrow X$, причем $G_0 = \pi \circ f$. Определим отображение $F': Y \times I \times I \rightarrow X$, полагая

$$F'(y, t, s) = \begin{cases} (f(y))(s(t+1)), & 0 \leq s \leq \frac{1}{t+1} \\ G(y, s(t+1) - 1), & \frac{1}{t+1} \leq s \leq 1 \end{cases}, \quad t \in I, y \in Y.$$

Легко видеть, что F' непрерывно и, значит, определено отображение $F: Y \times I \rightarrow X'$, удовлетворяющее условию $F(y, t)(0) = f(y)(0) = x_0$ для всех y, t . Другими словами, $F(y, t) \in PX$, $F(y, 0)(s) = f(y)(s)$ для всех y, s , т. е. $F_0 = f$ и $\pi \circ F(y, t) = G(y, t)$ для любых y, t . Итак, F — требуемое поднятие гомотопии G .

Очевидно, что $\pi^{-1}(x_0) = \{w \in PX: w(1) = x_0\} = \Omega X$. $\square$

Вскоре нам понадобится следующее свойство пространства PX .

4.4. Предложение. *Пространство (PX, ω_0) стягиваемо для любого пространства (X, x_0) .*

Доказательство. Зададим отображение $H': PX \times I \rightarrow X$, полагая

$$H'(w, t, s) = w(s(1-t)).$$

¹⁾ Предполагается, что в X отмечена точка x_0 , относительно которой и определяются пространства PX и ΩX . — *Прим. ред.*

Оно непрерывно и, следовательно, определяет отображение $H: PX \times I \rightarrow PX$. Легко видеть, что $H_0(\omega)(s) = \omega(s)$, и поэтому $H_0 = 1_{PX}$. Далее, $H_1(\omega)(s) = \omega(0) = y_0 = \omega_0(s)$, так что $H_1 = \omega_0$. Наконец, $H(\omega_0, t)(s) = \omega_0(s(1-t)) = y_0 = \omega_0(s)$, т. е. H — гомотопия $\text{rel } \omega_0$. $\square$

Займемся теперь изучением поведения гомотопических групп на расслоениях.

4.5. Предложение. *Предположим, что отображение $p: E \rightarrow B$ обладает свойством накрывающей гомотопии относительно пространства $I \times X$. Пусть $b_0 \in B' \subset B$ и $E' = p^{-1}(B') \subset E$. Тогда $P(p): P(E; e_0, E') \rightarrow P(B; b_0, B')$ обладает свойством накрывающей гомотопии относительно X . В частности, если p — расслоение (соответственно, слабое расслоение), то $P(p)$ также является расслоением (соответственно, слабым расслоением).*

Доказательство. Пусть заданы такие отображения $f: X \rightarrow P(E; e_0, E')$, $G: X \times I \rightarrow P(B; b_0, B')$, что $G_0 = P(p) \circ f$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & P(E; e_0, E') \\ i_0 \downarrow & \nearrow H & \downarrow P(p) \\ X \times I & \xrightarrow{G} & P(B; b_0, B') \end{array} \quad \begin{array}{ccc} I \times X \times \{0\} \cup \{0\} \times X \times I & \xrightarrow{f''} & E \\ i' \downarrow & \nearrow H' & \downarrow p \\ I \times X \times I & \xrightarrow{G'} & B. \end{array}$$

В силу экспоненциального закона они задают отображения $f': I \times X \rightarrow E$ и $G': I \times X \times I \rightarrow B$, причем $G'_0 = p \circ f': I \times X \rightarrow B$. Определим отображение $f'': I \times X \times \{0\} \cup \{0\} \times X \times I \rightarrow E$, полагая $f''|_{I \times X \times \{0\}} = f'$, $f''|_{\{0\} \times X \times I} = e_0$. Тогда $G'|_{(I \times X \times \{0\} \cup \{0\} \times X \times I)} = p \circ f''$. Кроме того, мы имеем очевидный гомеоморфизм $h': I^2 \rightarrow I^2$, переводящий $I \times \{0\} \cup \{0\} \times I$ на $I \times \{0\}$ (рис. 10)

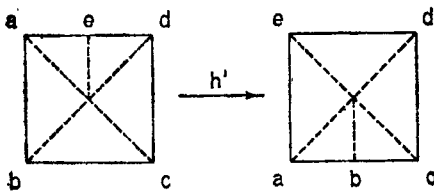


Рис. 10.

$$\begin{array}{ccc} I \times X & \xrightarrow{f'' \circ h^{-1}} & E \\ i'_0 \downarrow & \nearrow H'' & \downarrow p \\ I \times X \times I & \xrightarrow{G' \circ h^{-1}} & B. \end{array}$$

h' индуцирует гомеоморфизм $h: I \times X \times I \rightarrow I \times X \times I$, который отображает $I \times X \times \{0\} \cup \{0\} \times X \times I$ на $I \times X \times \{0\}$. Применяя к $f'' \circ h^{-1}$ и $G' \circ h^{-1}$ свойство накрывающей гомотопии, мы получаем поднятие $H'': I \times X \times I \rightarrow E$ гомотопии $G' \circ h^{-1}$ с $H''_0 = f'' \circ h^{-1}$. Следовательно, $H' = H'' \circ h$ служит поднятием гомотопии G' , причем $H'_0 = f'$ и $H'(0, x, t) = e_0$ для любых $x \in X, t \in I$. Поскольку $p \circ H'(1, x, t) =$

$G'(1, x, t) \in B'$, то

$$H'(1, x, t) \in p^{-1}(B') = E'.$$

Таким образом, сопряженное отображение $H: X \times I \rightarrow E'$ является требуемым отображением из $X \times I$ в $P(E; e_0, E')$, так как $P(p) \cdot H = G$ и $H_0 = f$. $\square$

4.6. Теорема. Если $p: E \rightarrow B$ — слабое расслоение, $b_0 \in B' \subset B$ и $E' = p^{-1}(B')$, то $p_*: \pi_n(E, E', e_0) \rightarrow \pi_n(B, B', b_0)$ — изоморфизм для любого $n \geq 1$.

Доказательство. Будем доказывать эту теорему индукцией по n , начиная с $n=1$. Если задан произвольный путь $\omega: (I, 0, 1) \rightarrow (B, b_0, B')$, то можно найти его поднятие $\omega': I \rightarrow E$ с $\omega'(0) = e_0$ (здесь мы используем свойство накрывающей гомотопии для $D^0 = 0$). Так как $p \cdot \omega'(1) = \omega(1) \in B'$, то $\omega'(1) \in E'$. Следовательно, $[\omega'] \in \pi_1(E, E', e_0)$ и ясно, что $p_*[\omega'] = [\omega]$. Таким образом, p_* — эпиморфизм. Рассмотрим теперь два таких пути $\omega_1, \omega_2: I \rightarrow E$ с $\omega_\varepsilon(0) = e_0$, $\omega_\varepsilon(1) \in E'$, $\varepsilon = 0, 1$, что $p \cdot \omega_1 \simeq p \cdot \omega_2 \text{ rel } 0$ в B . Пусть $G: I \times I \rightarrow B$ — соответствующая гомотопия. Зададим отображение $f: I \times \{0\} \cup \{0\} \times I \cup I \times \{1\} \rightarrow E$, полагая $f|_{I \times \{0\}} = \omega_1$, $f|_{I \times \{1\}} = \omega_2$, $f|_{\{0\} \times I} = e_0$. Тогда $p \cdot f = G|(I \times \{0\} \cup I \times \{1\} \cup \{0\} \times I)$. Так как существует гомеоморфизм $I^2 \rightarrow I^2$, переводящий $I \times \{0\} \cup \{0\} \times I \cup I \times \{1\}$ на $I \times \{0\}$, то вновь применяя прием, использованный в предложении 4.5, мы найдем отображение $H: I \times I \rightarrow E$, продолжающее f и накрывающее G (так как $I \cong D^1$). Следовательно, H является гомотопией, связывающей пути ω_1 и ω_2 . Таким образом, гомоморфизм p_* мономорфен.

Предположим теперь, что теорема доказана для всех слабых расслоений и всех n с $1 \leq n < m$. Для любого слабого расслоения $p: E \rightarrow B$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi_m(E, E', e_0) & \xrightarrow{P_*} & \pi_m(B, B', b_0) \\ \parallel & & \parallel \\ \pi_{m-1}(P(E; e_0, E'), \omega_0) & \xrightarrow{P(p)_*} & \pi_{m-1}(P(B; b_0, B'), \omega_0) \\ \cong \downarrow J_* & & \downarrow j_* \cong \\ \pi_{m-1}(P(E; e_0, E'), PE', \omega_0) & \xrightarrow{P(p)_*} & \pi_{m-1}(P(B; b_0, B'), PB', \omega_0). \end{array}$$

Так как пространства PB' и PE' стягиваемы, то j_* является изоморфизмом в силу предложения 4.5, отображение $P(p)$ является слабым расслоением и, следовательно, по предположению индукции, $P(p)_*$ — изоморфизм. Поэтому p_* — также изоморфизм, что завершает шаг индукции. $\square$

Комбинируя точную гомотопическую последовательность пары (E, F, e_0) с изоморфизмом теоремы 4.6, мы получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
 \cdots & \xrightarrow{\quad} & \pi_{n+1}(E, F, e_0) & \xrightarrow{\partial} & \pi_n(F, e_0) & \xrightarrow{j_*} & \cdots \\
 & \searrow P_* & \downarrow \cong & & \downarrow P_* & & \\
 & & \pi_{n+1}(B, \{b_0\}, b_0) & \cong & \pi_{n+1}(B, b_0) & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 \pi_n(E, e_0) & \xrightarrow{j_*} & \pi_n(E, F, e_0) & \xrightarrow{\partial} & \cdots \\
 & \searrow P_* & \downarrow \cong & & \downarrow P_* \\
 & & \pi_n(B, b_0) & &
 \end{array}$$

Эта диаграмма порождает точную гомотопическую последовательность слабого расслоения $p: E \rightarrow B$

$$\begin{aligned}
 4.7. \quad & \cdots \xrightarrow{P_*} \pi_{n+1}(B, b_0) \xrightarrow{\partial'} \pi_n(F, e_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(E, e_0) \xrightarrow{P_*} \\
 & \pi_n(B, b_0) \rightarrow \cdots \xrightarrow{\partial'} \pi_0(F, e_0) \xrightarrow{j_*} \pi_0(E, e_0) \xrightarrow{P_*} \pi_0(B, b_0).
 \end{aligned}$$

4.8. Следствие. Если $p: E \rightarrow B$ — такое слабое расслоение, что пространство E стягиваемо, то для любого $n \geq 1$ гомоморфизм $\partial': \pi_n(B, b_0) \rightarrow \pi_{n-1}(F, e_0)$ является изоморфизмом.

Пример. В предложении 4.3 мы доказали, что $\pi: PX \rightarrow X$ является расслоением для любого X , а в предложении 4.4 установили стягиваемость пространства PX . Так как слой расслоения π — это пространство петлей ΩX , то согласно следствию 4.8 мы получаем изоморфизм $\partial': \pi_n(X, x_0) \cong \pi_{n-1}(\Omega X, \omega_0)$, едва ли неожиданный для читателя.

Теперь мы рассмотрим один класс наиболее часто встречающихся расслоений. Определяются они, однако, таким образом, что выполнение свойства накрывающей гомотопии относительно всех пространств совсем не очевидно. Мы ограничимся здесь лишь установлением того факта, что в результате получаются слабые расслоения.

4.9. Определение. Расслоенным пространством называется четверка (B, p, E, F) , состоящая из тотального пространства E , базы B , слоя F и проекции $p: E \rightarrow B$. При этом требуется существование такого открытого покрытия $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ пространства B и таких гомеоморфизмов

$$\phi_\alpha: U_\alpha \times F \rightarrow p^{-1}U_\alpha,$$

что $p \circ \phi_\alpha = p|_{U_\alpha}: U_\alpha \times F \rightarrow U_\alpha$ для каждого $\alpha \in A$. Другими словами, отображение $p: E \rightarrow B$ локально должно выглядеть как тривиальное расслоение¹⁾.

Можно показать, что для паракомпактного пространства B такое отображение $p: E \rightarrow B$ есть расслоение (см., например, [34]).

4.10. Предложение. Если (B, p, E, F) — расслоенное пространство, то $p: E \rightarrow B$ — слабое расслоение.

Доказательство. Пусть $f: D^n \rightarrow E$, $G: D^n \times I \rightarrow B$ — такие отображения, что $G_0 = p \circ f$. Выберем открытое покрытие $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ пространства B и гомеоморфизмы $\phi_\alpha: U_\alpha \times F \rightarrow p^{-1}U_\alpha$ такие, как в определении 4.9. Тогда открытые множества $\{G^{-1}U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ покрывают $D^n \times I$. Так как $D^n \times I$ — компактное метрическое пространство, то существует такое число $\lambda > 0$ (лебегово число покрытия), что каждое множество $S \subset D^n \times I$ диаметра $< \lambda$ содержится в некотором $G^{-1}U_\alpha$. Возьмем теперь настолько мелкую триангуляцию диска D^n , чтобы каждый симплекс σ имел диаметр $< \lambda/2$ и затем разобьем отрезок I внутренними точками $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ так, чтобы диаметр любого множества $\sigma \times [t_i, t_{i+1}]$ не превосходил λ , $0 \leq i < k$.

Предположим, что мы уже построили гомотопию H , накрывающую G на множестве $D^n \times [t_0, t_i]$ гомотопию $(H|_{D^n \times \{0\}} = f)$. Продолжим H на $D^n \times [t_0, t_{i+1}]$, используя индукцию по размерности симплексов σ из $D^n \times [t_i, t_{i+1}]$. Если $\dim \sigma = 0$, выберем номер $\alpha \in A$ так, чтобы $G(\sigma \times [t_i, t_{i+1}]) \subset U_\alpha$. Поскольку $p \circ H(\sigma, t_i) = G(\sigma, t_i)$, то $H(\sigma, t_i) \subset p^{-1}U_\alpha$. Положим $H(\sigma, t) = \phi_\alpha(G(\sigma, t))$, $\pi_F \phi_\alpha^{-1}(H(\sigma, t_i))$ для всех $t \in [t_i, t_{i+1}]$. Тогда гомотопия H непрерывна на $\sigma \times [t_i, t_{i+1}]$ и совпадает с ранее построенной гомотопией на $\sigma \times \{t_i\}$. Предположим теперь, что H уже построена на $\sigma' \times [t_i, t_{i+1}]$ для всех симплексов σ' с $\dim \sigma' < n$, и пусть $\dim \sigma = n$. Снова выберем номер $\alpha \in A$ таким образом, чтобы $G(\sigma \times [t_i, t_{i+1}]) \subset U_\alpha$. Гомотопия H уже определена на $\sigma \times \{t_i\} \cup \dot{\sigma} \times [t_i, t_{i+1}]$ (где через $\dot{\sigma}$ обозначена граница для σ). Применим прием, использованный при доказательстве предложения 4.5 и теоремы 4.6: существует гомеоморфизм $\sigma \times [t_i, t_{i+1}]$ на себя, переводящий $\sigma \times \{t_i\} \cup \dot{\sigma} \times [t_i, t_{i+1}]$ на $\sigma \times \{t_i\}$. Так как $p|_{U_\alpha}: U_\alpha \times F \rightarrow U_\alpha$ является расслоением, то мы можем найти поднятие в $U_\alpha \times F$ гомотопии $G|_{\sigma \times [t_i, t_{i+1}]}$, продолжающее $\phi_\alpha^{-1} \circ H|_{(\sigma \times \{t_i\}) \cup \dot{\sigma} \times [t_i, t_{i+1}]}$. Композиция с ϕ_α определяет поднятие $H|_{\sigma \times [t_i, t_{i+1}]}$. Это завершает шаг индукции. Тем самым гомотопия H продолжена на $D^n \times [0, t_{i+1}]$. Используя индукцию по i , построим гомотопию H , служащую поднятием гомотопии G на всем пространстве $D^n \times I$. $\square$

4.11. Опишем теперь одну важную конструкцию, позволяющую получать интересные расслоенные пространства. Пусть G — топо-

¹⁾ В дальнейшем автор, допуская некоторую вольность речи, называет расслоенным пространством просто проекцию $p: E \rightarrow B$ (позволяющую, впрочем, восстановить всю четверку (B, p, E, F)). — *Прим. перев.*

логическая группа и H — ее замкнутая подгруппа. Рассмотрим пространство G/H левых смежных классов по подгруппе H и проекцию $p: G \rightarrow G/H$; разумеется, G/H является группой в том и только в том случае, когда H есть нормальная подгруппа в G .

4.12. Определение. Говорят, что отображение $p: E \rightarrow B$ обладает *локальным сечением* в точке $x \in B$, если существуют такая окрестность $U \subset B$ точки x и такое отображение $\lambda: U \rightarrow E$, что $p \circ \lambda = 1_U$.

Замечание. Для того чтобы показать, что $p: G \rightarrow G/H$ обладает локальным сечением в любой точке из G/H , достаточно проверить, что p обладает локальным сечением в H . Действительно, группа G транзитивно действует на пространстве G/H по формуле $g \cdot (g'H) = (gg')H$. Пусть (U, λ) — локальное сечение для p в точке H . Для любой другой точки gH из G/H множество $g \cdot U$ служит окрестностью для gH , а отображение $\lambda_g: g \cdot U \rightarrow G$, задаваемое формулой $\lambda_g(g'H) = g \cdot \lambda(g^{-1}g'H)$, $g'H \in g \cdot U$, непрерывно и удовлетворяет условию $p \circ \lambda_g = 1_{g \cdot U}$.

Пространства G/H называются *однородными пространствами*. Приведенное выше замечание объясняет происхождение этого названия. Вообще, локальная структура в любой точке пространства G/H такая же, как локальная структура в точке H .

4.13. Теорема. Если $p: G \rightarrow G/H$ обладает локальным сечением в точке H , то для любой замкнутой подгруппы $K \subset H$ четверка $(G/H, p', G/K, H/K)$, где $p': G/K \rightarrow G/H$ — естественная проекция, является расслоенным пространством.

Доказательство. На основании сделанного выше замечания мы можем считать, что p обладает локальным сечением в любой точке G/H . Пусть $x \in G/H$ и (U, λ) — локальное сечение для p в точке x . Определим отображение $\phi: U \times H/K \rightarrow G/K$, полагая $\phi(y, hK) = \lambda(y) \cdot hK$ для любых $y \in U$, $h \in H$. Тогда ϕ непрерывно и $p' \circ \phi(y, hK) = p'(\lambda(y) \cdot hK) = \lambda(y) \cdot h \cdot H = \lambda(y) \cdot H = p(\lambda(y)) = y$ для $y \in U$, $h \in H$. Пусть $\psi: (p')^{-1}(U) \rightarrow U \times H/K$ — отображение, задаваемое формулой $\psi(gK) = (gH, \lambda(gH)^{-1} \cdot gK)$, $gK \in (p')^{-1}(U)$. Нетрудно видеть, что ψ непрерывно и $\psi \circ \phi = 1_{U \times H/K}$, $\phi \circ \psi = 1_{(p')^{-1}(U)}$. $\square$

Замечание. Предположение о существовании локального сечения является необходимым, так как очевидно, что любое расслоенное пространство обладает локальными сечениями.

4.14. Примеры. 1) Обозначим через $O(n)$ группу ортогональных $(n \times n)$ -матриц. Если $k \leq n$, то группа $O(k)$ вкладывается в $O(n)$: для этого достаточно рассмотреть $O(k)$ как подмножество матриц из $O(n)$ вида

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{bmatrix},$$

где A — ортогональная $(k \times k)$ -матрица, а I_{n-k} — единичная $(n-k) \times (n-k)$ -матрица.

Рассмотрим $O(n)$ как подпространство в $\mathbb{R}^n$; в индуцированной топологии группа $O(n)$ компактна, а $O(k)$ — ее замкнутая подгруппа.

Пусть $V_{k,n} = V_{k,n}(\mathbb{R}) = \{(v_1, \dots, v_k): v_i \in \mathbb{R}^n, \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}, 1 \leq i, j \leq k\}$. Элементы множества $V_{k,n}$ называются k -реперами в $\mathbb{R}^n$. Снабдим множество $V_{k,n}$ топологией, рассматривая его как подпространство в $\mathbb{R}^{nk}$; в этой топологии $V_{k,n}$ компактно. Пространство $V_{k,n}$ называется *многообразием Штифеля k -реперов* в $\mathbb{R}^n$.

Определим отображение $\phi_{k,n}: O(n)/O(n-k) \rightarrow V_{k,n}$, полагая $\phi_{k,n}(AO(n-k)) = \{Ae_{n-k+1}, \dots, Ae_n\}$ для $A \in O(n)$. Ясно, что определение корректно, так как репер $\phi_{k,n}(AO(n-k))$ зависит только от смежного класса $AO(n-k)$. Легко видеть, что $\phi_{k,n}$ биективно и непрерывно. Так как оба пространства $O(n)/O(n-k)$ и $V_{k,n}$ хаусдорфовы и компактны, то $\phi_{k,n}$ — гомеоморфизм.

Существует очевидный гомеоморфизм $V_{1,n} \cong S^{n-1}$, так что $O(n)/O(n-1) \cong S^{n-1}$. Кроме того, непосредственно проверяется, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} O(n)/O(n-1) & \xrightarrow{\phi_{1,n}} & V_{1,n} \\ p' \downarrow & & \downarrow q \\ O(n)/O(n-k) & \xrightarrow{\phi_{k,n}} & V_{k,n} \end{array}$$

где $\tilde{q}(v_1, \dots, v_l) = (v_{l-k+1}, \dots, v_l)$, коммутативна для всех $k \leq l$.

Покажем, что отображение $p: O(n) \rightarrow O(n)/O(n-k)$ обладает локальным сечением в точке $O(n-k)$. С этой целью построим локальное сечение отображения $q: V_{n,n} \rightarrow V_{k,n}$ в точке $(e_{n-k+1}, \dots, e_n)$. Рассмотрим в $V_{k,n}$ подмножество U , состоящее из таких реперов $(v_1, \dots, v_k)$, что векторы $e_1, \dots, e_{n-k}, v_1, \dots, v_k$ линейно независимы. Легко видеть, что U — открытая окрестность точки $(e_{n-k+1}, \dots, e_n)$ в $V_{k,n}$, что $(v_1, v_k) \in U$ тогда и только тогда, когда векторы $(e_1, \dots, e_{n-k}, v_1, \dots, v_k)$ линейно независимы. Определим $\lambda: U \rightarrow V_{k,n}$ следующим образом. Процесс ортогонализации Грама — Шмидта определяет каноническую непрерывную процедуру, которая сопоставляет каждому множеству $(u_1, \dots, u_n)$ линейно независимых векторов из $\mathbb{R}^n$ ортонормированное множество $(u'_1, \dots, u'_n)$, где

$$u'_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}, u'_{n-1} = \frac{u_{n-1} - \langle u_{n-1}, u_n \rangle u'_n}{\|u_{n-1} - \langle u_{n-1}, u_n \rangle u'_n\|},$$

и т. д. Для $(v_1, \dots, v_k) \in U$ положим $\lambda(v_1, \dots, v_k) = (e'_1, \dots, e'_{n-k}, v'_1, \dots, v'_k)$. Так как $v'_i = v_i$, $1 \leq i \leq k$, то $q \cdot \lambda = 1_U$. Таким образом, $p': O(n)/O(n-1) \rightarrow O(n)/O(n-k)$, $k \leq l$, есть расслоенное пространство со слоем $O(n-k)/O(n-1)$ и, значит, $q: V_{l,n} \rightarrow V_{k,n}$ — расслоенное пространство со слоем $V_{l-k,n-k}$. В частности, слой

расслоенного пространства

$$p: O(n)/O(n-k-1) \rightarrow O(n)/O(n-k)$$

есть $O(n-k)/O(n-k-1) \cong S^{n-k-1}$.

2) Обозначим через $O(n-k) \times O(k)$ подгруппу в $O(n)$, состоящую из матриц вида

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix},$$

где A — ортогональная $(n-k) \times (n-k)$ -матрица, а B — ортогональная $(k \times k)$ -матрица. Пусть $G_{k,n} = G_{k,n}(\mathbb{R})$ — множество всех k -мерных линейных подпространств из $\mathbb{R}^n$. Существует очевидная сюръекция $\pi: V_{k,n} \rightarrow G_{k,n}$, задаваемая формулой $\pi(v_1, \dots, v_k) = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$, где $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ — подпространство, натянутое на векторы $v_1, \dots, v_k$. Снабдим $G_{k,n}$ фактортопологией, индуцированной отображением π .

Определим отображение $\psi_{k,n}: O(n)/O(n-k) \times O(k) \rightarrow G_{k,n}$, полагая $\psi_{k,n}(A(O(n-k) \times O(k))) = \langle Ae_{n-k+1}, \dots, Ae_n \rangle$. Очевидно, что отображение $\psi_{k,n}$ определено корректно и что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} O(n)/O(n-k) & \xrightarrow{\phi_{k,n}} & V_{k,n} \\ p' \downarrow & & \downarrow \pi \\ O(n)/O(n-k) \times O(k) & \xrightarrow{\psi_{k,n}} & G_{k,n} \end{array}$$

коммутативна. Следовательно, отображение $\psi_{k,n}$ непрерывно. Так как $\psi_{k,n}$ биективно, то оно является гомеоморфизмом. В частности, $O(n)/O(n-1) \times O(1) \cong G_{1,n} \cong \mathbb{R}P^{n-1} = \{(n-1)\text{-мерное вещественное проективное пространство}\}$.

Построим локальное сечение отображения $\pi: V_{k,n} \rightarrow G_{k,n}$ в точке $\langle e_{n-k+1}, \dots, e_n \rangle$. В качестве её окрестности U' возьмем все такие k -мерные подпространства W из $\mathbb{R}^n$, для которых $\langle e_1, \dots, e_{n-k} \cap W = \{0\}$. Если $W \in U'$, то ортогональные проекции $\bar{e}_i$ векторов e_i на W , $n-k+1 \leq i \leq n$, линейно независимы. Применяя процесс Грама — Шмидта, получаем k -репер $(\bar{e}'_{n-k+1}, \dots, \bar{e}'_n)$. Положим $\lambda'(W) = (\bar{e}'_{n-k+1}, \dots, \bar{e}'_n) \in V_{k,n}$. Очевидно, что $\pi \circ \lambda' = 1_{U'}$. Если (U, λ) — локальное сечение для $q: V_{n,n} \rightarrow V_{k,n}$, построенное в измере 1), то $U \supset \lambda'(U')$ и $(U', \lambda \circ \lambda')$ является локальным сечением отображения $\pi \circ q$. Значит, $p': O(n)/O(n-k) \rightarrow O(n)/O(n-k) \times O(k)$ и $\pi: V_{k,n} \rightarrow G_{k,n}$ представляют собой расслоенные пространства со слоями $O(k)$ и $V_{k,k}$ соответственно.

Пространство $G_{k,n}$ называется *многообразием Грассмана k -мерных плоскостей в $\mathbb{R}^n$* .

3) В группе $O(n)$ содержится подгруппа $SO(n)$ ортогональных матриц с определителем 1. Имеет место точная последовательность

$$\{I\} \rightarrow SO(n) \rightarrow O(n) \xrightarrow{\det} \mathbb{Z}_2 \rightarrow \{1\},$$

где через $\mathbb{Z}_2$ обозначена мультипликативная подгруппа $\{-1, +1\}$ группы $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$. Сечение отображения $\det$ задается формулой

$$\lambda(\pm 1) = \begin{pmatrix} \pm 1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}.$$

4) Обозначим через $U(n)$ группу унитарных $(n \times n)$ -матриц, рассматриваемую как подпространство в $\mathbb{C}^n$. Существуют вложения $U(1) \subset U(2) \subset \dots \subset U(n) \subset \dots$, и $U(n)/U(n-k) \cong V_{k,n}(\mathbb{C})$, где $V_{k,n}(\mathbb{C})$ — пространство всех k -реперов в $\mathbb{C}^n$. Локальные сечения строятся точно так же, как в примере 1).

5) $U(n)/U(n-k) \times U(k) \cong G_{k,n}(\mathbb{C})$, где $G_{k,n}(\mathbb{C})$ — пространство всех комплексных k -мерных линейных подпространств в $\mathbb{C}^n$.

6) В группе $U(n)$ содержится подгруппа $SU(n)$ унитарных матриц с определителем 1. В этом случае мы получаем точную последовательность

$$\{I\} \rightarrow SU(n) \rightarrow U(n) \xrightarrow{\det} S^1 \rightarrow \{1\},$$

где через S^1 обозначена мультипликативная группа всех комплексных чисел, модуль которых равен 1. Сечение отображения $\det$ задается формулой

$$\lambda(z) = \begin{pmatrix} z & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}, \quad z \in S^1.$$

7) Аналогичным образом определяются расслоения $Sp(n) \rightarrow V_{k,n}(\mathbb{H})$ со слоем $Sp(n-k)$ и $V_{k,n}(\mathbb{H}) \rightarrow G_{k,n}(\mathbb{H})$ со слоем $V_{k,k}(\mathbb{H})$, где $Sp(n)$ — группа симплектических $(n \times n)$ -матриц (через $\mathbb{H}$ обозначено тело кватернионов).

Отметим, что $V_{1,n}(\mathbb{C}) \cong S^{2n-1}$, $V_{1,n}(\mathbb{H}) \cong S^{4n-1}$, $G_{1,n}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}P^{n-1}$, $G_{1,n}(\mathbb{H}) \cong \mathbb{H}P^{n-1}$.

4.15. Предложение. Вложение $i: SO(n) \rightarrow O(n)$ индуцирует изоморфизм $i_*: \pi_q(SO(n), 1) \rightarrow \pi_q(O(n), 1)$, $q \geq 1$. Кроме того, $\pi_q(SO(1), 1) = 0$, $q \geq 0$, $\pi_q(O(1), 1) = 0$, $q \geq 1$, $\pi_0(O(1), 1) = \mathbb{Z}_2$ и $\pi_q(SO(2), 1) \cong \pi_q(S^1, s_0)$, $q \geq 0$.

Доказательство. Пример 3) из 4.14 доставляет нам точную последовательность

$$\dots \rightarrow \pi_{q+1}(\mathbb{Z}_2, 1) \rightarrow \pi_q(SO(n), 1) \xrightarrow{i_*} \pi_q(O(n), 1) \rightarrow \pi_q(\mathbb{Z}_2, 1)$$

и $\pi_q(\mathbb{Z}_2, 1) = 0$ для $q \geq 1$. Отсюда следует первое утверждение. Остальные утверждения следуют из того факта, что $SO(1) = \{1\}$, $O(1) = \{-1, 1\}$ и $SO(2) \cong S^1$. $\square$

4.16. Определение. Расслоенное пространство (B, p, E, F) с дискретным слоем F называется *накрытием* пространства B . Отображение p называется *накрывающей проекцией*, а пространство E — *накрывающим пространством* над B .

Так как пространство F дискретно, то $\pi_n(F, e_0) = \pi_n(\{e_0\}, e_0) = 0$ для $n \geq 1$. Таким образом, мы получаем следующее утверждение.

4.17. Предложение. Если $p: \tilde{X} \rightarrow X$ — накрытие пространства X , то $p_*: \pi_n(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$ — изоморфизм для любого $n > 1$ и мономорфизм для $n = 1$. Если пространство $\tilde{X}$ линейно связно, то точки слоя F находятся во взаимно однозначном соответствии со смежными классами группы $\pi_1(X, x_0)$ по подгруппе $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$.

4.18. Примеры. i) Рассмотрим S^1 как окружность в $\mathbb{C}$: $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Пусть $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ задано формулой $p(t) = e^{2\pi i t}$, $t \in \mathbb{R}$. Покажем, что p — накрывающая проекция. Пусть $U_1 = S^1 - \{1\}$ и $U_2 = S^1 - \{-1\}$. Тогда $\{U_1, U_2\}$ служит открытым покрытием окружности S^1 . Определим отображение $\phi_1: U_1 \times \mathbb{Z} \rightarrow p^{-1}U_1$ ($\mathbb{Z}$ — группа целых чисел), полагая $\phi_1(z, n) = n + (1/2\pi i) \ln z$, где $\ln z$ — главная ветвь логарифма на $\mathbb{C} - \{r \in \mathbb{R} : r \geq 0\}$. Аналогично, определим отображение $\phi_2: U_2 \times \mathbb{Z} \rightarrow p^{-1}U_2$ формулой $\phi_2(z, n) = n + (1/2\pi i) \ln z$, где $\ln z$ — главная ветвь логарифма на $\mathbb{C} - \{r \in \mathbb{R} : r \leq 0\}$. В каждом из двух случаев мы имеем $p \circ \phi_i = pU_i$. Кроме того, ϕ_1^{-1} задается формулой $\phi_1^{-1}(r) = (e^{2\pi i r}, [r])$, где $[r]$ — целая часть числа r , $r \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} = p_1^{-1}U_1$, а ϕ_2^{-1} — формулой $\phi_2^{-1}(r) = (e^{2\pi i r}, [r + \frac{1}{2}])$, $r \in p_2^{-1}U_2$. Следовательно, ϕ_1, ϕ_2 — гомеоморфизмы, что и требовалось.

Итак, в силу предложения 4.17 мы имеем $\pi_n(S^1, s_0) \cong \pi_n(\mathbb{R}, 0)$ для $n \geq 1$. Поскольку пространство $\mathbb{R}$ стягиваемо, отсюда следует, что $\pi_n(S^1, s_0) = 0$ для любого $n > 1$. Из точности гомотопической последовательности 4.7 мы получаем также, что имеют место биекции $\pi_1(S^1, s_0) \cong \pi_0(F, 0) = \pi_0(\mathbb{Z}, 0) = \mathbb{Z}$. В самом деле, при этом классу $[1_{S^1}] \in \pi_1(S^1, s_0)$ соответствует $1 \in \mathbb{Z}$ и нетрудно проверить, что классу $[z \rightarrow z^n]$ соответствует $n \in \mathbb{Z}$. Кроме того, $[z \rightarrow z^n] * [z \rightarrow z^m] = [z \rightarrow z^{n+m}]$, так что имеет место и групповой изоморфизм $\pi_1(S^1, s_0) \cong \mathbb{Z}$.

ii) По определению n -мерным тором T^n называется n -кратное декартово произведение $S^1 \times \dots \times S^1$. Отображение $p: \mathbb{R}^n \rightarrow T^n$, заданное формулой $p(r_1, r_2, \dots, r_n) = (e^{2\pi i r_1}, e^{2\pi i r_2}, \dots, e^{2\pi i r_n})$, является накрывающей проекцией. Слой — это целочисленная решетка в $\mathbb{R}^n$. Так как пространство $\mathbb{R}^n$ стягиваемо, то $\pi_k(T^n, *) = 0$

при $k \geq 2$. Этот результат можно вывести также из теоремы 4.1:

$$\pi_k(T^n, *) = \prod_{i=1}^n \pi_k(S^1, s_0) = 0, \quad k \geq 2,$$

$$\pi_1(T^n, *) = \prod_{i=1}^n \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}.$$

Основным источником накрытий служит следующая конструкция.

4.19. Говорят, что топологическая группа G действует на топологическом пространстве X , если задано такое непрерывное отображение $\alpha: G \times X \rightarrow X$, что диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \text{i)} & X & \xrightarrow{(e, 1)} G \times X \\ & \searrow 1 & \downarrow \alpha \\ & & X, \end{array} \quad \text{ii)} \quad \begin{array}{ccc} G \times G \times X & \xrightarrow{1 \times \alpha} & G \times X \\ \downarrow \mu \times 1 & & \downarrow \tilde{\alpha} \\ G \times X & \xrightarrow{\alpha} & X \end{array}$$

коммутативны. Здесь $\mu: G \times G \rightarrow G$ — умножение в группе G и $(e, 1)(x) = (e, x)$ для каждого $x \in X$, где e — единица группы G (ср. с определением 2.42). Множество $Gx \subset X$ называется *орбитой* точки $x \in X$.

Введем на X отношение эквивалентности $\sim$, полагая $x \sim x'$ тогда и только тогда, когда существует такой элемент $g \in G$, что $gx = x'$. Факторпространство $X/\sim$ по этому отношению эквивалентности есть не что иное, как пространство орбит, которое мы обозначим через X/G . Пусть G — дискретная группа с единицей e . Говорят, что G действует на X *вполне разрывно*, если

а) для каждой точки $x \in X$ существует такая окрестность U_x , что $gU_x \cap U_x \neq \emptyset \Rightarrow g = e$;

б) для любых точек $y, x \in X$, $y \notin Gx$, найдутся такие их окрестности V_y, V_x , что $gV_x \cap V_y = \emptyset$ для всех $g \in G$.

Из условия б) следует, что пространство X/G хаусдорфово. Покажем теперь, что при выполнении условия а) проекция $q: X \rightarrow X/G$ является накрытием.

4.20. Предложение. Если дискретная группа G действует на пространстве X вполне разрывно, то $(X/G, q, X, G)$ является накрытием.

Доказательство. Для любой точки $z \in X/G$ выберем $x \in X$ с $q(x) = z$. Пусть U_x — окрестность точки x , удовлетворяющая условию а). Положим $W_z = q(U_x)$. Тогда $q^{-1}W_z = \bigcup_{g \in G} gU_x$, так что множество W_z открыто и $z \in W_z$. Более того, ограничение $q|_{U_x}$ является гомеоморфизмом открытых множеств U_x и W_z . Определим отображение $\phi_z: W_z \times G \rightarrow q^{-1}W_z$, полагая $\phi_z(y, g) =$

$g \cdot (q|U_x)^{-1}y$, $g \in G$, $y \in W_z$. Тогда существует отображение ϕ_z^{-1} , задаваемое формулой $\phi_z^{-1}(gy') = (q(y'), g)$ для $gy' \in gU_x$. Следовательно, ϕ_z — гомеоморфизм и непосредственно проверяется, что $q \cdot \phi_z = p_{W_z}$. Так как открытые множества W_z покрывают X/G , то $(X/G, q, \tilde{X}, G)$ — накрытие. $\square$

4.21. Замечания. i) Предположим, что пространство X линейно связно. Можно показать, что отображение

$$\partial: \pi_1(X/G, *) \rightarrow \pi_0(F, x_0) = G$$

является гомоморфизмом и последовательность

$$0 \rightarrow \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{q_*} \pi_1(X/G, *) \xrightarrow{\partial} G \rightarrow 0$$

точна. Гомеоморфизмы $T_g(x) = gx$ пространства X определяют действие группы G на $\pi_n(X, x_0)$, $n \geq 1$, а именно: $g\gamma = \theta([w_g], (T_g)_*(\gamma))$, где $\gamma \in \pi_n(X, x_0)$, а w_g — некоторый фиксированный путь из x_0 в $T_g(x_0)$. Если $\pi_1(X, x_0) = 0$, то $\pi_1(X/G, *) \cong G$, и мы получаем действие группы G на $\pi_n(X/G, *)$, см. предложение 3.30. Оказывается, что $q_*: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(X/G, *)$ является гомоморфизмом групп с G -действием: $q_*(g\gamma) = g \cdot q_*(\gamma)$, $g \in G$, $\gamma \in \pi_n(X, x_0)$.

ii) Накрытие $p: \tilde{X} \rightarrow X$ называется *регулярным* накрытием, если $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ — нормальная подгруппа группы $\pi_1(X, x_0)$. Таким образом, накрытия $g: X \rightarrow X/G$ из предложения 4.20 всегда регулярны. Можно показать, что любое регулярное накрытие имеет такой вид.

iii) Если G — конечная дискретная группа, действующая на пространстве X так, что ни один ее элемент не имеет неподвижных точек (т. е. $gx = x \Rightarrow g = e$) и X хаусдорфово, то легко видеть, что G действует вполне разрывно.

iv) Группа $\mathbb{Z}$ вполне разрывно действует на $\mathbb{R}$ по формуле

$$n \cdot r = r + n.$$

Для накрывающих пространств имеется хорошо развитая теория; интересующийся читатель может познакомиться с ней, например, по книге [72]. Обстоятельное изложение теории расслоенных пространств см. в [73].

4.22. У п р а ж н е н и е. i) Пусть $p: E \rightarrow B$ — некоторое отображение. Рассмотрим множество

$$Z = \{(e, w) \in E \times B^I: p(e) = w(0)\} \subset E \times B^I.$$

Говорят, что p удовлетворяет аксиоме о накрывающем пути, если существует такое отображение $\lambda: Z \rightarrow E^I$, что $\lambda(e, w)(0) = e$ и $p \cdot \lambda(e, w) = w$. Показать, что p является расслоением тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет аксиоме о накрывающем пути.

ii) Пусть $p: E \rightarrow B$ — расслоение со слоем F . Обозначим через $\lambda: Z \rightarrow E^I$ какое-нибудь отображение из предыдущей задачи и

определим отображения

$$g: F \rightarrow P_p, \quad h: P_p \rightarrow F \quad (P_p \text{ определено в п. 2.52}),$$

полагая

$$g(f) = (f, \omega_0) \in P_p, \quad f \in F \quad (\omega_0 - \text{тривиальный путь в } B), \\ h(e, \omega) = [\lambda(e, \omega^{-1})](1).$$

Показать, что отображения g, h гомотопически обратны друг другу.

Вывести отсюда существование точной последовательности

$$\dots \rightarrow \Omega^2 B \rightarrow \Omega F \xrightarrow{\Omega i} \Omega E \xrightarrow{\Omega p} \Omega B \xrightarrow{\bar{p}} F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B,$$

где $\bar{p}(\omega) = [\lambda(e_0, \omega^{-1})](1)$, $\omega \in \Omega B$. Применение к этой последовательности функтора $[S^0, +1; -]$ дает точную гомотопическую последовательность расслоения $p: E \rightarrow B$.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Расслоенные пространства совершенно независимо от их замечательных гомотопических свойств играют важную роль в геометрии и, прежде всего, в теории дифференцируемых многообразий. Мы познакомимся с этим аспектом теории расслоенных пространств в главах 11 и 12.

ССЫЛКИ НА ЛИТЕРАТУРУ

1. Дольд [35].
2. Стинрод [73].
3. Хьюзмоллер [96].

В общем случае задача вычисления гомотопических групп чрезвычайно сложна, и потому запас полезных сведений о гомотопических группах произвольных топологических пространств очень мал. Одна из имеющихся здесь трудностей заключается в том, что для данных топологических пространств X и Y обычно весьма непросто построить какое-либо нетривиальное отображение $f: X \rightarrow Y$. В связи с этим разумно ограничиться пространствами, состоящими из элементарных «строительных блоков» (например симплексов), и пытаться строить отображения, шаг за шагом продолжая их на эти блоки. В настоящей главе мы опишем полезную категорию таких пространств (именно, клеточных пространств) и выявим ряд их элементарных свойств. Более глубокие гомотопические свойства клеточных пространств будут доказаны в следующей главе.

Все рассматриваемые здесь пространства предполагаются хаусдорфовыми.

5.1. Определение. *Клеточным разбиением* K пространства X называется семейство $K = \{e_\alpha^n: n = 0, 1, 2, \dots; \alpha \in J_n\}$ подмножеств из X , индексированных неотрицательными целыми числами n и элементами α , пробегающими для каждого n некоторое множество J_n . Множество e_α^n называется *клеткой размерности n* . Клетки должны удовлетворять некоторым условиям, которые мы сформулируем ниже.

Положим $K^n = \{e'_\alpha: r \leq n, \alpha \in J_r\}$, $n \geq 0$. Если мы работаем в категории $\mathcal{T}$, то по определению считаем, что $K^n = \emptyset$ при $n < 0$. Если же мы рассматриваем категорию $\mathcal{PS}$, то отмеченная точка x_0 считается клеткой размерности $-\infty$, и в этом случае $K^n = \{\{x_0\}\}$, $n < 0$. Множество K^n называется *n -мерным остовом разбиения K* . Положим $|K^n| = \bigcup_{\substack{r \leq n \\ \alpha \in J_r}} e'_\alpha$. Заметим, что $|K^n|$

является подпространством пространства X , в то время как K — это семейство клеток. Для каждой клетки e_α^n введем следующие обозначения:

$$\dot{e}_\alpha^n = e_\alpha^n \cap |K^{n-1}|,$$

$$\dot{e}_\alpha^n = e_\alpha^n - \dot{e}_\alpha^n.$$

Множество $\dot{e}_\alpha^n$ называется *границей* клетки e_α^n , а $\dot{e}_\alpha^n$ — ее *внутренность*. Требуется, чтобы K удовлетворяло следующим условиям:

$$i) X = \bigcup_{n, \alpha} e_\alpha^n = |K|;$$

$$ii) \dot{e}_\alpha^n \cap \dot{e}_\beta^m \neq \emptyset \Rightarrow n = m, \alpha = \beta;$$

iii) для каждой клетки e_α^n существует сюръективное отображение

$$f_\alpha^n: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (e_\alpha^n, \dot{e}_\alpha^n),$$

гомеоморфно отображающее $\dot{D}^n$ на $\dot{e}_\alpha^n$.

Отображение f_α^n называется *характеристическим отображением* клетки e_α^n . Различные авторы по-разному относятся к вопросу о том, являются ли характеристические отображения частью клеточной структуры. Мы приняли здесь ту точку зрения, согласно которой f_α^n входят в определение клеточного разбиения.

Из условия iii) вытекает, что каждая клетка e_α^n является компактным подмножеством в X и, следовательно, замкнута, поскольку X предполагается хаусдорфовым. Условия i) и ii) означают, что X представляет собой несвязное объединение внутренних¹⁾ $\dot{e}_\alpha^n$.

Для любого n существует разбиение, не содержащее n -мерных клеток, т. е. такое, что $J_n = \emptyset$. Заметим однако, что в $\mathcal{F}$ из условия $J_0 = \emptyset$ следует, что $X = \emptyset$.

5.2. Определение. Положим

$$\dim K = \sup \{n: J_n \neq \emptyset\}.$$

Число $\dim K$ может равняться ∞ .

Клетка e_β^m называется *непосредственной гранью* клетки e_α^n , если $\dot{e}_\beta^m \cap e_\alpha^n \neq \emptyset$. Таким образом, любая клетка e_α^n является непосредственной гранью самой себя, и если e_β^m — любая другая непосредственная грань, то $m < n$. Клетка e_β^m называется *гранью* клетки e_α^n , если существует такая конечная последовательность клеток

$$e_\beta^m = e_{\beta_0}^{m_0}, \quad e_{\beta_1}^{m_1}, \quad \dots, \quad e_{\beta_s}^{m_s} = e_\alpha^n,$$

что каждая $e_{\beta_i}^{m_i}$ является непосредственной гранью $e_{\beta_{i-1}}^{m_{i-1}}$, $0 \leq i < s$. Клетка называется *главной*, если она не является гранью никакой другой клетки. Например, если $\dim K = n < \infty$, то все n -мерные клетки являются главными.

Замечание. Вообще говоря, $\dot{e}_\alpha^n$ не является открытым подмножеством пространства X . Более того, даже внутренности глав-

¹⁾ Это можно доказать индукцией по остовам. — *Прим. ред.*

ных клеток не всегда бывают открытыми. Это связано с тем обстоятельством, что бесконечные клеточные разбиения могут иметь очень плохие топологии.

5.3. Определение. Будем говорить, что на X задана структура *клеточного пространства*, если оно обладает клеточным разбиением K с двумя свойствами:

(C) каждая замкнутая клетка имеет лишь конечное число непосредственных граней;

(W) X наделено слабой топологией, индуцированной разбиением K , т. е. подмножество $S \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда пересечение $S \cap e_\alpha^n$ замкнуто в e_α^n (для любого n и любого $\alpha \in J_n$).

Так как характеристическое отображение f_α^n индуцирует гомеоморфизм между e_α^n и факторпространством $D^n / \sim$ (где $x \sim y$ тогда и только тогда, когда $f_\alpha^n x = f_\alpha^n y$), то из условия (W) вытекает, что $S \subset X$ замкнуто в том и только в том случае, когда прообразы $(f_\alpha^n)^{-1}(S)$ замкнуты в диске D^n для всех n, α . Кроме того, очевидно, что внутренности главных клеток являются открытыми множествами в клеточном пространстве.

В подавляющем большинстве случаев мы будем называть X клеточным пространством, если на нем можно ввести какую-либо структуру K клеточного пространства. Следует отметить, однако, что если X допускает хотя бы одну клеточную структуру, то на нем можно ввести много таких структур.

5.4. Примеры. 1) Любое симплициальное пространство является клеточным пространством.

2) Снабдим n -мерную сферу S^n двумя различными структурами клеточного пространства, каждая из которых широко используется в алгебраической топологии.

а) Возьмем в качестве единственной нульмерной клетки отмеченную точку s_0 и в качестве единственной n -мерной клетки — саму сферу S^n . Таким образом, $e^0 = s_0$, $e^n = S^n$. Характеристическое отображение $f: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (e^n, \dot{e}^n) = (S^n, s_0)$ устроено очевидным образом. Например, если рассматривать диск D^n как конус CS^{n-1} над сферой S^{n-1} , то в качестве f можно взять композицию

$$CS^{n-1} \rightarrow CS^{n-1}/S^{n-1} \cong SS^{n-1} \cong S^n.$$

б) Вторая клеточная структура содержит по две клетки в каждой размерности от 0 до n . Проще всего описать эту клеточную структуру по индукции. Пусть мы уже разбили на клетки сферу S^{n-1} ; рассмотрим ее как экватор в сфере S^n . Положим $|K^{n-1}| = S^{n-1}$ и $e_+^n = H_+^n$, $e_-^n = H_-^n$ (верхняя и нижняя полусферы сферы S^n). В качестве характеристических отображений $f_\pm^n: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (e_\pm^n, \dot{e}_\pm^n) = (H_\pm^n, S^{n-1})$ возьмем отображения $p_\pm$, опре-

деленные в доказательстве леммы 2.27. В нашем случае $f_{\pm}^n|S^{n-1}$ является гомеоморфизмом, а именно, $f_{\pm}^n|S^{n-1} = 1_{S^{n-1}}$.

3) Обозначим через $\mathbb{R}^{\infty}$ множество всех последовательностей $(x_1, x_2, \dots)$, $x_i \in \mathbb{R}$, в которых лишь конечное число элементов отлично от нуля. Тогда

$$\mathbb{R}^0 \subset \mathbb{R}^1 \subset \dots \subset \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \subset \dots \subset \mathbb{R}^{\infty}.$$

Снабдим множество $\mathbb{R}^{\infty}$ слабой топологией, т. е. будем считать, что подмножество $S \subset \mathbb{R}^{\infty}$ замкнуто тогда и только тогда, когда пересечения $S \cap \mathbb{R}^n$ замкнуты в $\mathbb{R}^n$ для всех n . Тогда мы имеем в $\mathbb{R}^{\infty}$ последовательность вложенных друг в друга сфер

$$S^0 \subset S^1 \subset \dots \subset S^n \subset S^{n+1} \subset \dots \subset S^{\infty},$$

где $S^{\infty} = \bigcup_{n \geq 0} S^n$. Ясно, что можно снабдить S^{∞} структурой клеточного пространства K с двумя клетками в каждой размерности так, чтобы $|K^n| = S^n$.

4) Вещественное проективное n -мерное пространство $\mathbb{R}P^n$ определяется как множество всех прямых, проходящих через начало координат 0 в $\mathbb{R}^{n+1}$. Зададим в $\mathbb{R}P^n$ топологию, рассматривая его как факторпространство $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\} / \sim$, где $x \sim x'$ в $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ тогда и только тогда, когда существует $r \in \mathbb{R}^1 - \{0\}$ с $x' = rx$. Пусть $q': \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}P^n$ — естественная проекция. Обозначим точку $q'(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}P^n$ через $[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}]$. Тем самым в $\mathbb{R}P^n$ вводятся так называемые однородные координаты. Пусть $q: S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ — ограничение на S^n отображения q' . Для любого $x \in \mathbb{R}P^n$ прообраз $q^{-1}x$ состоит ровно из двух антиподальных точек сферы S^n , так что $\mathbb{R}P^n$ можно рассматривать также как факторпространство, полученное отождествлением антиподальных точек сферы S^n . Из этой интерпретации проективного пространства $\mathbb{R}P^n$ следует, что оно хаусдорфово и компактно.

Точно так же, как мы считаем $\mathbb{R}^n$ подпространством в $\mathbb{R}^{n+1}$, мы можем считать проективное пространство $\mathbb{R}P^{n-1}$ подпространством в $\mathbb{R}P^n$:

$$\mathbb{R}P^{n-1} = \{[x_1, \dots, x_{n+1}]: x_{n+1} = 0\}.$$

Зададим на $\mathbb{R}P^n$ структуру клеточного пространства K с одной клеткой в каждой размерности, лежащей в пределах от 0 до n включительно. Это можно сделать следующим образом. Предположим, что $\mathbb{R}P^{n-1}$ уже снабжено такой клеточной структурой. Возьмем тогда в $\mathbb{R}P^n$ в качестве $|K^{n-1}|$ подпространство $\mathbb{R}P^{n-1}$ и положим $e^n = \mathbb{R}P^n$. Характеристическое отображение

$$j^n: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (e^n, \dot{e}^n) = (\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^{n-1})$$

определяется как композиция

$$(D^n, S^{n-1}) \xrightarrow{p_{\pm}} (H_+^n, S^{n-1}) \subset (S^n, S^{n-1}) \xrightarrow{q} (\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^{n-1}).$$

Таким образом, f^n задается формулой

$$f^n(x_1, \dots, x_n) = \left[x_1, x_2, \dots, x_n, \sqrt{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2} \right].$$

На $\mathbb{R}P^1 - \mathbb{R}P^{n-1} = \dot{e}^n$ можно определить отображение g^n , обратное к $f^n|_{\dot{D}^n}$. С этой целью положим

$$g^n([x_1, \dots, x_{n+1}]) = \left(\frac{x_1 x_{n+1}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} (x_i x_{n+1})^2}}, \dots, \frac{x_n x_{n+1}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} (x_i x_{n+1})^2}} \right).$$

Таким образом, $f^n|_{\dot{D}^n}$ представляет собой гомеоморфизм открытого диска $\dot{D}^n$ на $\dot{e}^n$.

Подобно «бесконечномерной сфере» S^∞ определим $\mathbb{R}P^\infty$ как объединение $\bigcup_{n \geq 0} \mathbb{R}P^n$, снабженное слабой топологией. Тогда $\mathbb{R}P^\infty$

обладает структурой клеточного пространства с единственной клеткой в каждой размерности.

5) Комплексное проективное n -мерное пространство $\mathbb{C}P^n$ определяется как множество всех комплексных прямых, проходящих через начало координат 0 комплексного аффинного пространства $\mathbb{C}^{n+1}$. Введем в $\mathbb{C}P^n$ топологию, рассматривая его как факторпространство $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\} / \sim$, где $x \sim x'$ в $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ тогда и только тогда, когда существует $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ с $x' = zx$. Пусть $q': \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ — естественная проекция. Зададим в $\mathbb{C}P^n$ однородные координаты, полагая $[x_1, \dots, x_{n+1}] = q'(x_1, \dots, x_{n+1})$, где $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$. Ограничение q' на S^{2n+1} индуцирует отображение $\eta: S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$, с помощью которого можно определить $\mathbb{C}P^n$ как факторпространство S^{2n+1} . Прообразом точки из $\mathbb{C}P^n$ при этом отображении является окружность. В самом деле, $x' \in S^{2n+1}$ имеет тот же самый образ, что и $x \in S^{2n+1}$, тогда и только тогда, когда $x' = zx$ для некоторого

$$z \in S^1 = \{w \in \mathbb{C}: |w| = 1\}.$$

Как и прежде, вложения $\mathbb{C}^0 \subset \mathbb{C}^1 \subset \dots \subset \mathbb{C}^n \subset \dots$ индуцируют вложения $\mathbb{C}P^0 \subset \mathbb{C}P^1 \subset \dots \subset \mathbb{C}P^{n-1} \subset \dots$. Зададим на $\mathbb{C}P^n$ структуру клеточного пространства K с единственной клеткой в каждой четной размерности от 0 до $2n$ включительно. Подобно предыдущим примерам, сделаем это по индукции: если $\mathbb{C}P^{n-1}$ уже имеет клеточную структуру, то возьмем в $\mathbb{C}P^n$ в качестве $|K^{2n-1}|$ подпространство $\mathbb{C}P^{n-1}$ и положим $e^{2n} = \mathbb{C}P^n$. Характеристическое отображение

$$f^{2n}: (D^{2n}, S^{2n-1}) \rightarrow (e^{2n}, \dot{e}^{2n}) = (\mathbb{C}P^n, \mathbb{C}P^{n-1})$$

задается формулой

$$f^{2n}(x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}, x_{2n}) = \left[x_1 + ix_2, \dots, x_{2n-1} + ix_{2n}, \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{2n} x_i^2} \right].$$

На $\mathbb{C}P^n - \mathbb{C}P^{n-1}$ можно определить отображение g^{2n} , обратное к $f^{2n}|_{\dot{D}^{2n}}$. В самом деле, положим

$$g^{2n}([z_1, z_2, \dots, z_{n+1}]) = \left(\frac{\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_{n+1})}{|z_{n+1}| \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} |z_i|^2}}, \frac{\operatorname{Im}(z_1 \bar{z}_{n+1})}{|z_{n+1}| \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} |z_i|^2}}, \dots, \frac{\operatorname{Re}(z_n \bar{z}_{n+1})}{|z_{n+1}| \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} |z_i|^2}}, \frac{\operatorname{Im}(z_n \bar{z}_{n+1})}{|z_{n+1}| \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} |z_i|^2}} \right).$$

И, наконец, определим $\mathbb{C}P^\infty$ как объединение $\bigcup_{n \geq 0} \mathbb{C}P^n$, снабженное

слабой топологией. Тогда $\mathbb{C}P^\infty$ является клеточным пространством с единственной клеткой в каждой четной размерности.

6) Кватернионное проективное n -мерное пространство $\mathbb{H}P^n$ определяется как множество всех кватернионных прямых, проходящих через начало координат 0 в $\mathbb{H}^{n+1}$ ($\mathbb{H}^{n+1}$ рассматривается как правый модуль над $\mathbb{H}$). Снабдим $\mathbb{H}P^n$ топологией, рассматривая его как факторпространство $\mathbb{H}^{n+1} - \{0\} / \sim$, где $x \sim x'$ в $\mathbb{H}^{n+1} - \{0\}$ тогда и только тогда, когда существует $q \in \mathbb{H} - \{0\}$ с $x' = xq$. Как и прежде, мы имеем естественную проекцию $q': \mathbb{H}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{H}P^n$ и однородные координаты $[x_1, \dots, x_{n+1}]$ в $\mathbb{H}P^n$. Ограничение q' на S^{4n+3} индуцирует такое отображение $v: S^{4n+3} \rightarrow \mathbb{H}P^n$, что прообраз каждой точки из $\mathbb{H}P^n$ гомеоморфен трехмерной сфере S^3 .

Зададим на $\mathbb{H}P^n$ структуру клеточного пространства K с единственной клеткой в каждой размерности $4k$, $0 \leq k \leq n$. Для этого положим $|K^{4n-1}| = \mathbb{H}P^{n-1} \subset \mathbb{H}P^n$ и $e^{4n} = \mathbb{H}P^n$. Характеристическое отображение

$$f^{4n}: (D^{4n}, S^{4n-1}) \rightarrow (\mathbb{H}P^n, \mathbb{H}P^{n-1})$$

определяется формулой

$$f^{4n}(x_1, \dots, x_{4n}) = \left[x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4, \dots, x_{4n-3} + ix_{4n-2} + jx_{4n-1} + kx_{4n}, \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{4n} x_i^2} \right].$$

Положим $\mathbb{H}P^\infty = \bigcup_{n \geq 0} \mathbb{H}P^n$ и введем туда слабую топологию; тогда

$\mathbb{H}P^\infty$ является клеточным пространством с единственной клеткой в каждой размерности, кратной четырем.

В начале этой главы отмечалось, что для получения содержательных результатов о гомотопических группах нужна такая категория пространств, в которой отображения можно было бы строить по шагам. Следующее предложение показывает, что клеточные пространства как раз и обладают этим свойством.

5.5. Предложение. Пусть X — клеточное пространство, а Y — топологическое пространство. Отображение $f: X \rightarrow Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда для любого n и любого $\alpha \in J_n$ непрерывно ограничение $f|e_\alpha^n$ или, эквивалентно, когда для любого n и любого $\alpha \in J_n$ непрерывна композиция $f \circ f_\alpha^n$.

Доказательство. Пусть A — замкнутое множество из Y . Поскольку пространство X наделено слабой топологией, то $f^{-1}A$ замкнуто тогда и только тогда, когда для любого n и любого $\alpha \in J_n$ пересечение $(f^{-1}A) \cap e_\alpha^n$ замкнуто в e_α^n . Но это выполняется тогда и только тогда, когда $f|e_\alpha^n$ непрерывно для любого n и любого $\alpha \in J_n$.

Альтернативным образом для каждого $n \geq 0$ и каждого $\alpha \in J_n$ мы можем взять по экземпляру n -мерного диска D_α^n , а затем определить «большое характеристическое отображение» $\chi: \bigcup_{n, \alpha} D_\alpha^n \rightarrow X$ несвязного объединения этих дисков D_α^n в X так, чтобы $\chi|D_\alpha^n = f_\alpha^n$. Тогда X является факторпространством пространства $\bigcup_{n, \alpha} D_\alpha^n$, и поэтому f непрерывно тогда и только тогда,

когда непрерывна композиция $f \circ \chi$. Но $f \circ \chi$ определена на несвязном объединении и, следовательно, непрерывна тогда и только тогда, когда непрерывны все ее ограничения $(f \circ \chi)|D_\alpha^n = f \circ f_\alpha^n$. $\square$

Как правило, мы будем строить отображения $X \rightarrow Y$ индукцией по остовам. Таким образом, если отображение f уже определено на $|K^{n-1}|$, то для того, чтобы задать его на $|K^n|$, достаточно для каждого $\alpha \in J_n$ непрерывно продолжить $f|e_\alpha^{n-1}$ на e_α^n . Проведя эту процедуру для всех n , мы получим непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$. Другими словами, если $f|K^{n-1}|$ уже определено, то для каждого $\alpha \in J_n$ нужно непрерывно продолжить $f|(f_\alpha^n|S^{n-1})$ на весь диск D^n . Если обозначить это продолжение через $g: D^n \rightarrow Y$, то $f|e_\alpha^n$ можно задать формулой $f(f_\alpha^n(x)) = g(x)$, $x \in D^n$. Очевидно, что полученное таким способом отображение f корректно определено и непрерывно.

Гомотопии также можно строить по клеткам.

5.6. Предложение. Отображение $F: X \times I \rightarrow Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда для любого n и любого $\alpha \in J_n$ ограничение $F|e_\alpha^n \times I$ непрерывно или, эквивалентно, когда для любого n и любого $\alpha \in J_n$ композиция $F \circ (f_\alpha^n \times 1)$ непрерывна.

Доказательство. Пусть $\chi: \bigcup_{n, \alpha} D_{\alpha}^n \rightarrow X$ — «большое характеристическое отображение». Согласно предложению 0.3 отображение F непрерывно в том и только в том случае, когда непрерывна композиция $F \cdot (\chi \times 1)$. Но $\left(\bigcup_{n, \alpha} D_{\alpha}^n\right) \times I = \bigcup_{n, \alpha} (D_{\alpha}^n \times I)$ — несвязное объединение, и потому $F \cdot (\chi \times 1)$ непрерывна тогда и только тогда, когда для всех n, α композиции $F \cdot (f_{\alpha}^n \times 1)$ непрерывны. И, снова в силу предложения 0.8, $F \cdot (f_{\alpha}^n \times 1)$ непрерывна тогда и только тогда, когда непрерывны все ограничения $F|_{(e_{\alpha}^n \times I)}$. $\square$

Время от времени нам будет полезно следующее утверждение о клеточных пространствах.

5.7. Предложение. Пусть K — структура клеточного пространства на X . Тогда любое компактное подмножество $S \subset X$ пересекается лишь с конечным числом внутренностей клеток.

Доказательство. Для каждого n и каждого такого $\alpha \in J_n$, что $S \cap \dot{e}_{\alpha}^n \neq \emptyset$, выберем точку $x_{\alpha}^n \in S \cap \dot{e}_{\alpha}^n$. Пусть T — множество всех этих точек x_{α}^n ; нужно доказать, что оно конечно. Так как каждая клетка разбиения K имеет лишь конечное число непосредственных граней, то она содержится в конечном объединении внутренностей клеток. Следовательно, любое подмножество $T' \subset T$ пересекает каждую клетку по конечному множеству точек. Но в хаусдорфовом пространстве конечное множество замкнуто, поэтому $T' \cap e_{\alpha}^n$ замкнуто для любых n, α . Таким образом, T' замкнуто. Поскольку это верно для любого подмножества $T' \subset T$, то T дискретно. Кроме того, само множество T также замкнуто, а замкнутое подпространство компактного пространства компактно. Следовательно, T дискретно и компактно и, значит, конечно. $\square$

5.8. Определение. Пусть K — клеточное разбиение пространства X и $L \subset K$. Тогда L называется *подразбиением* разбиения K , если вместе с любой клеткой e_{α}^n в L содержатся и все ее грани. Подразбиение L является клеточным разбиением подпространства $|L|$, при этом, если K — структура клеточного пространства на X , то L — структура клеточного пространства на $|L|$. Каждый остов K^n является подразбиением разбиения K .

В предложении 5.7 мы доказали, что каждое компактное множество S из X содержится в некотором конечном подразбиении L . В самом деле, для этого достаточно взять в качестве L конечное множество клеток, внутренности которых пересекают S , вместе со всеми их гранями.

5.9. Предложение. Пусть разбиение K задает структуру клеточного пространства на X и L — подразбиение разбиения K . Тогда $|L|$ — замкнутое подпространство в X .

Доказательство. Мы знаем, что $e_{\alpha}^n \cap |L|$ пересекается лишь с конечным числом внутренностей клеток из L ; обозначим

эти клетки через $e_1^{n_1}, \dots, e_k^{n_k}$. Таким образом,

$$e_\alpha^n \cap |L| = \bigcup_{i=1}^k e_\alpha^n \cap e_i^{n_i}$$

является конечным объединением замкнутых множеств и, следовательно, замкнуто. Поскольку это верно для всех n, α , то само подпространство $|L|$ также замкнуто. $\square$

З а м е ч а н и е. Подпространство $|L|$, описанное в предложении 5.9, называется *клеточным подпространством* пространства X .

До настоящего момента мы изучали общие свойства топологических пространств X с заданными на них разбиениями K на клетки. Однако на практике наиболее важно уметь строить пространства X , последовательно приклеивая новые клетки. Поэтому сейчас мы займемся описанием такого построения. Мы будем работать в категории пунктированных пространств $\mathcal{PT}$, хотя описанный ниже метод может быть без труда приспособлен для категории $\mathcal{T}$.

5.10. Определение. Пусть X — некоторое пространство и $g: S^{n-1} \rightarrow X$ — некоторое отображение. Тогда, как объяснялось в главе 2, можно образовать конус $X \cup_g CS^{n-1}$ отображения g . В результате получится новое пространство, называемое *пространством X с приклеенной n -мерной клеткой*. Отображение g называется *приклеивающим отображением* клетки. Ограничивая естественную проекцию $q: X \vee CS^{n-1} \rightarrow X \cup_g CS^{n-1}$ на CS^{n-1} , мы получаем отображение $f: CS^{n-1} \rightarrow X \cup_g CS^{n-1}$, являющееся гомеоморфизмом на внутренности конуса CS^{n-1} . Отображение f называется *характеристическим отображением* клетки. Поскольку $CS^{n-1} \cong D^n$, то можно рассматривать f как отображение

$$f: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X \cup_g CS^{n-1}, X).$$

Заметим, что $f|_{S^{n-1}} = g$.

Более общим образом, если задано отображение

$$g: \bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^{n-1} \rightarrow X$$

букета $(n-1)$ -мерных сфер в X , то конус $X \cup_g C\left(\bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^{n-1}\right) = X \cup_g \bigvee_{\alpha} (CS_{\alpha}^{n-1})$ этого отображения называется *пространством X с приклеенными n -мерными клетками*. Подмножество $q(CS_{\alpha}^{n-1})$ представляет собой n -мерную клетку e_{α}^n , и ее приклеивающее отображение есть $g|_{S_{\alpha}^{n-1}}$. Характеристическим отображением f_{α}^n клетки e_{α}^n является $q|_{CS_{\alpha}^{n-1}}$. Результат приклеивания нульмерной клетки — это попросту несвязное объединение пространства X и точки.

5.11. Лемма. Пусть K есть структура $(n-1)$ -мерного клеточного пространства на X . Приклеим к X n -мерные клетки e_α^n , $\alpha \in J_n$ с помощью приклеивающих отображений $g_\alpha: S^{n-1} \rightarrow X$ и положим $K' = K \cup \{e_\alpha^n: \alpha \in J_n\}$. Тогда K' является структурой клеточного пространства на $Y = X \cup \bigvee_\alpha (CS_\alpha^{n-1})$.

Доказательство. Прежде всего мы должны показать, что Y — хаусдорфово пространство. Пусть x, y — разные точки из Y . Если хотя бы одна из них лежит внутри некоторой n -мерной клетки e_α^n , то в Y можно без труда найти непересекающиеся открытые окрестности точек x и y . Поэтому предположим, что $x, y \in X$. В пространстве X точки x и y имеют непересекающиеся открытые окрестности U и V соответственно. Однако U и V не обязаны быть открытыми в Y , так что мы поступим следующим образом. Для каждого α множества $g_\alpha^{-1}U, g_\alpha^{-1}V$ открыты в S^{n-1} и имеют там пустое пересечение. Следовательно, в D^n найдутся такие открытые непересекающиеся множества U_α, V_α , что $U_\alpha \cap S^{n-1} = g_\alpha^{-1}U, V_\alpha \cap S^{n-1} = g_\alpha^{-1}V$. В $X \vee \left(\bigvee_\alpha D_\alpha^n\right)$ открытые множества $U' = U \vee \left(\bigvee_\alpha U_\alpha\right), V' = V \vee \left(\bigvee_\alpha V_\alpha\right)$ обладают тем свойством, что $q^{-1} \cdot q(U') = U', q^{-1} \cdot q(V') = V'$, поэтому qU', qV' открыты в Y . Кроме того, очевидно, что $qU' \cap qV' = \emptyset$ и $x \in qU', y \in qV'$.

Остальные свойства клеточного пространства проверяются более просто. Из построения очевидно, что множества e_α^n не пересекаются друг с другом. Ясно также, что $e_\alpha^n \cap X = \emptyset$ и, следовательно, $e_\alpha^n \cap e_\beta^m = \emptyset$ и при $m < n$. Кроме того, ясно, что $Y = X \cup \bigcup_\alpha e_\alpha^n = \left(\bigcup_K e_\beta^m\right) \cup \bigcup_\alpha e_\alpha^n$. Клеткам e_α^n отвечают характеристические отображения $f_\alpha^n = q|CS_\alpha^{n-1}$, обладающие нужными свойствами, а клеткам разбиения K такие отображения отвечают по условию леммы. Тот факт, что каждая клетка $e_\alpha^n \in K$ имеет лишь конечное число граней, является следствием свойства (C) из определения 5.3. Так как каждое множество $e_\alpha^n = g_\alpha(S^{n-1})$ компактно, то оно пересекается только с конечным числом внутренностей клеток из K и, следовательно, каждая клетка e_α^n имеет конечное число граней. И, наконец, подмножество $S \subset Y$ замкнуто тогда и только тогда, когда замкнут его прообраз $q^{-1}S \subset X \vee \left(\bigvee_\alpha CS_\alpha^{n-1}\right)$, а это верно в том и только в том случае, когда $S \cap X$ замкнуто в X и $S \cap e_\alpha^n$ замкнуто в e_α^n для каждого $\alpha \in J_n$. Но $S \cap X$ замкнуто в X тогда и только тогда, когда $S \cap e_\beta^m$ замкнуто в e_β^m для каждой клетки $e_\beta^m \in K$. Таким образом, Y имеет требуемую слабую топологию. $\square$

5.12. Предложение. Пусть

$$\{x_0\} = X^{-1} \subset X^0 \subset X^1 \subset \dots \subset X^n \subset X^{n+1} \subset \dots$$

такая последовательность пространств, что X^n получается из X^{n-1} приклеиванием n -мерных клеток ($n \geq 0$). Если снабдить множество $X = \bigcup_{n \geq -1} X^n$ слабой топологией (в которой $S \subset X$ считается замкнутым тогда и только тогда, когда $S \cap X^n$ замкнуто в X^n для всех $n \geq -1$), то разбиение $K = \{\text{все клетки}\}$ задает на X структуру клеточного пространства.

Доказательство. И здесь самым трудным местом является доказательство того, что пространство X хаусдорфово. Если $x, y \in X$ — две различные точки, возьмем такой номер n , при котором $x, y \in X^n$. Используя лемму 5.11 и индукцию по размерности, получим, что каждое X^n является клеточным пространством и, следовательно, хаусдорфово. Выберем в X^n непересекающиеся открытые окрестности U, V точек x, y соответственно. Тогда по индукции можно построить такие непересекающиеся открытые окрестности U_m, V_m точек x, y в X^m , $m \geq n$, что $U_n = U, V_n = V$. В самом деле, если U_{m-1}, V_{m-1} уже построены, то с помощью процедуры, описанной в доказательстве леммы 5.11, они «раздуваются» в непересекающиеся открытые множества в X^m . И, наконец, $U' = \bigcup_{m \geq n} U_m, V' = \bigcup_{m \geq n} V_m$ не пересекаются в X , а поскольку $U' \cap X^m = U_m, V' \cap X^m = V_m$ открыты для $m \geq n$, то U', V' открыты в X . Ясно, что $x \in U', y \in V'$.

Все другие свойства, требуемые от разбиения K , немедленно вытекают из того факта, что X^n — клеточное пространство для каждого n . □

Таким образом, мы получили прекрасную возможность строить клеточные пространства по своим собственным чертежам.

5.13. Определение. Структурой относительно клеточного пространства на паре (X, A) называется такая последовательность¹⁾

$A = (X, A)^{-1} \subset (X, A)^0 \subset \dots \subset (X, A)^n \subset (X, A)^{n+1} \subset \dots \subset X$, что $(X, A)^n$ получается из $(X, A)^{n-1}$ приклеиванием n -мерных клеток, $n \geq 0, X = \bigcup_{n \geq -1} (X, A)^n$ и X наделено слабой топологией: $S \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда для любого $n \geq -1$ пересечение $S \cap (X, A)^n$ замкнуто в $(X, A)^n$.

Назовем пару (X, A) относительным клеточным пространством, если она может быть наделена какой-либо структурой относительного клеточного пространства.

Положим $\dim(X, A) = n$, если $(X, A)^n = X$ и $(X, A)^{n-1} \neq X$. Отметим, что если $A = \{x_0\}$, то X является клеточным пространством. С другой стороны, если X — клеточное пространство и $A \subset X$ — некоторое его клеточное подпространство, то пара (X, A) является относительным клеточным пространством.

¹⁾ Ниже через $(X, A)^k$ обозначается одно пространство, а не пара пространств. — Прим. ред.

Замечание. Если K — клеточное разбиение пространства X и L — клеточное разбиение пространства Y , то множество

$$K \times L = \{e_\alpha^n \times e_\beta^m: e_\alpha^n \in K, e_\beta^m \in L\}$$

является клеточным разбиением пространства $X \times Y$. Характеристическое отображение клетки $e_\alpha^n \times e_\beta^m$ определяется как произведение

$$D^{n+m} \cong D^n \times D^m \xrightarrow{f_\alpha^n \times f_\beta^m} e_\alpha^n \times e_\beta^m.$$

При этом, однако, если K, L суть структуры клеточных пространств, то $K \times L$ может не быть структурой клеточного пространства на $X \times Y$. Дело в том, что топология произведения на $X \times Y$ может не совпадать со слабой топологией, определяемой разбиением $K \times L$. Иногда эту дилемму решают, просто наделяя $X \times Y$ слабой топологией. В противном случае требуется вводить некоторые ограничения. Например, если одно из разбиений K или L локально конечно (т. е. любая точка имеет окрестность, пересекающуюся лишь с конечным числом клеток), то эти две топологии совпадают; в частности, $X \times I$ является клеточным пространством всякий раз, когда им является X .

5.14. Упражнение. Показать, что если (X, A) — относительное клеточное пространство, то X/A — клеточное пространство.

Следовательно, если X и Y — клеточные пространства, то при соответствующих условиях таковым же будет и произведение $X \wedge Y$.

5.15. Упражнение. Пусть (X, A) — относительное клеточное пространство и $p: E \rightarrow B$ — слабое расслоение. Показать, что для любого отображения $f: X \rightarrow E$ и любых гомотопий $F: X \times I \rightarrow B$, $H: A \times I \rightarrow E$ с

$$F_0 = p \circ f, \quad H_0 = f|_A \quad \text{и} \quad p \circ H = F|_{A \times I}$$

существует гомотопия $G: X \times I \rightarrow E$, являющаяся поднятием гомотопии F и такая, что $G|_{A \times I} = H$, $G_0 = f$, $p \circ G = F$.

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} \cup A \times I & \xrightarrow{f \cup H} & E \\ \cap & \nearrow G & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{F} & B \end{array}$$

В качестве частного случая упражнения 5.14 мы получаем такой результат.

5.16. Следствие. Если пространство X получается из A приклеиванием n -мерных клеток $\{e_\beta^n: \beta \in B\}$, то $X/A \cong \bigvee_{\beta \in B} S_\beta^n$. При этом гомеоморфизм может быть выбран так, что коммута-

тивна диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 & (S^n, *) & \xrightarrow{i_\beta} (V_\beta S_\beta^n, *) \\
 (D^n, S^{n-1}) & \nearrow p' & \downarrow \cong \\
 & (X, A) & \xrightarrow{p} (X/A, *)
 \end{array}$$

в которой f_β — характеристическое отображение клетки e_β^n .

5.17. Следствие. Для любого относительного клеточного пространства (X, A) с n -мерными клетками $\{e_\beta^n: \beta \in B\}$ имеет место гомеоморфизм

$$(X, A)^n / (X, A)^{n-1} \cong \bigvee_{\beta \in B} S_\beta^n$$

и коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 & (S^n, *) & \xrightarrow{i_\beta} (V_\beta S_\beta^n, *) \\
 (D^n, S^{n-1}) & \nearrow p' & \downarrow \\
 & ((X, A)^n, (X, A)^{n-1}) & \rightarrow ((X, A)^n / (X, A)^{n-1}, *)
 \end{array}$$

5.18. Если мы захотим перенести все сказанное выше из категории $\mathcal{PT}$ в категорию $\mathcal{T}$, то приклеивающие отображения $g: \bigcup_{\alpha} S_{\alpha}^n \rightarrow X^n$ надо считать определенными на несвязном объединении; кроме того, по определению $X^{-1} = \emptyset$.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Клеточные пространства изобрел Дж. Г. К. Уайтхед в работе [83]. Их широкое распространение в алгебраической топологии объясняется тем, что для многих задач они представляют собой наиболее адекватный, «правильный» класс пространств. В работе [57] Милнор исследовал пространства, гомотопически эквивалентные клеточным пространствам. Затем Уолл [87] нашел условия, при выполнении которых произвольное пространство имеет гомотопический тип конечного клеточного пространства¹⁾. В замечательных свойствах этих пространств мы сможем воочию убедиться уже в следующей главе

ОСЫЛКИ НА ЛИТЕРАТУРУ

1. Милнор [57].
2. Спеньер [72].
3. Уайтхед [83].
4. Уолл [87].

¹⁾ То есть клеточного пространства с конечным числом клеток. — Прим. ред.

ГОМОТОПИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КЛЕТОЧНЫХ
ПРОСТРАНСТВ

В этой главе мы докажем несколько глубоких и трудных результатов о гомотопических группах клеточных пространств и относительных клеточных пространств. Большинство из этих теорем будут следствиями теоремы о симплициальной аппроксимации. Кроме того, мы покажем, что отображение $f: X \rightarrow Y$ одного клеточного пространства в другое, индуцирующее для каждого $n \geq 0$ изоморфизм

$$f_*: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0),$$

является гомотопической эквивалентностью.

Начнем с понятия, двойственного понятию расслоения. Напомним, что расслоение $p: E \rightarrow B$ определяется с помощью диаграммы 6.1.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & E \\ i_0 \downarrow & \nearrow F & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{G} & B, \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} Y & \xleftarrow{f} & X \\ p_0 \uparrow & \nwarrow F & \uparrow i \\ Y^I & \xleftarrow{G} & A. \end{array}$$

Мы придем к определению корасслоения $i: A \rightarrow X$, если обратим в ней все стрелки, заменим $X \times I$ двойственным ему пространством Y^I и, наконец, заменим i_0 отображением p_0 , где $p_0(w) = w(0)$. Вспоминая, что G можно рассматривать как отображение $A \times I \rightarrow Y$, а F — как отображение $X \times I \rightarrow Y$, мы получаем следующее определение.

6.3. Определение. Говорят, что включение $i: A \rightarrow X$ обладает свойством продолжения гомотопии относительно пространства Y , если для каждого отображения $f: X \rightarrow Y$ и гомотопии $G: A \times I \rightarrow Y$ ограничения $f|_A$ найдется гомотопия $F: X \times I \rightarrow Y$ отображения f , продолжающая G . Включение i называется *корасслоением*, если оно обладает свойством гомотопического продолжения относительно пространства Y .

Замечание. Можно показать, что если некоторое отображение $i: A \rightarrow X$ обладает свойством продолжения гомотопии¹⁾

¹⁾ Чтобы определить это свойство для произвольного отображения, надо в определении 6.3 заменить $f|_A$ отображением $f_0 i$, и т. д. — Прим. перев

относительно любого пространства Y , то оно является гомеоморфизмом пространства A на некоторое замкнутое подпространство пространства X , т. е. вложением A в X .

6.4. Лемма. Для любого отображения $g: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ вложение $j: Y \rightarrow Y \cup_g CX$ является корасслоением.

Доказательство. Пусть $r: I \times I \rightarrow I \times \{0\} \cup I \times I$ — некоторая ретракция. Ее можно получить, например, рассматривая $I \times I$ как единичный квадрат в $\mathbb{R}^2$ и проектируя его на $I \times \{0\} \cup I \times I$ из точки $(1/2, 2)$ (рис. 11). Если $f: Y \cup_g CX \rightarrow W$ и $G: Y \times I \rightarrow W$ — некоторые заданные отображения с $G_0 = f|_Y$, то определено такое отображение

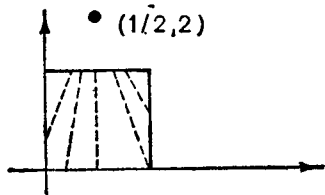


Рис. 11.

$$G': CX \times \{0\} \cup X \times I \rightarrow W,$$

что $G'|_{CX \times \{0\}} = f|_{CX}$ и $G'|_{X \times I} = G \cdot (g \times 1)$. Определим теперь гомотопию $H: (Y \cup_g CX) \times I \rightarrow W$, полагая $H|_{Y \times I} = G$ и $H([s, x], t) = G'([p_1 \cdot r(s, t), x], p_2 \cdot r(s, t))$ для $[s, x] \in CX$, $t \in I$ (здесь p_1 и p_2 — ограничения на $I \times \{0\} \cup I \times I$ проекций $p_1, p_2: I \times I \rightarrow I$). Тогда H корректно определена, непрерывна и удовлетворяет условию $H_0 = f$. $\square$

Это рассуждение нам уже знакомо. Оно содержится в доказательстве предложения 2.48.

В частности, если X получается из A приклеиванием n -мерных клеток, то $X = A \cup_g C\left(\bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^{n-1}\right)$, так что включение $A \rightarrow X$ является корасслоением.

6.5. Предложение. Если (X, A) — относительно клеточное пространство, то включение $i: A \rightarrow X$ является корасслоением.

Доказательство. Для каждого n пространство $(X, A)^n$ получается из $(X, A)^{n-1}$ приклеиванием n -мерных клеток. Таким образом, $(X, A)^{n-1} \subset (X, A)^n$ — корасслоение. Если заданы отображение $f: X \rightarrow Y$ и гомотопия $G: A \times I \rightarrow Y$ его ограничения $f|_A$, то, используя лемму 6.4 и индукцию по размерности n , можно построить семейство гомотопий $F^n: (X, A)^n \times I \rightarrow Y$, удовлетворяющих условиям

$$i) F^{-1} = G, ii) F_0^n = f|_{(X, A)^n}, iii) F^n|_{(X, A)^{n-1} \times I} \rightarrow F^{n-1}.$$

Определим теперь гомотопию $F: X \times I \rightarrow Y$, полагая $F(x, t) = F^n(x, t)$ для $x \in (X, A)^n$, $t \in I$. Она корректно определена в силу iii) и непрерывна потому, что $F|_{e_{\alpha}^n \times I} = F^n|_{e_{\alpha}^n \times I}$. Из условия ii) вытекает, что $F_0 = f$, а из условия i) — что $F|_{A \times I} = G$. $\square$

Одним из приложений этого результата является тот факт, что сжатие стягиваемых клеточных подпространств клеточного пространства не изменяет его гомотопический тип.

6.6. Предложение. Если $i: A \rightarrow X$ — корасслоение и пространство A стягиваемо, то проекция $p: (X, A) \rightarrow (X/A, *)$ является гомотопической эквивалентностью.

Доказательство. Пусть $H: A \times I \rightarrow A$ — стягивающая гомотопия, т. е. $H_0 = 1_A$, $H_1 = x_0$, $H(x_0, t) = x_0$ для всех $t \in I$. Так как отображение $i: A \rightarrow X$ является корасслоением, мы можем продолжить $i \cdot H$ до такой гомотопии $K: X \times I \rightarrow X$, что $K_0 = 1_X$ и $K|_{A \times I} = i \cdot H$. Тогда $K_1(a) = H_1(a) = x_0$ для всех $a \in A$. Следовательно, K_1 индуцирует такое отображение $k: (X/A, *) \rightarrow (X, x_0)$, что $k \cdot p = K_1$. Другими словами, K является гомотопией, связывающей отображения 1_X и $k \cdot p$. Кроме того, поскольку $p \cdot K(a, t) = *$ для всех $a \in A$, $t \in I$, то из предложения 0.8 следует, что $p \cdot K$ индуцирует такую гомотопию $\bar{K}: X/A \times I \rightarrow X/A$, для которой $\bar{K} \cdot (p \times 1) = p \cdot K$. Тогда для каждого $x \in X$ мы имеем $\bar{K}_0(p(x)) = \bar{K}(p(x), 0) = p \cdot K(x, 0) = p(x)$ и $\bar{K}_1(p(x)) = \bar{K}(p(x), 1) = p \cdot K(x, 1) = p \cdot K_1(x) = p \cdot k(p(x))$. Так как отображение p сюръективно, то $\bar{K}_0 = 1_{X/A}$, $\bar{K}_1 = p \cdot k$, т. е. $p \cdot k \simeq 1_{X/A}$. Следовательно, k является отображением, гомотопически обратным к p . $\square$

6.7. Замечание. Для любого отображения $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ включение $\alpha: CY \rightarrow (Y \cup_f CX) \cup_f CY$ является корасслоением. Действительно, если задано отображение

$$h: (Y \cup_f CX) \cup_f CY \rightarrow Z$$

и гомотопия $G: CY \times I \rightarrow Z$ с $G_0 = h|_{CY}$, то можно продолжить $G|_{Y \times I}$ до гомотопии $H': (Y \cup_f CX) \times I \rightarrow Z$ с $H'_0 = h|_{Y \cup_f CX}$. Определим теперь гомотопию

$$H: [(Y \cup_f CX) \cup_f CY] \times I \rightarrow Z$$

условиями $H|(Y \cup_f CX) \times I = H'$, $H|_{CY \times I} = G$. Тогда H корректно определена, непрерывна и удовлетворяет соотношению $H_0 = h$, что и требовалось. Более того, конус над любым пространством стягиваем: соответствующая гомотопия $F: CY \times I \rightarrow CY$ задается формулой $F([s, y], t) = [s(1-t), y]$. Таким образом, лемма 2.37 является частным случаем предложения 6.6.

Теперь мы собираемся доказать, что для любого клеточного пространства X группа $\pi_n(X, x_0)$ зависит лишь от $(n+1)$ -мерного остова X^{n+1} . Идея доказательства заключается в следующем. Так как сфера S^n n -мерна, то в тех случаях, когда ее образ в X пересекается с m -мерной клеткой ($m > n$), он не заполняет всю ее и поэтому может быть выдавлен из этой клетки радиальной проекцией с центром в любой точке, не лежащей в образе. Повторяя этот процесс, мы в конце концов продеформируем образ сферы S^n на n -мерный остов X^n . Аналогично, все гомотопии между

отображениями могут быть продеформированы в X^{n+1} . Чтобы сделать эти соображения строгим доказательством, нам потребуется так называемая лемма о симплициальной аппроксимации, утверждающая, что произвольное отображение $f: S^n \rightarrow X$ можно продеформировать в отображение, линейное на внутренности любой m -мерной клетки e^m .

Предположим, что пространство X получено из A приклеиванием n -мерной клетки e^n . Возьмем в D^n два concentрических диска $D_0^n \subset D_1^n \subset \dot{D}_1^n \subset \dot{D}^n$, например $D_0^n = \{x \in D^n: |x| \leq 1/4\}$, $D_1^n = \{x \in D^n: |x| \leq 1/2\}$. Пусть $g: D^n \rightarrow e^n$ — характеристическое отображение клетки e^n и $e_0^n = g(D_0^n)$, $e_1^n = g(D_1^n)$. С помощью g на внутренности $\dot{e}^n$ клетки e^n может быть задана линейная структура¹⁾. Именно, если $x, y \in \dot{e}^n$ и $s, r \in \mathbb{R}$, определим $rx + sy$ формулой

$$rx + sy = g(rg^{-1}x + sg^{-1}y)$$

в предположении, что $rg^{-1}x + sg^{-1}y \in \dot{D}^n$ (это условие выполнено, например, если $r + s = 1$, $r, s \geq 0$). Теперь мы в состоянии сформулировать лемму о симплициальной аппроксимации.

6.8. Лемма о симплициальной аппроксимации. Пусть пространство $X = A \cup e^n$ такое же, как выше, (K, L) — конечная симплициальная пара и $f: (|K|, |L|) \rightarrow (X, A)$ — некоторое отображение. Тогда существуют подразбиение (K', L') пары (K, L) и отображение $f': (|K'|, |L'|) \rightarrow (X, A)$ такие, что

- i) f и f' совпадают на $f^{-1}(A)$ и $f \simeq f' \text{ rel } f^{-1}(A)$;
- ii) если σ — такой симплекс из K' , что $f'(|\sigma|)$ пересекается с e_0^n ,

то $f'(|\sigma|)$ содержится в $\dot{e}^n$ и ограничение отображения f' на $|\sigma|$ является линейным²⁾ отображением.

Доказательство. Возьмем настолько мелкое подразбиение K' пространства K , чтобы было выполнено следующее условие: если σ — симплекс из K' и $f(|\sigma|)$ пересекает $\dot{e}_1^n$, то $f(|\sigma|) \subset \dot{e}^n$ и выпуклая оболочка множества $f(|\sigma|)$ не пересекает $\dot{e}_0^n$. Это возможно потому, что пространство $|K|$ компактно и, значит, $g^{-1}f$ равномерно непрерывно на $f^{-1}e_1^n$, где $D_2^n = \{x \in D^n: |x| < 3/4\}$. Следовательно, существует такое $\delta > 0$, что из неравенства $d(x, y) < \delta$ в $f^{-1}e_1^n$ вытекает неравенство $d(g^{-1}f(x), g^{-1}f(y)) < 1/4$ в D_2^n . Поэтому достаточно взять такое подразбиение K' , чтобы все его симплексы имели диаметр, не превосходящий δ .

¹⁾ Точнее, структура выпуклого подмножества из $\mathbb{R}^n$, см. ниже. — *Прим. ред.*

²⁾ Линейным в том смысле, что $f(rx + sy) = rf(x) + sf(y)$ всякий раз, когда обе части равенства имеют смысл (например, при $r + s = 1$, $r, s \geq 0$). — *Прим. ред.*

Все симплексы из K' распадаются на три непересекающихся класса:

$$C_1 = \{\sigma \in K': f(|\sigma|) \subset X - e_1^n\},$$

$$C_2 = \{\sigma \in K': f(|\sigma|) \subset \dot{e}_1^n\},$$

$$C_3 = \{\sigma \in K': f(|\sigma|) \cap \dot{e}_1^n \neq \emptyset\}.$$

Мы будем строить отображение f' отдельно на каждом из этих трех классов. На симплексах $\sigma \in C_1$ положим $f' = f$. Если

$\sigma = (v_0, v_1, \dots, v_k) \in C_2$ и $x = \sum_{i=0}^k r_i v_i$, $\sum_{i=0}^k r_i = 1$ — некоторая точка

из $|\sigma|$, то положим $f'(x) = \sum_{i=0}^k r_i f(v_i)$. Наконец, на симплексах

$\sigma \in C_3$ построим f' индукцией по $\dim \sigma$. Если $\dim \sigma = 0$, то положим $f'(\sigma) = f(\sigma)$. Предположим теперь, что f' уже определено на всех $\sigma \in C_3$ с $\dim \sigma < k$, причем для каждого σ его образ $f'(|\sigma|)$ принадлежит выпуклой оболочке множества $f(|\sigma|)$. Пусть симплекс $\sigma = (v_0, \dots, v_k) \in C_3$ имеет размерность k ; тогда f' определено на $|\dot{\sigma}|$ и $f'(|\dot{\sigma}|)$ лежит в выпуклой оболочке множества $f(|\sigma|)$.

Пусть $b_\sigma = \sum_{i=0}^k 1/(k+1) v_i$ — барицентр симплекса σ . Каждая точка

$x \in |\sigma| - \{b_\sigma\}$ однозначно представляется в виде $x = tb_\sigma + (1-t)y_x$ для некоторых $t \in I$ и $y_x \in |\dot{\sigma}|$. Положим $f'(b_\sigma) = f(b_\sigma)$ и $f'(x) = tf(b_\sigma) + (1-t)f'(y_x)$. Тогда f' непрерывно на $|\sigma|$ и образ $f'(|\sigma|)$ лежит в выпуклой оболочке множества $f(|\sigma|)$. Этим завершается шаг индукции. Таким образом, мы построили отображение $f'(|K|, |L|) \rightarrow (X, A)$, удовлетворяющее условию ii) и первой половине условия i). Построим теперь требуемую гомотопию $H: |K| \times I \rightarrow X$. На симплексах $\sigma \in C_1$ определим H как стационарную (постоянную по t) гомотопию, а на симплексах $\sigma \in C_2 \cup C_3$ положим $H(x, t) = (1-t)f(x) + tf'(x)$, $x \in |\sigma|$, $t \in I$. Тогда очевидно, что H является гомотопией $\text{rel } f^{-1}(A)$ между f и f' . $\square$

6.9. Лемма. Если $X = A \cup e^n$ и $x \in \dot{e}^n$, то A является сильным деформационным ретрактом пространства $X - \{x\}$.

Доказательство. Отметим прежде всего, что если $a \in \dot{D}^n$, то S^{n-1} является сильным деформационным ретрактом пространства $D^n - \{a\}$. В самом деле, каждая точка $y \in D^n - \{a\}$ может быть единственным способом представлена в виде $y = sa + (1-s)z_y$ для некоторых $z_y \in S^{n-1}$, $s \in [0, 1)$. Определим $H_a: (D^n - \{a\}) \times I \rightarrow D^n - \{a\}$, полагая

$$H_a(sa + (1-s)z, t) = (1-t)sa + (1-s(1-t))z$$

для $s \in [0, 1)$, $t \in I$, $z \in S^{n-1}$. Тогда H_a является требуемой деформацией.

Пусть теперь $f: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, A)$ — характеристическое отображение клетки e^n . Положим $a = f^{-1}x$ и построим деформацию $H: (X - \{x\}) \times I \rightarrow X - \{x\}$, считая ее стационарной на A и задав ее формулой

$$H(f(y), t) = f \cdot H_a(y, t), \quad y \in D^n - \{a\}, \quad t \in I,$$

на $(e^n - \{x\}) \times I$. $\square$

Лемма о симплициальной аппроксимации имеет многочисленные применения. Приведем некоторые из них.

6.10. Теорема. Если (X, A) — относительное клеточное пространство, то для каждого $n \geq -1$ пара $(X, (X, A)^n)$ является n -связной.

Доказательство. Мы должны показать, что для каждого $r \leq n$ любое отображение $f: (D^r, S^{r-1}) \rightarrow (X, (X, A)^n)$ гомотопно относительно S^{r-1} отображению f' с $f'(D^r) \subset (X, A)^n$. Так как образ $f(D^r)$ компактен, то $f(D^r) \subset (X, A)^m$ для некоторого m , и $f(D^r)$ пересекает лишь конечное число m -мерных клеток, скажем, $e_1^m, \dots, e_q^m$. Если $m > n$, то продеформируем f относительно $f^{-1}((X, A)^m - \dot{e}_1^m)$ в отображении f' , линейное на $(f')^{-1}((e_1^m)_0)$. Поскольку $f'(D^r) \cap \dot{e}_1^m$ имеет размерность самое большее r и $r \leq n < m$, то существует точка $x \in \dot{e}_1^m - f'(D^r)$. Пусть

$$H: [(X, A)^m - \{x\}] \times I \rightarrow (X, A)^m - \{x\}$$

— деформационная ретракция пространства $(X, A)^m - \{x\}$ на $(X, A)^m - \dot{e}_1^m$. Определим отображение $K: D^r \times I \rightarrow X$, полагая $K(y, t) = H(f'(y), t)$ для $y \in D^r, t \in I$. Тогда K является гомотопией $\text{rel } f^{-1}((X, A)^m - \dot{e}_1^m)$, связывающей f' с таким отображением f'' , что $f''(D^r) \subset (X, A)^m - \dot{e}_1^m$. Повторим эту процедуру для всех клеток размерности m , пересекающихся с образом диска D^r . В результате мы получим такое отображение f''' , что $f'''(D^r) \subset (X, A)^{m-1}$ и $f''' \simeq f \text{ rel } S^{r-1}$. Другими словами, мы продеформировали образ $f(D^r)$ в $(m-1)$ -мерный остов. Последовательно применяя данную конструкцию ко всем остовам размерностей, больших n , мы получим в конечном итоге такое отображение $\hat{f}$, что $\hat{f} \simeq f \text{ rel } S^{r-1}$ и $\hat{f}(D^r) \subset (X, A)^n$. Эти же рассуждения применимы и в случае $r = 0$. $\square$

6.11. Теорема. Пусть X — клеточное пространство и $i: X^n \rightarrow X$ — включение n -мерного остова, $n > 0$. Тогда

$$i_*: \pi_r(X^n, x_0) \rightarrow \pi_r(X, x_0)$$

— изоморфизм при $r < n$ и эпиморфизм при $r = n$.

Доказательство. Рассмотрим точную гомотопическую последовательность пары (X, X^n, x_0) :

$$\dots \rightarrow \pi_{r+1}(X, X^n, x_0) \rightarrow \pi_r(X^n, x_0) \xrightarrow{i_*}$$

$$\pi_r(X, x_0) \rightarrow \pi_r(X, X^n, x_0) \rightarrow \dots$$

По предыдущей теореме $\pi_r(X, X^n, x_0) = 0$ при $r \leq n$, откуда и следует требуемый результат. $\square$

6.12. Следствие. $\pi_r(S^n, s_0) = 0$ при $r < n$.

Доказательство. Снабдим S^n структурой клеточного пространства с одной нульмерной и одной n -мерной клетками. Тогда $(S^n)^{n-1} = s_0$, так что $\pi_r((S^n)^{n-1}, s_0) = 0$ для любого r . Но по теореме 6.11

$$i_*: \pi_r((S^n)^{n-1}, s_0) \rightarrow \pi_r(S^n, s_0)$$

— эпиморфизм для $r \leq n-1$. Следовательно, $\pi_r(S^n, s_0) = 0$ при $r < n$. $\square$

Из теоремы 6.10 следует, что если (X, A) — относительное клеточное пространство, не содержащее клеток размерностей $\leq n$, т. е. $(X, A)^n = A$, то пара (X, A) является n -связной. Имеет место слабое обращение этого результата.

6.13. Предложение. Пусть (X, A) — n -связное относительное клеточное пространство. Тогда (X, A) можно вложить в такое относительное клеточное пространство (X', A') , что

i) X является сильным деформационным ретрактом пространства X' , а A — сильным деформационным ретрактом пространства A' ;

ii) $(X', A')^n = A'$.

Доказательство. Используем индукцию по n . Для $n = -1$ утверждение очевидно: нужно взять $X' = X$, $A' = A$. Предположим, что утверждение верно для $(n-1)$ и пусть (X, A) — некоторое n -связное относительное пространство. Из n -связности пространства (X, A) очевидным образом следует, что оно $(n-1)$ -связно. Поэтому можно считать, что $(X, A)^{n-1} = A$. Пусть e_α^n — n -мерные клетки из (X, A) с характеристическими отображениями $f_\alpha^n: (D^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$. Мы хотим для каждого $\alpha \in J_n$ подходящим образом приклеить к X одну новую $(n+1)$ -мерную клетку e_α^{n+1} и одну новую $(n+2)$ -мерную клетку e_α^{n+2} . Так как $\pi_n(X, A, x_0) = 0$, то $[f_\alpha^n] = 0$. Следовательно, f_α^n гомотопно относительно S^{n-1} отображению в A . Соответствующую гомотопию можно рассматривать как такое отображение $g_\alpha: D^{n+1} \rightarrow X$, что $g_\alpha|_{(H_+^n, S^{n-1})} = f_\alpha^n$, $g_\alpha(H_-^n) \subset A$. Согласно теореме 6.10 можно считать, что $g_\alpha(D^{n+1}) \subset (X, A)^{n+1}$. Приклеим клетку e_α^{n+1} по отображению $(g_\alpha|_{S^n}): S^n \rightarrow X$. Пусть $h_\alpha: (D^{n+1}, S^n) \rightarrow (e_\alpha^{n+1}, \dot{e}_\alpha^{n+1})$ — характеристическое отображение этой клетки. Возьмем такое отображение $k_\alpha: S^{n+1} \rightarrow X \cup e_\alpha^{n+1}$, что $k_\alpha|_{H_+^{n+1}} = h_\alpha$, $k_\alpha|_{H_-^{n+1}} = g_\alpha$ и приклеим клетку e_α^{n+2} по отображению k_α .

Положим теперь

$$X' = X \cup \left(\bigcup_\alpha e_\alpha^{n+1} \right) \cup \left(\bigcup_\alpha e_\alpha^{n+2} \right) \text{ и } A' = A \cup \left(\bigcup_\alpha e_\alpha^{n+1} \right).$$

Очевидно, что $(X, A) \subset (X', A')$. Кроме того, поскольку любая n -мерная клетка e_α^n содержится в новой $(n+1)$ -мерной клетке e_α^{n+1} , то $e_\alpha^n \subset A'$ для любого α , т. е. $(X', A')^n = A'$. Но пространство A' получается из A приклеиванием $(n+1)$ -мерных дисков по южным полусферам H_-^n их граничных сфер S^n (посредством отображений $g_\alpha|H_-^n$). Так как H_-^n является сильным деформационным ретрактом диска D^{n+1} , то A есть сильный деформационный ретракт пространства A' . Точно так же X' получается из X приклеиванием $(n+2)$ -мерных дисков по южным полусферам H_-^{n+1} их граничных сфер (посредством отображений g_α). Следовательно, X является сильным деформационным ретрактом пространства X' . $\square$

На рис. 12 схематически изображен случай $n=0$.

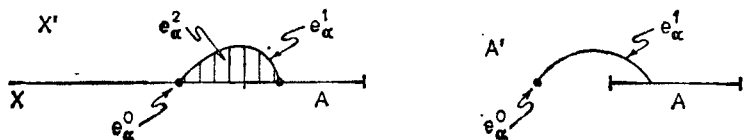


Рис. 12.

6.14. Следствие. Пусть (X, x_0) — некоторое n -связное клеточное пространство. Тогда найдутся клеточное пространство $\bar{X}$ с $(\bar{X})^n = x_0$ и гомотопическая эквивалентность $f: (X, x_0) \rightarrow (\bar{X}, \bar{x}_0)$.

Доказательство. Применим предложение 6.13 к относительному клеточному пространству $(X, \{x_0\})$. В результате $(X, \{x_0\})$ окажется вложенным в такое пространство (X', A') , что $(X', A')^n = A'$ и X является сильным деформационным ретрактом пространства X' , а $\{x_0\}$ — сильным деформационным ретрактом пространства A' . Последнее условие означает, что A' стягиваемо. Поэтому, в силу предложения 6.6, $(X', A') \rightarrow (X'/A', *)$ — гомотопическая эквивалентность. Очевидно, что $(X'/A')^n = *$. Таким образом, можно взять в качестве $(\bar{X}, \bar{x}_0)$ пространство $(X'/A', *)$ и определить f как композицию $(X, x_0) \subset (X', A') \rightarrow (X'/A', *)$. $\square$

6.15. Следствие. Пусть X — n -связное, а Y — m -связное клеточные пространства. Тогда $X \wedge Y$ является $(n+m+1)$ -связным клеточным пространством.

Доказательство. Можно считать, что $X^n = x_0$, $Y^m = y_0$. Тогда клетки пространства $X \times Y$ имеют вид $x_0 \times y_0$, $x_0 \times e_\alpha^{m+1}$, $e_\alpha^{n+1} \times y_0$, $e_\alpha^{n+1} \times e_\alpha^{m+1}$ и т. д. Первые три типа клеток лежат в $X \vee Y$, откуда следует, что $(X \times Y, X \vee Y)^{n+m+1} = X \vee Y$. Таким образом, $(X \wedge Y)^{n+m+1} = (X \times Y / X \vee Y)^{n+m+1} = *$. $\square$

Мы пока далеко не исчерпали тех возможностей, которые дает лемма о симплициальной аппроксимации. В том месте доказа-

тельства теоремы 6.10, где рассматривались отображения $f: D^r \rightarrow A \cup e^m$ для $r < m$, мы использовали лишь следующие факты: если f линейно на e_0^m , то $f(D^r) \cap e_0^m$ не может совпадать со всей клеткой e_0^m . Если $r \geq m$, это утверждение перестает быть верным, однако в указанном случае можно кое-что сказать о размерности множества $f^{-1}x$ для точек $x \in e_0^m$. Более точно, можно добиться того, чтобы $\dim(f^{-1}x) \leq r - m$. Это обобщает ситуацию $f^{-1}x = \emptyset$ для $r < m$. Мы используем это неравенство для получения дальнейшей информации о гомотопических группах. В частности, будут вычислены гомотопические группы $\pi_n(S^n, s_0)$.

6.16. *Триадой* $(X; A, B, x_0)$ называется топологическое пространство X , рассматриваемое вместе с двумя такими подпространствами A, B , что $X = A \cup B$ и $x_0 \in A \cap B$. Если X — клеточное пространство и A, B — два его клеточных подпространства или же, если $A = X - U$, где $U \subset B$ — открытое подмножество с $\bar{U} \subset \bar{B}$, то, как будет показано позже, включение

$$j: (A, A \cap B) \rightarrow (X, B)$$

для любого $n \geq 0$ индуцирует изоморфизм

$$j_*: H_n(A, A \cap B) \rightarrow H_n(X, B)$$

групп сингулярных гомологий. Это — так называемая «аксиома вырезания» для гомологий. Можно спросить, верно ли аналогичное утверждение для гомотопий? Ответ в общем случае отрицателен: гомоморфизм

$$j_*: \pi_n(A, A \cap B, x_0) \rightarrow \pi_n(X, B, x_0)$$

не является изоморфизмом. Нашей ближайшей целью является доказательство теоремы о гомотопическом вырезании, которая доставляет достаточные условия изоморфности j_* при небольших значениях n .

Однако, прежде чем приступить к доказательству этой теоремы, мы включим j_* в некоторую длинную точную последовательность и сведем нашу задачу к исследованию обращения в нуль некоторых гомотопических групп.

6.17. *Определение.* Определим n -мерное гомотопическое множество $\pi_n(X; A, B, x_0)$, $n \geq 2$, триады $(X; A, B, x_0)$, полагая

$$\pi_n(X; A, B, x_0) = \pi_{n-1}(P(X; x_0, B), P(A; x_0, A \cap B), \omega_0).$$

Разумеется, если $n > 2$, то $\pi_n(X; A, B, x_0)$ — группа, и если $n > 3$, то $\pi_n(X; A, B, x_0)$ — абелева группа.

Вспоминая, что

$$\pi_n(X, B, x_0) = \pi_{n-1}(P(X; x_0, B), \omega_0)$$

и

$$\pi_n(A, A \cap B, x_0) = \pi_{n-1}(P(A; x_0, A \cap B), \omega_0),$$

мы видим, что точная гомотопическая последовательность пары
 $(P(X; x_0, B), P(A; x_0, A \cap B), \omega_0)$

превращается в
 6.18.

$$\dots \rightarrow \pi_{n+1}(X; A, B, x_0) \xrightarrow{\partial'} \pi_n(A, A \cap B, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, B, x_0) \xrightarrow{k_*} \pi_n(X; A, B, x_0) \xrightarrow{\partial'} \dots$$

Последовательность 6.18 называется *точной гомотопической последовательностью триады* $(X; A, B, x_0)$.

6.19. Предложение. Пусть $(X; A, B, x_0)$ — некоторая триада. Вложение $j: (A, A \cap B) \rightarrow (X, B)$ индуцирует отображение

$$j_*: \pi_r(A, A \cap B, x_0) \rightarrow \pi_r(X, B, x_0),$$

являющееся изоморфизмом для $2 \leq r < n$, эпиморфизмом для $r = n$ и «мономорфизмом» ($j_*^{-1}(0) = 0$) для $r = 1$ тогда и только тогда, когда $\pi_r(X; A, B, x_0) = 0$, $2 \leq r \leq n$.

Доказательство очевидно.

Исследование групп $\pi_r(X; A, B, x_0)$ значительно упрощается, если отождествить их элементы с гомотопическими классами отображений $f: (D^{r-1} \times I, S^{r-2} \times I, D^{r-1} \times \{1\}, D^{r-1} \times \{0\} \cup \{s_0\} \times I) \rightarrow (X, A, B, x_0)$. Возможность такого отождествления следует из экспоненциального закона.

Выясним, когда указанные отображения нульгомотопны.

6.20. Лемма. Пусть (C, x_0) — некоторое хаусдорфово пространство, A получается из C приклеиванием n -мерной клетки e^n , B получается из C приклеиванием m -мерной клетки e^m и $X = A \cup B$. Тогда для всех $2 \leq r \leq n + m - 2$ имеет место равенство $\pi_r(X; A, B, x_0) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное отображение

$$f: (D^{r-1} \times I, S^{r-2} \times I, D^{r-1} \times \{1\}, D^{r-1} \times \{0\} \cup \{s_0\} \times I) \rightarrow (X; A, B, x_0).$$

По лемме о симплициальной аппроксимации можно так триангулировать $D^{r-1} \times I$, что если σ — произвольный симплекс этой триангуляции и $f(|\sigma|)$ пересекается с e_0^n (соответственно, e_0^m), то $f(|\sigma|) \subset e^n$ (соответственно, $f(|\sigma|) \subset e^m$) и f линейно на $|\sigma|$. Кроме того, если множество $f(|\sigma|)$ пересекается с e_0^n , то оно выпукло (в действительности $f(|\sigma|)$ является клеткой в смысле кусочно-линейной топологии), и его размерность на единицу меньше максимального числа аффинно независимых точек в $f(|\sigma|)$.

Разобьем множество тех симплексов σ , для которых $f(|\sigma|) \cap e_0^m \neq \emptyset$, на два класса C_1 и C_2 . Класс C_1 состоит из симплексов σ , для которых $\dim f(|\sigma|) < m$, а класс C_2 — из симплексов σ ,

для которых $\dim f(|\sigma|) = m$. Множество $\bigcup_{\sigma \in C_1} f(|\sigma|)$ не покрывает e_0^m , поэтому найдется такая точка $p \in e_0^m$, что если $p \in f(|\sigma|)$, то $\sigma \in C_2$. Без труда проверяется, что для любой такой точки p множество $f^{-1}p$ является полиэдром (в $D^{r-1} \times I$) размерности, не превосходящей $r - m$. Пусть $\pi: D^{r-1} \times I \rightarrow D^{r-1}$ — проекция на первый сомножитель. Тогда $K = \pi^{-1}(\pi(f^{-1}p))$ является полиэдром размерности, не превосходящей $r - m + 1 \leq (n + m - 2) - m + 1 = n - 1$. Следовательно, $f(K)$ не покрывает e_0^n , и мы можем найти такую точку $q \in e_0^n$, что $f^{-1}q \cap K = \emptyset$. А это означает, что $\pi(f^{-1}q) \cap \pi K = \emptyset$.

Далее, $\pi(f^{-1}p)$ и $\pi(f^{-1}q) \cup S^{r-2}$ — непересекающиеся замкнутые подмножества нормального пространства D^{r-1} . Поэтому найдется такая непрерывная функция $\chi: D^{r-1} \rightarrow I$, что

$$\chi(\pi(f^{-1}p)) = 1, \quad \chi(\pi(f^{-1}q) \cup S^{r-2}) = 0.$$

Зададим гомотопию $H: D^{r-1} \times I \times I \rightarrow D^{r-1} \times I$, полагая

$$H(x, s, t) = (x, s(1 - t\chi(x))), \quad x \in D^{r-1}, \quad s, t \in I.$$

Тогда

- i) $H_0 = 1_{D^{r-1} \times I}$;
- ii) $H_1(D^{r-1} \times I) \subset D^{r-1} - f^{-1}p$;
- iii) $H(D^{r-1} \times \{1\} \times I) \subset D^{r-1} \times I - f^{-1}q$;
- iv) H неподвижна на $S^{r-2} \times I$.

Таким образом, если мы рассмотрим f как отображение

$$(D^{r-1} \times I, S^{r-2} \times I, D^{r-1} \times \{1\}, D^{r-1} \times \{0\} \cup \{s_0\} \times I) \rightarrow (X, A, A - \{q\}, x_0),$$

то $f \cdot H$ будет гомотопией, связывающей f с некоторым отображением в $(X - \{p\}, A, X - \{p, q\}, x_0)$.

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \pi_r(X; A, B, x_0) & & \\ \downarrow j_{1*} & & \\ \pi_r(X - \{p\}; A, X - \{p, q\}, x_0) & \xrightarrow{j_{2*}} & \pi_r(X; A, X - \{q\}, x_0) \\ \uparrow j_{3*} & & \\ \pi_r(A; A, A - \{q\}, x_0). & & \end{array}$$

Мы уже доказали, что $j_{1*}[f] = j_{2*}[f']$ для некоторого

$$[f'] \in \pi_r(X - \{p\}, A, X - \{p, q\}, x_0).$$

По лемме 6.9 пространство B является сильным деформационным ретрактом пространства $X - \{q\}$. Отсюда без труда получается,

что j_{1*} — изоморфизм. Аналогично, A является сильным деформационным ретрактом $X - \{p\}$, и поэтому j_{3*} — также изоморфизм. Но $\pi_r(A; A, A - \{q\}, x_0) = 0$. Таким образом, $j_{1*}[f] = j_{3*}[f'] = 0$ и, следовательно, $[f] = 0$. $\square$

Лемма 6.20 содержит в себе самую трудную часть доказательства следующей важной теоремы.

6.21. Теорема о гомотопическом вырезании. Пусть $(X; A, B, x_0)$ — такая триада, что $(A, A \cap B)$ есть n -связное относительно клеточное пространство, $n \geq 1$, и $(B, A \cap B)$ есть m -связное относительно клеточное пространство. Тогда

$$j_*: \pi_r(A, A \cap B, x_0) \rightarrow \pi_r(X, B, x_0)$$

является изоморфизмом¹⁾ при $1 \leq r < n + m$ и эпиморфизмом при $r = n + m$.

Доказательство. Будем говорить, что отображение пар $f: (U, V) \rightarrow (Y, Z)$ является n -эквивалентностью, если $f_*: \pi_r(U, V, u_0) \rightarrow \pi_r(Y, Z, z_0)$ — изоморфизм при $1 \leq r < n$ и эпиморфизм при $r = n$. Таким образом, мы хотим показать, что j является $(m + n)$ -эквивалентностью или, что то же самое, что $\pi_r(X; A, B, x_0) = 0$ при $2 \leq r \leq m + n$. Обозначим для краткости пересечение $A \cap B$ через C и рассмотрим следующие шесть случаев.

i) $A = C \cup e^{n'}$, $B = C \cup e^{m'}$, $n' > n$, $m' > m$. Это в точности ситуация леммы²⁾ 6.20.

ii) $B = C \cup e^{m'}$, $A = C \cup e^{n_1} \cup \dots \cup e^{n_k}$, $m' > m$, $n_i > n$, $1 \leq i \leq k$. Мы имеем последовательность подпространств $A_i = C \cup e^{n_1} \cup e^{n_2} \cup \dots \cup e^{n_i}$, $1 \leq i \leq k$. Взяв $A_0 = C$, мы получаем

$$C = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_k = A.$$

Пусть $X_i = B \cup A_i$, $0 \leq i \leq k$. Тогда

$$B = X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_k = X.$$

Согласно случаю i) отображение

$$k(i): (A_i, A_{i-1}, x_0) \rightarrow (X_i, X_{i-1}, x_0)$$

является $(m + n)$ -эквивалентностью. Докажем по индукции, что

$$j(i): (A_i, C, x_0) \rightarrow (X_i, B, x_0)$$

есть $(m + n)$ -эквивалентность для любого i с $0 \leq i \leq k$ (заметим, что $j(k) = j$). Это утверждение очевидно для $i = 0$. Предположим,

¹⁾ При $r = 1$ изоморфизм надо понимать как биективное отображение пунктированных множеств. В дальнейшем мы не будем этого специально оговаривать. — Прим. ред.

²⁾ Для того чтобы доказать теорему в случае i), надо еще рассмотреть случай $r = 1$. По условию $\pi_1(A, A \cap B) = 0$, и надо показать, что $\pi_1(X, B) = 0$. Ясно, однако, что в случае i) имеем $X = B \cup e^{n'}$, где $n' > 1$, и, значит, $\pi_1(X, B) = 0$ по теореме 6.10. — Прим. ред.

что оно доказано для $i-1$; тогда мы имеем коммутативную диаграмму точных гомотопических последовательностей троек

$$\begin{array}{ccccc}
 \pi_{r+1}(A_i, A_{i-1}, x_0) & \rightarrow & \pi_r(A_{i-1}, C, x_0) & \rightarrow & \pi_r(A_i, C, x_0) \rightarrow \\
 \downarrow k(i)_* & & \downarrow j(i-1)_* & & \downarrow j(i)_* \\
 \pi_{r+1}(X_i, X_{i-1}, x_0) & \rightarrow & \pi_r(X_{i-1}, B, x_0) & \rightarrow & \pi_r(X_i, B, x_0) \rightarrow \\
 & & & & \pi_r(A_i, A_{i-1}, x_0) \rightarrow \pi_{r-1}(A_{i-1}, C, x_0) \\
 & & & & \downarrow k(i)_* \quad \downarrow j(i-1)_* \\
 & & & & \pi_r(X_i, X_{i-1}, x_0) \rightarrow \pi_{r-1}(X_{i-1}, B, x_0).
 \end{array}$$

Если $1 < r < m+n$, то мы находимся в условиях леммы о пяти гомоморфизмах. Следовательно, в этом случае $j(i)_*$ — изоморфизм. Если же $r = m+n$, то второй и четвертый вертикальные морфизмы являются эпиморфизмами, а пятый — изоморфизмом. Этого достаточно, чтобы доказать эпиморфность гомоморфизма $j(i)_*$. (Замечание: в случае $r=2$ мы используем равенства $\pi_1(A_{i-1}, C, x_0) = \pi_1(X_{i-1}, B, x_0) = 0$, вытекающего из размерностного ограничения¹⁾ $n \geq 1$.)

iii) $A = C \cup e^{n_1} \cup \dots \cup e^{n_k}$, $B = C \cup e^{m_1} \cup e^{m_2} \cup \dots \cup e^{m_l}$, $n_i > n$, $1 \leq i \leq k$, $m_i > m$, $1 \leq i \leq l$. Положим $B_0 = C$, $B_i = C \cup e^{m_1} \cup \dots \cup e^{m_i}$, $1 \leq i \leq l$. Тогда $B_l = B$. Пусть $X_i = A \cup B_i$, $0 \leq i \leq l$; тогда $X_0 = A$, $X_l = X$. Отображение $j: (A, C, x_0) \rightarrow (X, B, x_0)$ раскладывается в композицию

$$(A, C, x_0) = (X_0, B_0, x_0) \xrightarrow{j_1} (X_1, B_1, x_0) \xrightarrow{j_2} \dots \xrightarrow{j_l} (X_l, B_l, x_0) = (X, B, x_0).$$

Согласно случаю ii), каждое отображение j_i является $(m+n)$ -эквивалентностью. Следовательно, $j = j_l \circ j_{l-1} \circ \dots \circ j_1$ — также $(m+n)$ -эквивалентность.

iv) $(A, C)^n = C$, $(B, C)^m = C$. Любое отображение

$$f: (D^{r-1} \times I, S^{r-2} \times I, D^{r-1} \times \{1\}, D^{r-1} \times \{0\} \cup \{s_0\} \times I) \rightarrow (X, A, B, x_0)$$

¹⁾ Эти равенства объяснены в примечании на с. 103. В случае $r=2$ из них тривиально следует, что $j(i-1)_*$ — изоморфизм, и можно применять лемму о пяти гомоморфизмах, а в случае $r=1$ из них тривиально следует, что $j(i)_*$ — изоморфизм. — *Прим. ред.*

имеет компактный образ, и потому найдутся такие клеточные подпространства A' , B' , что $C \subset A' \subset A$, $C \subset B' \subset B$,

$$A' = C \cup e^{n_1} \cup \dots \cup e^{n_k}, \quad B' = C \cup e^{m_1} \cup \dots \cup e^{m_l}$$

и $f(D^{r-1} \times I) \subset X' = A' \cup B'$, т. е. гомотопический класс $[f]$ лежит в образе $\pi_r(X'; A', B', x_0) \rightarrow \pi_r(X; A, B, x_0)$. Но пара (A', C) по-прежнему n -связна, а (B', C) — m -связна. Следовательно, в силу только что разобранных случаев iii) при $2 \leq r \leq m+n$ имеем

$$\pi_r(X'; A', B', x_0) = 0.$$

v) $(B, C)^m = C$. Согласно предложению 6.13, можно вложить пару (A, C) в такое относительно клеточное пространство (A', C') , что $(A', C')^n = C'$ и C является сильным деформационным ретрактом пространства C' , а A — сильным деформационным ретрактом пространства A' . Положим $B' = B \cup C'$, $X' = B \cup A'$. Тогда X является сильным деформационным ретрактом пространства X' и B — сильным деформационным ретрактом пространства B' . Таким образом, включение триад

$$i: (X; A, B, x_0) \rightarrow (X'; A', B', x_0)$$

индуцирует изоморфизм гомотопических групп

$$i_*: \pi_r(X; A, B, x_0) \rightarrow \pi_r(X'; A', B', x_0)$$

при $r \geq 2$. Но согласно iv) $\pi_r(X'; A', B', x_0) = 0$ при $2 \leq r \leq m+n$.

vi) Общий случай. Повторяя прием предыдущего случая, вкладываем (B, C) в (B', C') и берем $A' = A \cup C'$, $X' = A \cup B'$. $\square$

6.22. Следствие. Пусть (X, A, x_0) — некоторая n -связная ($n \geq 1$) клеточная пара с m -связным клеточным подпространством A . Тогда проекция $p: (X, A) \rightarrow (X/A, *)$ индуцирует отображение

$$p_*: \pi_r(X, A, x_0) \rightarrow \pi_r(X/A, \{*\}, *) \cong \pi_r(X/A, *),$$

являющееся изоморфизмом при $2 \leq r \leq m+n$ и эпиморфизмом при $r = m+n+1$.

Доказательство. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} (X, A) & \xrightarrow{i} & (X \cup CA, CA) \\ \downarrow p & & \downarrow p' \\ (X/A, *) & \xrightarrow{\phi} & (X \cup CA/CA, *) \end{array}$$

в которой ϕ — гомеоморфизм из предложения 2.38. Согласно предложению 6.6, отображение p' является гомотопической эквивалентностью (пространство $(CA, *)$ стягиваемо). Таким образом,

достаточно показать, что

$$i_*: \pi_r(X, A, x_0) \rightarrow \pi_r(X \cup CA, CA, *)$$

— изоморфизм при $2 \leq r \leq m+n$ и эпиморфизм при $r = m+n+1$ или, эквивалентно, что $\pi_r(X \cup CA; X, CA, *) = 0$ при $2 \leq r \leq m+n+1$. Но это следует из теоремы 6.21, примененной к триаде $(X \cup CA; X, CA, *)$: действительно, пара (X, A) n -связна и $\pi_r(CA, A, *) \cong \pi_{r-1}(A, x_0) = 0$ при $1 \leq r \leq m+1$. $\square$

Как известно, для гомологий из аксиомы вырезания следует, что для любого пространства $(X, x_0) \in \mathcal{PT}$ имеет место изоморфизм $\sigma: H_n(X, \{x_0\}) \cong H_{n+1}(SX, \{*\})$. Естественно ожидать, что при соответствующих ограничениях аналогичный изоморфизм имеет место и для гомотопических групп.

6.23. Определение. Гомотопической надстройкой называется отображение

$$\Sigma: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_{n+1}(SX, *), \quad n \geq 0,$$

задаваемое формулой $\Sigma[f] = [Sf] = [1_{S^1} \wedge f]$:

$$S^{n+1} \cong S^1 \wedge S^n \xrightarrow{1 \wedge f} S^1 \wedge X = SX.$$

Очевидно, что Σ является естественным преобразованием функтора π_n в функтор $\pi_{n+1} \circ S$.

6.24. Лемма. Для любой пары $(X, x_0) \in \mathcal{PT}$ и любого $n \geq 0$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(X, x_0) & \xrightarrow{\Sigma} & \pi_{n+1}(SX, *) \cong \pi_{n+1}(CX/X, *) \\ \partial^{-1} \downarrow \cong & & \cong \downarrow j_* \\ \pi_{n+1}(CX, X, x_0) & \xrightarrow{p_*} & \pi_{n+1}(CX/X, \{*\}, *) \end{array}$$

коммутативна.

Доказательство. Заметим прежде всего, что для любого отображения $f: (S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} CS^n & \xrightarrow{q} & CS^n/S^n \cong S(S^n) \\ Cf \downarrow & & \downarrow Sf \\ CX & \xrightarrow{p} & CX/X \cong S(X) \end{array}$$

Так как $\partial[Cf] = [f]$, то

$$j_* \cdot \Sigma[f] = j_*[Sf] = [Sf \circ q] = [p \circ Cf] = p_*[Cf] = p_*\partial^{-1}[f]. \quad \square$$

6.25. Следствие. *Отображение Σ является гомоморфизмом для любого (X, x_0) и любой пары $n \geq 1$.*

6.26. Теорема Фрейденталя о надстройке. *Для любого n -связного ($n \geq 0$) клеточного пространства X отображение*

$$\Sigma: \pi_r(X, x_0) \rightarrow \pi_r(SX, *)$$

является изоморфизмом при $1 \leq r \leq 2n$ и эпиморфизмом при $r = 2n + 1$.

Доказательство. Согласно лемме 6.24, достаточно доказать соответствующее утверждение для гомоморфизма p_* . Но так как пространство X n -связно, а пара (CX, X) $(n+1)$ -связна, то требуемое утверждение о гомоморфизме p_* вытекает из следствия 6.22, примененного к паре $(CX, X, *)$. $\square$

Применим теорему 6.26 для доказательства того, что $\pi_n(S^n, s_0) \cong \mathbb{Z}$ для $n \geq 1$. Согласно примеру 4.18, i), этот результат верен для $n=1$. Поэтому начнем со случая $n=2$.

6.27. Предложение. *Для любого $n \geq 0$ четверка ¹⁾ $(\mathbb{C}P^n, \eta, S^{2n+1}, S^1)$ является расслоенным пространством.*

Доказательство. $(\mathbb{C}P^n, \eta, S^{2n+1}, S^1)$ есть в точности расслоенное пространство $V_{1, n+1}(\mathbb{C}) \rightarrow G_{1, n+1}(\mathbb{C})$, обсуждавшееся в примере 4.14. Можно, однако, дать и прямое доказательство этого факта. Для каждого k , $1 \leq k \leq n+1$, положим

$$U_k = \{[z_1, \dots, z_{n+1}] \in \mathbb{C}P^n: z_k \neq 0\}.$$

Тогда множества $\{U_1, \dots, U_{n+1}\}$ образуют открытое покрытие пространства $\mathbb{C}P^n$. Зададим отображение $\phi_k: U_k \times S^1 \rightarrow \eta^{-1}U_k$, полагая

$$\phi_k([z_1, \dots, z_{n+1}], z) = \left(\frac{z_1 \bar{z}_k z}{|z_k| \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} |z_i|^2}}, \dots, \frac{z_{n+1} \bar{z}_k z}{|z_k| \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} |z_i|^2}} \right).$$

Тогда очевидно, что $\eta \circ \phi_k = p_{U_k}$ и отображение ϕ_k^{-1} задается формулой

$$\phi_k^{-1}(z_1, \dots, z_{n+1}) = ([z_1, \dots, z_{n+1}], \frac{z_k}{|z_k|}). \square$$

Ясно также, что $(\mathbb{R}P^n, p, S^n, S^0)$ и $(\mathbb{H}P^n, v, S^{4n+3}, S^3)$ являются расслоенными пространствами для всех $n \geq 0$.

Мы знаем, что пространство $\mathbb{C}P^0$ состоит из одной точки, а $\mathbb{C}P^1$ состоит из одной нульмерной и одной двумерной клеток.

Таким образом, $\mathbb{C}P^1$ обязано быть гомеоморфным двумерной сфере S^2 (этот гомеоморфизм задается композицией $S^2 \cong D^2/S^1 \xrightarrow{\bar{f}} \mathbb{C}P^1/\mathbb{C}P^0$, где $\bar{f}$ — индуцировано характеристическим отображением $f: (D^2, S^1) \rightarrow (\mathbb{C}P^1, \mathbb{C}P^0)$ единственной двумерной клетки).

¹⁾ Отображение η определено в примере 5) п. 5.4. — *Прим. ред.*

Следовательно, мы имеем расслоенное пространство (S^2, η, S^3, S^1) . Рассмотрим отрезок точной гомотопической последовательности этого расслоения:

$$\dots \rightarrow \pi_2(S^3, s_0) \rightarrow \pi_2(S^2, s_0) \rightarrow \pi_1(S^1, s_0) \rightarrow \pi_1(S^3, s_0) \rightarrow \dots$$

Так как $\pi_1(S^3, s_0) = \pi_2(S^3, s_0) = 0$ в силу 6.12, то

$$\pi_2(S^2, s_0) \cong \pi_1(S^1, s_0) \cong \mathbb{Z}.$$

6.28. Теорема. Для любого $n \geq 1$ имеет место изоморфизм

$$\Sigma: \pi_n(S^n, s_0) \rightarrow \pi_{n+1}(S^{n+1}, s_0)$$

и, следовательно, $\pi_n(S^n, s_0) \cong \mathbb{Z}$, $n \geq 1$.

Доказательство. Так как сфера S^n $(n-1)$ -связна, то по теореме Фрейденшталя

$$\Sigma: \pi_r(S^n, s_0) \rightarrow \pi_{r+1}(S^{n+1}, s_0)$$

— изоморфизм при $r < 2n - 1$ и эпиморфизм при $r = 2n - 1$. В частности,

$$\Sigma: \pi_n(S^n, s_0) \rightarrow \pi_{n+1}(S^{n+1}, s_0)$$

— изоморфизм при $n < 2n - 1$ (т. е. при $n > 1$) и эпиморфизм при $n = 1$. Но любой эпиморфизм $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ является изоморфизмом. $\square$

Рассмотрим другой отрезок точной гомотопической последовательности расслоения $\eta: S^3 \rightarrow S^2$:

$$\dots \rightarrow \pi_3(S^1, s_0) \rightarrow \pi_3(S^3, s_0) \xrightarrow{\eta_*} \pi_3(S^2, s_0) \rightarrow \pi_2(S^1, s_0) \rightarrow \dots$$

Мы знаем (см. пример 4.18), что $\pi_3(S^1, s_0) = \pi_2(S^1, s_0) = 0$. Следовательно,

$$\eta_*: \pi_3(S^3, s_0) \rightarrow \pi_3(S^2, s_0)$$

— изоморфизм. Таким образом, $\pi_3(S^2, s_0) \cong \mathbb{Z}$, и это — первый пример, в котором $\pi_m(S^n, s_0) \neq 0$ для $m > n$. Поскольку группа $\pi_3(S^3, s_0)$ порождается классом $[1_{S^3}]$, то $\pi_3(S^2, s_0)$ порождается классом $[\eta]$. Отображение $\eta: S^3 \rightarrow S^2$ называется *отображением Хопфа*. Можно показать, что и расслоение $\nu: S^7 \rightarrow \mathbb{H}P^1 \cong S^4$ определяет ненулевой элемент $[\nu] \in \pi_7(S^4, s_0)$ бесконечного порядка.

Для каждого r мы имеем последовательность

$$\pi_{2r+2}(S^{r+2}, s_0) \xrightarrow{\Sigma} \pi_{2r+3}(S^{r+3}, s_0) \xrightarrow{\Sigma} \dots \xrightarrow{\Sigma} \pi_{k+r}(S^k, s_0) \xrightarrow{\Sigma} \dots$$

Обозначим ее типичную группу $\pi_{k+r}(S^k, s_0)$, $k \geq r + 2$, через π_r^S . Она называется *r -й стабильной гомотопической группой*¹⁾. Например, группа $\pi_1^S \cong \pi_4(S^3, s_0)$ изоморфна группе $\mathbb{Z}_2$ и порождается элементом $\Sigma[\eta]$, так как $\Sigma: \pi_3(S^2, s_0) \rightarrow \pi_4(S^3, s_0)$ — эпиморфизм.

¹⁾ Точнее, r -й стабильной гомотопической группой нульмерной сферы S^0 ; см. п. 8.43. — *Прим. ред.*

Займемся теперь доказательством теоремы Дж. Г. К. Уайтхеда, которая утверждает, что в категории клеточных пространств слабая гомотопическая эквивалентность является гомотопической эквивалентностью. Доказательство теоремы Уайтхеда не зависит от леммы о симплициальной аппроксимации и гораздо проще многих рассмотренных нами доказательств. В главе 3 было показано, что любая задача об n -эквивалентности может быть превращена в задачу об n -связности; сейчас мы воспользуемся этим методом.

Предложение 3.14 утверждает, что пара (Y, B) является n -связной в том и только в том случае, когда любое отображение $f: (D^r, S^{r-1}) \rightarrow (Y, B)$ может быть продеформировано $\text{rel } S^{r-1}$ в отображение f' с $f'(D^r) \subset B$ для всех $0 \leq r \leq n$ (D^0 — точка, $S^{-1} = \emptyset$). Используя цилиндр отображения, можно заменить включение $i: B \rightarrow Y$ n -эквивалентностью $f: Z \rightarrow Y$ и показать, что соответствующий результат верен и в этом случае.

6.29. Лемма. Пусть $f: Z \rightarrow Y$ является n -эквивалентностью. Тогда для любых отображений $g: S^{r-1} \rightarrow Z$ и $h: D^r \rightarrow Y$ с $h|_{S^{r-1}} = f \circ g$ найдется такое отображение $h': D^r \rightarrow Z$, что $h'|_{S^{r-1}} = g$ и $f \circ h' \simeq h \text{ rel } S^{r-1}$.

Доказательство. Соответствующая диаграмма отображений представлена на рис. 13.

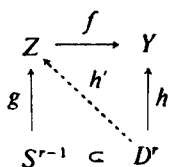


Рис. 13.

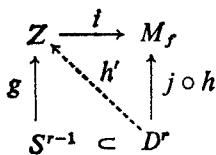


Рис. 14.

Пусть M_f — цилиндр отображения f с сопутствующими отображениями $i: Z \rightarrow M_f$, $j: Y \rightarrow M_f$, $r: M_f \rightarrow Y$ и $H: M_f \times I \rightarrow M_f$ (см. п. 3.15). Идея доказательства леммы заключается в замене отображения $f: Z \rightarrow Y$ включением $i: Z \rightarrow M_f$ и применением предложения 3.14 к n -связной паре (M_f, Z) (рис. 14). Единственной трудностью, возникающей на этом пути, является отсутствие равенства $j \circ h|_{S^{r-1}} = i \circ g$; в самом деле, $j \circ h|_{S^{r-1}} = j \circ f \circ g = j \circ r \circ i \circ g \simeq i \circ g$. Гомотопия в этой строке имеет вид $H \circ (ig \times \alpha)$, $\alpha(t) = 1 - t$. Так как $S^{r-1} \subset D^r$ является корасслоением, то можно продолжить $H \circ (ig \times \alpha)$ до гомотопии $H': D^r \times I \rightarrow M_f$ с $H'_0 = j \circ h$. Пусть $\bar{h} = H'$; тогда $\bar{h}|_{S^{r-1}} = H'_1|_{S^{r-1}} = H'_0 \circ i \circ g = i \circ g$. Следовательно, к отображению $\bar{h}: (D^r, S^{r-1}) \rightarrow (M_f, Z)$ можно применить предложение 3.14. В результате мы получим отображение $h': D^r \rightarrow Z$, гомотопное $\text{rel } S^{r-1}$ отображению $\bar{h}$ и такое, что $h'|_{S^{r-1}} = g$. Таким образом, $f \circ h' = r \circ i \circ h' \simeq r \circ h' \simeq r \circ j \circ h = h$, и поскольку $r \circ H'|_{S^{r-1} \times I} =$

$r \cdot H \cdot (ig \times \alpha)$ — постоянное отображение, то указанная гомотопия неподвижна на S^{r-1} . $\square$

Приобретенный нами опыт работы с клеточными пространствами позволяет предположить, что лемма 6.29 останется верной, если заменить в ней пару (D^r, S^{r-1}) относительным клеточным пространством (X, A) с $\dim(X, A) \leq n$. Это и в самом деле так.

6.30. Теорема. Пусть $f: Z \rightarrow Y$ — некоторая n -эквивалентность и (X, A) — относительное клеточное пространство с $\dim(X, A) \leq n$. Тогда для любых отображений $g: A \rightarrow Z$, $h: X \rightarrow Y$ с $h|A = f \circ g$ найдется такое отображение $h': X \rightarrow Z$, что $h'|A = g$ и $f \circ h' \simeq h \text{ rel } A$ (случай $n = \infty$ не исключается).

Доказательство. Пусть $\mathcal{S}$ — множество всех таких троек (X', k, K) , что $A \subset X' \subset X$, $k: X' \rightarrow Z$ — отображение с $k|A = g$ и $K: X' \times I \rightarrow Y$ — гомотопия, связывающая $f \circ k$ с $h|X'$ и неподвижная на A . Зададим на $\mathcal{S}$ отношение частичного порядка, полагая, что $(X', k, K) \leq (X'', k', K')$ тогда и только тогда, когда $A \subset X' \subset X'' \subset X$, $k'|X' = k$, $K'|X' \times I = K$. Очевидно, что тройка (A, g, K_0) (где K_0 — постоянная гомотопия $A \times I \rightarrow Y$) содержится в $\mathcal{S}$, откуда следует, что $\mathcal{S} \neq \emptyset$. Покажем, что множество $\mathcal{S}$ удовлетворяет условиям леммы Цорна.

Пусть $\mathcal{T}$ — некоторое линейно упорядоченное подмножество в $\mathcal{S}$. Положим $W = \bigcup X'$, где в объединение входят все подпространства X' , для которых $(X', k, K) \in \mathcal{T}$. Зададим отображение $h': W \rightarrow Z$ и гомотопию $H': W \times I \rightarrow Y$, полагая $h'(x) = k(x)$ и $H'(x, t) = K(x, t)$, если $x \in X'$ для некоторой $(X', k, K) \in \mathcal{T}$. Так как пространство X наделено слабой топологией, то h' и H' корректно определены и непрерывны. Очевидно, что $(W, h', H') \in \mathcal{S}$ и $(X', k, K) \leq (W, h', H')$ для всех $(X', k, K) \in \mathcal{T}$.

Таким образом, по лемме Цорна множество $\mathcal{S}$ имеет максимальный элемент (X', k, K) . Поэтому нам осталось показать лишь, что $X' = X$. Если $X' \neq X$, то рассмотрим множество клеток из $X - X'$ и возьмем ту из них, которая имеет минимальную размерность. Обозначим эту клетку через e . Пусть $\downarrow: (D^k, S^{k-1}) \rightarrow (X, X')$ — характеристическое отображение клетки e и $\psi = \phi|S^{k-1}: S^{k-1} \rightarrow X'$ — приклеивающее отображение. Применяя лемму 6.29 к паре $k \circ \psi: S^{k-1} \rightarrow Z$, $h \circ \phi: D^k \rightarrow Y$, найдем отображение $\theta: D^k \rightarrow Z$ с $\theta|S^{k-1} = k \circ \psi$ и гомотопию $\Theta: D^k \times I \rightarrow Y$, связывающую $f \circ \theta$ с $h \circ \phi$. Продолжим k до отображения $k': X' \cup e \rightarrow Z$ и K до гомотопии $K': (X' \cup e) \times I \rightarrow Y$, полагая

$$k'(x) = \begin{cases} h(x), & \text{если } x \in X', \\ \theta(y), & \text{если } x = \phi(y) \text{ для } y \in D^k, \end{cases}$$

$$K'(x, t) = \begin{cases} K(x, t), & \text{если } x \in X', \\ \Theta(x, t), & \text{если } x = \phi(y) \text{ для } y \in D^k. \end{cases}$$

Тогда $(X' \cup e, k', K) \in \mathcal{S}$ и $(X', k, K) < (X' \cup e, k', K')$, что противоречит максимальной тройке (X', k, K) . Следовательно, $X' = X$ и поэтому можно взять $h' = k$. $\square$

Замечание. Разумеется, теорему 6.30 можно применить к включению $i: B \rightarrow Y$, которое является n -эквивалентностью, если пара (Y, B) n -связна. Тогда эта теорема утверждает, что каждое отображение $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ из относительного клеточного пространства (X, A) , $\dim(X, A) \leq n$, может быть продеформировано $\text{rel } A$ в отображение f' с $f'(X) \subset B$. В частности, если (Y, B) — относительное клеточное пространство, n -связное для всех n , то применяя это утверждение к тождественному отображению $1: (Y, B) \rightarrow (Y, B)$, мы найдем, что B является сильным деформационным ретрактом пространства Y . Таким образом, любое клеточное пространство X , у которого $\pi_r(X, x_0) = 0$ для любого $r \geq 0$, является стягиваемым.

6.31. Теорема. Пусть $f: Z \rightarrow Y$ — отображение, являющееся n -эквивалентностью (случай $n = \infty$ не исключается). Тогда для любого клеточного пространства X отображение

$$f_*: [X; Z] \rightarrow [X; Y]$$

сюръективно, если $\dim X \leq n$, и биективно, если $\dim X < n$. Аналогичное утверждение справедливо и в категории пунктированных пространств.

Доказательство. Мы рассмотрим лишь случай пунктированных пространств.

i) Отображение f_* сюръективно, если $\dim X \leq n$. В самом деле, пусть $h: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ — некоторое отображение. Применим теорему 6.30 к пространству $A = \{x_0\}$ и отображению $g: A \rightarrow Z$, задаваемому формулой $g(x_0) = z_0$. В результате найдется отображение $h': (X, x_0) \rightarrow (Z, z_0)$ с $f \cdot h' \simeq h \text{ rel } x_0$, т. е. $f_*[h'] = [h]$.

ii) Отображение f_* инъективно, если $\dim X < n$. Действительно, пусть заданы отображения $g_0, g_1: (X, x_0) \rightarrow (Z, z_0)$ и гомотопия $h: X \times I \rightarrow Y$, связывающая $f \cdot g_0$ с $f \cdot g_1$ ($\text{rel } x_0$). Возьмем $X' = X \times I$, $A' = X \times \{0, 1\} \cup \{x_0\} \times I$ (т. е. $(X', A') = (X, x_0) \times (I, i)$) и определим отображение $g: A' \rightarrow Z$ условиями $g|_{X \times \{0\}} = g_0$, $g|_{X \times \{1\}} = g_1$, $g(x_0, t) = z_0$, $t \in I$. Тогда по теореме 6.30 существует отображение $h': X \times I \rightarrow Z$ с $h'|_{A'} = g$. Таким образом, h' является гомотопией $\text{rel } x_0$, связывающей g_0 с g_1 . Другими словами, равенство $f_*[g_1] = f_*[g_0]$ влечет $[g_1] = [g_0]$. $\square$

6.32. Теорема (Дж. Г. К. Уайтхед). Пусть X, Y — клеточные пространства. Отображение $f: X \rightarrow Y$ является гомотопической эквивалентностью тогда и только тогда, когда оно является слабой гомотопической эквивалентностью.

Доказательство. Очевидно, что гомотопическая эквивалентность является слабой гомотопической эквивалентностью. Пусть f — слабая гомотопическая эквивалентность. Тогда отображения

$$[X; X] \xrightarrow{f_*} [X; Y] \text{ и } [Y; X] \xrightarrow{f_*} [Y; Y]$$

являются биекциями. Возьмем такое отображение $g: Y \rightarrow X$, что $f_*[g] = [1_Y]$. Тогда $[f \cdot g] = f_*[g] = [1_Y]$, т. е. $f \cdot g \simeq 1_Y$. Кроме того, $f_*[g \cdot f] = [f \cdot g \cdot f] = [1_Y \cdot f] = [f] = [f \cdot 1_X] = f_*[1_X]$, и так как отображение f_* инъективно, то $[g \cdot f] = [1_X]$, т. е. $g \cdot f \simeq 1_X$. $\square$

Мы хотим предостеречь читателя от довольно распространенной ошибки. При невнимательном прочтении теоремы 6.32 может показаться, что гомотопический тип клеточного пространства полностью определяется его гомотопическими группами. На самом деле это не так: важную роль играет существование отображения $f: X \rightarrow Y$; просто наличие изоморфизмов $\pi_n(X, x_0) \cong \pi_n(Y, y_0)$, $n \geq 0$, не гарантирует гомотопической эквивалентности $(X, x_0) \cong (Y, y_0)$. Следующий пример иллюстрирует это обстоятельство.

6.33. Пример. Трехмерные линзовые пространства $L(p, q)$, $p \in \mathbb{N} - \{0\}$, $(p, q) = 1$, определяются следующим образом. Пусть $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ — подпространство

$$\{(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2: |z_0|^2 + |z_1|^2 = 1\}.$$

Определим отображение $g: S^3 \rightarrow S^3$, полагая

$$g(z_0, z_1) = (e^{2\pi i/p} z_0, e^{2\pi i/q} z_1).$$

Если обозначить через g^k k -кратную итерацию $\underbrace{g \cdot g \cdot \dots \cdot g}_k$ отобра-

жения g , то очевидно, что $g^p = 1_{S^3}$. Следовательно, g определяет действие на S^3 группы $\mathbb{Z}_p$, задаваемое формулой

$$\bar{k} \cdot x = g^k(x), \quad \bar{k} \in \mathbb{Z}_p, \quad x \in S^3.$$

Очевидно, что это действие не имеет неподвижных точек и, значит, согласно предложению 4.20 и замечанию 4.21, iii), проекция $q: S^3 \rightarrow S^3/\mathbb{Z}_p$ является накрытием. Положим $L(p, q) = S^3/\mathbb{Z}_p$. Так как $\pi_1(S^3, s_0) = 0$, то из 4.21, i) следует, что $\pi_1(L(p, q), *) \cong \mathbb{Z}_p$ и, разумеется, $\pi_n(L(p, q), *) \cong \pi_n(S^3, s_0)$ для всех $n \geq 2$. Кроме того, отображение $q_*: \pi_n(S^3, s_0) \rightarrow \pi_n(L(p, q), *)$ является гомоморфизмом групп с операторами из $\mathbb{Z}_p$. Но $g: S^3 \rightarrow S^3$ гомотопно (без сохранения отмеченной точки s_0 !) отображению 1_{S^3} (соответствующая гомотопия $H: S^3 \times I \rightarrow S^3$ задается формулой

$$H(z_0, z_1, t) = (e^{2\pi i t/p} z_0, e^{2\pi i q t/p} z_1).$$

Значит, группа $\mathbb{Z}_p$ тривиально действует на $\pi_n(S^3, s_0)$ и, следовательно, на $\pi_n(L(p, q), *)$, $n \geq 1$.

Таким образом, мы показали, что гомотопические группы пространств $L(p, q)$ как группы с операторами из $\mathbb{Z}_p$ не зависят от q . Выясним теперь, будут ли $L(p, q)$ и $L(p, q')$ гомотопически эквивалентными при $q \neq q'$. Когомологии пространств $L(p, q)$ и $L(p, q')$ изоморфны как группы, но не изоморфны как кольца, за исключением того случая, когда $qq' \equiv \pm m^2 \pmod{p}$ для некоторого m (см., например, [92]). Таким образом, хотя

$\pi_*(L(5, 1), *) \cong \pi_*(L(5, 2), *)$ (и это есть изоморфизм $\mathbb{Z}_5$ -групп), пространства $L(5, 1)$ и $L(5, 2)$ гомотопически не эквивалентны.

Замечание. На линзовом пространстве $L(p, q)$ нетрудно задать клеточную структуру. Для этого разобьем S^3 на клетки таким образом, чтобы $g: S^3 \rightarrow S^3$ не переводило никакую клетку в себя. Тогда $L(p, q) = S^3/\mathbb{Z}_p$ наследует естественную клеточную структуру.

Комбинируя теоремы 6.10 и 6.30, можно показать, что любое отображение клеточных пространств гомотопно отображению, «согласованному с клеточными структурами».

6.34. Определение. Пусть (X, A) и (Y, B) — относительные клеточные пространства. Отображение $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ называется *клеточным*, если $f((X, A)^n) \subset (Y, B)^n$ для каждого $n \geq -1$. Гомотопия $(X, A) \times I \rightarrow (Y, B)$ называется *клеточной*, если она клеточна как отображение $(X \times I, A \times I) \rightarrow (Y, B)$.

6.35. Предложение. Пусть (X, A) и (Y, B) — относительные клеточные пространства. Тогда каждое отображение $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ гомотопно $\text{rel } A$ клеточному отображению и любые два гомотопных $\text{rel } A$ клеточных отображения можно связать клеточной гомотопией.

Доказательство. По теореме 6.10 для любого $n \geq -1$ пространство $(Y, (Y, B)^n)$ является n -связным. Поскольку $\dim (X, A)^n \leq n$, то, применяя теорему 6.30, можно индуктивно построить такую последовательность гомотопий $H^r: X \times I \rightarrow X$, $r \geq 0$, что

- i) $H_0^r = f$,
- ii) $H_0^r = H_1^{r-1}$,
- iii) H^r неподвижна на $(X, A)^{r-1}$,
- iv) $H_1^r((X, A)^r) \subset (Y, B)^r$.

Зададим теперь гомотопию $H: X \times I \rightarrow Y$ формулой

$$H(x, t) = \begin{cases} H^{r-1}(x, (r+1)(r(t-1)+1)), \\ \frac{r-1}{r} \leq t \leq \frac{r}{r+1}, & x \in X, \\ H^r(x, 1), & t = 1, \quad x \in (X, A)^r. \end{cases}$$

Тогда H есть такая гомотопия $\text{rel } A$, что $H_0 = f$ и H_1 — клеточное отображение.

Для того чтобы доказать второе утверждение, достаточно применить только что полученный результат к отображению $(X \times I, A \times I \cup X \times \{0, 1\}) \rightarrow (Y, B)$. $\square$

Таким образом, для клеточных пространств (X, x_0) и (Y, y_0) любой элемент из $[X, x_0; Y, y_0]$ представим клеточным отображением $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$.

Уп р а ж н е н и е. Показать, что если $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ — клеточное отображение, то $Y \cup_f CX$ — клеточное пространство.

Займемся теперь построением клеточных пространств с произвольными гомотопическими группами.

6.36. Предложение. Пусть X — n -связное и Y — m -связное клеточные пространства и либо X , либо Y локально конечно. Тогда отображения $i_X: (X, x_0) \rightarrow (X \vee Y, *)$, $i_Y: (Y, y_0) \rightarrow (X \vee Y, *)$, задаваемые формулами $i_X(x) = (x, y_0)$, $i_Y(y) = (x_0, y)$, при $2 \leq r \leq n + m$ индуцируют изоморфизм

$$(i_{X*}, i_{Y*}): \pi_r(X, x_0) \oplus \pi_r(Y, y_0) \rightarrow \pi_r(X \vee Y, *).$$

Доказательство. Как было замечено при доказательстве следствия 6.15, можно считать, что $(X \times Y, X \vee Y)^{n+m+1} = X \vee Y$. Следовательно, точность гомотопической последовательности пары $(X \times Y, X \vee Y, *)$ влечет изоморфность всех гомоморфизмов

$$j_*: \pi_r(X \vee Y, *) \rightarrow \pi_r(X \times Y, *), \quad 1 \leq r \leq n + m.$$

Кроме того, по теореме 4.1 мы имеем изоморфизмы

$$(p_{X*}, p_{Y*}): \pi_r(X \times Y, *) \rightarrow \pi_r(X, x_0) \times \pi_r(Y, y_0) \cong \pi_r(X, x_0) \oplus \pi_r(Y, y_0), \quad r \geq 2.$$

Так как $p_X \circ j \circ i_X = 1_X$ и $p_Y \circ j \circ i_Y = 1_Y$, то $(p_{X*}, p_{Y*}) \circ j_* \circ (i_{X*}, i_{Y*}) = 1$, т. е. (i_{X*}, i_{Y*}) — изоморфизм. $\square$

6.37. Следствие. Для любого $n \geq 2$ гомоморфизм

$$\{i_{\alpha*}\}: \bigoplus_{\alpha} \pi_n(S_{\alpha}^n, s_0) \rightarrow \pi_n\left(\bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n, *\right)$$

является изоморфизмом.

Доказательство. Если множество индексов α конечно, то требуемый результат индуктивно получается из предложения 6.36. Если же множество индексов бесконечно, заметим, что каждое отображение $f: (S^n, s_0) \rightarrow \left(\bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n, *\right)$ имеет компактный образ и, следовательно, существует такое конечное множество $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, что $f(S^k) \subset \bigvee_{i=1}^k S_{\alpha_i}^n$. Используя коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i=1}^k \pi_n(S_{\alpha_i}^n, s_0) & \xrightarrow{f} & \pi_n(S_2^n, s_0) \\ & \searrow \cong & \downarrow \{i_{\alpha*}\} \\ & \pi_n(\bigvee_{i=1}^k S_{\alpha_i}^n, *) & \nearrow \{i_{\alpha*}\} \\ & & \pi_n(\bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n, *) \end{array}$$

мы видим, что $[f] \in \text{im } \{i_{\alpha*}\}$. Следовательно, $\{i_{\alpha*}\}$ — эпиморфизм. Аналогично, любая гомотопия $H: S^n \times I \rightarrow \bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n$ имеет компактный образ, и поэтому $\{i_{\alpha*}\}$ — мономорфизм. $\square$

Следствие 6.37 можно сформулировать иначе:

$\pi_n\left(\bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n, *\right)$ есть (при $n \geq 2$) свободная абелева группа, порожденная элементами $[i_{\alpha}]$. Для фундаментальной группы π_1 мы имеем теорему ван Кампена, из которой следует, что $\pi_1(X \vee Y, *)$ изоморфна свободному произведению групп $\pi_1(X, x_0)$ и $\pi_1(Y, y_0)$, т. е. $\pi_1(X \vee Y, *) \cong \pi_1(X, x_0) * \pi_1(Y, y_0)$.

6.38. Предложение. Группа $\pi_1\left(\bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^1, *\right)$ изоморфна свободной группе, порожденной элементами $[i_{\alpha}]$.

6.39. Теорема. i) Для любой абелевой группы G и любого целого $n \geq 2$ существует такое клеточное пространство X , что

$$\pi_r(X, x_0) \cong \begin{cases} G, & r = n, \\ 0, & r \neq n. \end{cases}$$

ii) Пусть X — некоторое $(n-1)$ -связное клеточное пространство с $\pi_n(X, x_0) \cong G$, а (Y, y_0) — пространство с

$$\pi_r(Y, y_0) \cong \begin{cases} H, & r = n, \\ 0 & r > n. \end{cases}$$

Пусть $\phi: G \rightarrow H$ — некоторый гомоморфизм. Тогда существует и единственно с точностью до гомотопии такое отображение $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(X, x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_n(Y, y_0) \\ \parallel & & \parallel \\ G & \xrightarrow{\phi} & H. \end{array}$$

Доказательство. i) Существуют такие свободные абелевы группы F, R и гомоморфизмы κ, λ , что последовательность

$$0 \rightarrow R \xrightarrow{\kappa} F \xrightarrow{\lambda} G \rightarrow 0$$

точна (в качестве F возьмем свободную абелеву группу, порожденную элементами группы G , λ — очевидное отображение, $R = \ker \lambda$). Пусть $\{x_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$, $\{r_{\gamma}\}_{\gamma \in \Gamma}$ — базисы групп F и R соответственно. Возьмем по одному экземпляру n -мерной сферы S_{α}^n для каждого $\alpha \in A$ и рассмотрим букет $(X^n, x_0) = \left(\bigvee_{\alpha \in A} S_{\alpha}^n, *\right)$. Тогда

$$\pi_n(X^n, x_0) = \pi_n\left(\bigvee_{\alpha \in A} S_{\alpha}^n, *\right) \cong \bigoplus_{\alpha \in A} \pi_n(S_{\alpha}^n, s_0) \cong F.$$

Для каждого $\gamma \in \Gamma$ выберем такое отображение $h_{\gamma}: (S^n, s_0) \rightarrow (X^n, x_0)$, что элементу $[h_{\gamma}]$ из $\pi_n(X^n, x_0)$ соответствует элемент $\kappa(r_{\gamma})$ из F , и приклеим по этому отображению $(n+1)$ -мерную клетку e_{γ}^{n+1} . Пусть $X^{n+1} = X^n \cup \bigcup_{\gamma \in \Gamma} e_{\gamma}^{n+1}$. В точной гомотопической

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots \rightarrow \pi_{n+1}(X^{n+1}, X^n, x_0) & \xrightarrow{\partial} & \pi_n(X^n, x_0) & \xrightarrow{f_\#} & \pi_n(X^{n+1}, x_0) & \hookrightarrow & \pi_n(X^{n+1}, X^n, x_0) \\
 \downarrow \cong \rho_\# & & & & & & \parallel \\
 \pi_{n+1}(X^{n+1}/X^n, *) & & & & & & 0 \\
 \parallel \wr & & & & & & \\
 \pi_{n+1}(\bigvee_{\gamma \in \Gamma} S_\gamma^{n+1}, *) & & & & & & \\
 \parallel \wr & & & & & & \\
 R & \xrightarrow{\kappa} & F & \xrightarrow{\lambda} & G & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

$\partial[g_\gamma^{n+1}] = [h_\gamma] = \kappa(r_\gamma)$, где $g_\gamma^{n+1}: (D^{n+1}, S^n, s_0) \rightarrow (X^{n+1}, X^n, x_0)$ — характеристическое отображение клетки e_γ^{n+1} . (Тот факт, что $X^{n+1}/X^n \cong \bigvee_{\gamma \in \Gamma} S_\gamma^{n+1}$, вытекает из следствия 5.16.) Таким образом, вышеприведенная диаграмма коммутативна и поэтому $\pi_n(X^{n+1}, x_0) \cong G$.

Предположим, что уже построено пространство X^m ($m > n$) с

$$6.40. \pi_r(X^m, x_0) = \begin{cases} G, & r = n, \\ 0, & 0 \leq r < m, \quad r \neq n. \end{cases}$$

Выберем для $\pi_m(X^m, x_0)$ множество образующих $\{y_\beta\}_{\beta \in B}$ и пусть $g_\beta: (S^m, s_0) \rightarrow (X^m, x_0)$

— отображение, представляющее y_β , $\beta \in B$. Приклеим по этим отображениям $(m+1)$ -мерные клетки e_β^{m+1} и положим $X^{m+1} = X^m \cup \bigcup_{\beta \in B} e_\beta^{m+1}$. Обозначим через f_β^{m+1} характеристическое отображение клетки e_β^{m+1} . Тогда в точной гомотопической последовательности

$$\dots \rightarrow \pi_{m+1}(X^{m+1}, X^m, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_m(X^m, x_0) \rightarrow \pi_m(X^{m+1}, x_0) \rightarrow 0$$

$\partial[f_\beta^{m+1}] = [g_\beta] = y_\beta$, так что ∂ сюръективно. Значит, $\pi_m(X^{m+1}, x_0) = 0$. Поскольку¹⁾ $\pi_r(X^{m+1}, x_0) \cong \pi_r(X^m, x_0)$ для $0 \leq r < m$, то пространство X^{m+1} удовлетворяет условию 6.40, и, следовательно, можно индуктивно продолжать построение. Построив семейство пространств X^m ($m \geq n$), положим

$$X = \bigcup_{m \geq n} X^m$$

и наделим X слабой топологией. Тогда

$$\pi_r(X, x_0) \cong \pi_r(X^{r+1}, x_0) = \begin{cases} G, & r = n, \\ 0, & r \neq n. \end{cases}$$

¹⁾ По теореме 6.11. — Прим. ред.

ii) Если $X^{n-1} \neq x_0$, то заменим X гомотопически эквивалентным ему клеточным пространством, $(n-1)$ -мерный остов которого состоит из одной точки. Это новое пространство будем по-прежнему обозначать через X . Тогда X^n является букетом n -мерных сфер $\bigvee_{\alpha \in A} S_\alpha^n$; пусть $i_\alpha: (S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$ — вложение α -го экземпляра сферы. Так как $\phi[i_\alpha] \in \pi_n(Y, y_0)$, то найдется отображение $f_\alpha^n: (S^n, s_0) \rightarrow (Y, y_0)$, для которого $[f_\alpha^n] = \phi[i_\alpha]$. Определим отображение $f|X^n$ правилом $f|S_\alpha^n = f_\alpha^n$. Легко видеть, что построенное нами отображение $f|X^n$ делает коммутативной диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
 \pi_{n+1}(X^{n+1}, X^n, x_0) & \xrightarrow{\partial} & \pi_n(X^n, x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_n(X, x_0) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow (f|X^n)_* & & \downarrow \begin{array}{c} \parallel \\ G \\ \phi \end{array} \\
 6.41. & & \pi_n(Y, y_0) & \cong & H.
 \end{array}$$

Пусть $\{e_\beta^{n+1}\}_{\beta \in B}$ — множество $(n+1)$ -мерных клеток пространства X и $g_\beta^{n+1}: (D^{n+1}, S^n, s_0) \rightarrow (X^{n+1}, X^n, x_0)$ — их характеристические отображения. Тогда

$$(f|X^n)_* \cdot \partial[g_\beta^{n+1}] = \phi_* \cdot j_* \cdot \partial[g_\beta^{n+1}] = 0,$$

откуда следует, что композиция $(f|X^n) \cdot (g_\beta^{n+1}|S^n)$ нульгомотопна. Значит, $f|X^n$ может быть продолжено на все клетки e_β^{n+1} (см. предложение 2.34), определяя отображение $f|X^{n+1}$.

Предположим, что уже построено отображение $f|X^m$ ($m > n$). Если $h: (S^m, s_0) \rightarrow (X^m, x_0)$ — приклеивающее отображение $(m+1)$ -мерной клетки e^{m+1} , то $(f|X^m)_*[h] \in \pi_m(Y, y_0) = 0$, откуда следует, что $(f|X^m) \cdot h \simeq 0$. Таким образом, $f|X^m$ продолжается на e^{m+1} , определяя отображение $f|X^{m+1}$. Следовательно, $f|X^n$ продолжается, по индукции, на все пространство X , и диаграмма 6.41 показывает, что $f_*: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$ совпадает с гомоморфизмом ϕ .

Пусть теперь $f, f': (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ — два таких отображения. Для каждого α мы имеем $f'_*[i_\alpha] = \phi[i_\alpha] = f_*[i_\alpha]$, т. е. $f'|S_\alpha^n \simeq f|S_\alpha^n$. Следовательно, определена гомотопия $H^n: X^n \times I \rightarrow Y$, связывающая отображения $f'|X^n$ и $f|X^n$. Продолжая эту гомотопию на все пространство X описанным выше способом, получим $f \simeq f'$. $\square$

6.42. Следствие. Любые два клеточных пространства X и X' , удовлетворяющих условию

$$\pi_r(X, x_0) \cong \pi_r(X', x'_0) \cong \begin{cases} G, & r = n, \\ 0, & r \neq n, \end{cases}$$

гомотопически эквивалентны.

Доказательство. Пусть $\phi: G \rightarrow G$ — тождественное отображение. По теореме 6.39, ii) существуют и единственны с точностью до гомотопии такие отображения $f: (X, x_0) \rightarrow (X', x'_0)$ и $g: (X', x'_0) \rightarrow (X, x_0)$, что оба индуцированных гомоморфизма $f_*: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(X', x'_0)$ и $g_*: \pi_n(X', x'_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$ совпадают с ϕ . С другой стороны, $g \circ f: (X, x_0) \rightarrow (X, x_0)$ и 1_X также индуцируют ϕ на группе π_n . Следовательно, в силу единственности, $g \circ f \simeq 1_X$. Аналогично, $f \circ g \simeq 1_{X'}$. $\square$

6.43. Определение. Произвольное клеточное пространство X , удовлетворяющее условию

$$\pi_r(X, x_0) = \begin{cases} G, & r = n, \\ 0, & r \neq n, \end{cases}$$

называется *пространством Эйленберга — Маклейна типа (G, n)* и обозначается через $H(G, n)$. Разумеется, символ $H(G, n)$ означает в действительности не отдельное пространство, а целый гомотопический тип.

Замечание. В литературе общепринято обозначать пространство Эйленберга — Маклейна типа (G, n) через $K(G, n)$. Соображения, по которым мы предпочли обозначение $H(G, n)$, станут понятными позже.

6.44. Для любой группы G (не обязательно абелевой) можно построить также пространство $H(G, 1)$. С этой целью выберем такие свободные группы F, R и гомоморфизмы α, β , чтобы получить короткую точную последовательность

$$1 \rightarrow R \xrightarrow{\beta} F \xrightarrow{\alpha} G \rightarrow 1.$$

Пусть $\{x_\gamma\}$ — свободные образующие группы F , а $\{r_\gamma\}$ — свободные образующие группы R . Положим $X^1 = \bigvee_{\alpha} S^1_{\alpha}$. Далее, выберем ото-

бражения $h_\gamma: (S^1, s_0) \rightarrow (X^1, x_0)$, представляющие элементы $\beta(r_\gamma)$, и приклеим по h_γ двумерные клетки e_γ^2 . Тогда $\pi_1(X^2, x_0) \cong G$, и точно так же, как это делалось выше, можно продолжать приклеивать клетки высших размерностей, «убивая» этим высшие гомотопические группы. Для пространства $H(G, 1)$ справедлив и аналог теоремы 6.39, ii).

6.45. Замечание. Так как

$$\pi_r(\Omega H(G, n), \omega_0) \cong \pi_{r+1}(H(G, n), x_0) = \begin{cases} G, & r = n - 1, \\ 0, & r \neq n - 1, \end{cases}$$

то существует слабая гомотопическая эквивалентность

$$e'_{n-1}: H(G, n-1) \rightarrow \Omega H(G, n).$$

Сопряженное к e'_{n-1} отображение

$$e_{n-1}: SH(G, n-1) \rightarrow H(G, n)$$

будет играть важную роль в главе 8.

6.46. Предложение. Для любого семейства групп G_n , $n \geq 1$, абелевых при $n \geq 2$, найдется такое линейно связное клеточное пространство X , что

$$\pi_n(X, x_0) \cong G, \quad n \geq 1.$$

Доказательство. Положим

$$X = \prod_{n \geq 1} H(G_n, n).$$

Тогда

$$\pi_r(X, x_0) \cong \prod_{n \geq 1} \pi_r(H(G_n, n), *) = \pi_r(H(G_r, r), *) \cong G_r, \quad r \geq 1. \quad \square$$

Сделаем теперь несколько замечаний, касающихся вычисления гомотопических групп клеточных пространств. Как отмечалось выше, включение n -мерного остова $i: X^n \rightarrow X$ индуцирует эпиморфизм $i_*: \pi_n(X^n, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$. Поэтому представляет интерес вычисление $\ker i_*$. Точно так же, как в доказательстве теоремы 6.39, мы имеем точную последовательность

$$\pi_{n+1}(X^{n+1}, X^n, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_n(X^n, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0),$$

откуда вытекает, что $\ker i_* = \text{im } \partial$. Доказывая теорему 6.39, мы могли полностью описать группу $\pi_{n+1}(X^{n+1}, X^n, x_0)$, поскольку X^n было односвязным. Рассмотрим теперь общий случай, когда на X^n не накладывается никаких условий.

6.47. Предложение. Пусть X — некоторое клеточное пространство. Характеристическое отображение n -мерной клетки e_α^n , $\alpha \in J_n$, обозначим через $f_\alpha^n: (D^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X^n, X^{n-1}, x_0)$. Если $n \geq 3$, то $\pi_n(X^n, X^{n-1}, x_0)$ является свободной абелевой группой, порожденной элементами $\gamma \cdot [f_\alpha^n]$, где $\alpha \in J_n$, $\gamma \in \pi_1(X^{n-1}, x_0) \cong \pi_1(X, x_0)$.

Доказательство. Пусть $p: \tilde{X} \rightarrow X^{n-1}$ — универсальное накрытие для X^{n-1} и $g_\alpha = f_\alpha^n|_{S^{n-1}}$ — приклеивающее отображение для клетки e_α^n . Тогда для каждого $\gamma \in \pi_1(X^{n-1}, x_0)$ существует понятие $g_{\alpha, \gamma}: (S^{n-1}, s_0) \rightarrow (\tilde{X}, \gamma \tilde{x}_0)$ отображения g_α (группа $\pi_1(X^{n-1}, x_0)$ действует на $\tilde{X}$ и $p^{-1}(x_0) = \{\gamma \tilde{x}_0: \gamma \in \pi_1(X^{n-1}, x_0)\}$). Приклеим к $\tilde{X}$ n -мерные клетки $e_{\alpha, \gamma}^n$ по отображениям $g_{\alpha, \gamma}$ и обозначим получившееся пространство через $\tilde{Y}$. Очевидно, что p продолжается до такого отображения $p: \tilde{Y} \rightarrow X^n$, при котором $e_{\alpha, \gamma}^n$ гомеоморфно отображается на e_α^n . Отсюда почти немедленно следует, что $p: \tilde{Y} \rightarrow X^n$ — накрывающее отображение. Пространство $\tilde{X}$ (и, значит, $\tilde{Y}$) может быть наделено структурой клеточного пространства. Тогда по теореме 4.6 мы имеем изоморфизм

$$p_*: \pi_n(\tilde{Y}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_n(X^n, X^{n-1}, x_0).$$

Но пара $(\tilde{Y}, \tilde{X}, \tilde{x}_0)$ $(n-1)$ -связна, а пространство $\tilde{X}$ односвязно, так что в силу следствия 6.22

$$\pi_n(\tilde{Y}, \tilde{X}, \tilde{x}_0) \cong \pi_n(\tilde{Y}/\tilde{X}, *) \cong \pi_n\left(\bigvee_{\alpha, \gamma} S^n, *\right).$$

Следовательно, $\pi_n(X^n, X^{n-1}, x_0)$ — свободная абелева группа с базисом $\pi_1(X, x_0) \times J_n$. $\square$

6.48. Предложение. Если $n \geq 2$, то

$$\ker[i_*: \pi_n(X^n, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0)]$$

является подгруппой группы $\pi_n(X^n, x_0)$, порожденной элементами $\gamma \cdot [g_\alpha]$, $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$, $\alpha \in J_{n+1}$, где $g_\alpha: (S^n, s_0) \rightarrow (X^n, x_0)$ — приклеивающее отображение $(n+1)$ -мерной клетки e_{α}^{n+1} .

Если $n=1$, то $\ker[i_*: \pi_1(X^1, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)]$ представляет собой нормальную подгруппу $N \subset \pi_1(X^1, x_0)$, порожденную элементами $[g_\alpha]$, $\alpha \in J_2$, где $g_\alpha: (S^1, s_0) \rightarrow (X^1, x_0)$ — приклеивающее отображение двумерной клетки e_α^2 .

Доказательство. Для $n \geq 2$ утверждение немедленно следует из предложения 6.47. Для $n=1$ обозначим через $p: \tilde{X} \rightarrow X^1$ накрывающее пространство над X^1 с $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = N \subset \pi_1(X, x_0)$. Поскольку $[g_\alpha] \in N$, каждое отображение g_α допускает поднятие $\tilde{g}_{\alpha, \gamma}: (S^1, s_0) \rightarrow (\tilde{X}, \gamma\tilde{x}_0)$, где $\gamma \in \pi_1(X^1, x_0)/N$. Пусть $\tilde{Y}$ — пространство, получающееся из $\tilde{X}$ приклеиванием двумерных клеток по отображениям $\tilde{g}_{\alpha, \gamma}$. Тогда $p: \tilde{X} \rightarrow X^1$ продолжается до отображения $p: \tilde{Y} \rightarrow X^2$, по-прежнему являющегося накрывающей проекцией.

Любое отображение $f: (I, I) \rightarrow (X^1, x_0)$, определяющее элемент $[f] \in \ker[i_*]$, обладает поднятием $\tilde{f}: (I, 0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. Поскольку $\tilde{f}$ нульгомотопно в X^2 , то $\tilde{f}$ является петлей в $\tilde{Y}$ и, значит, в $\tilde{X}$. Но тогда $[\tilde{f}] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ и $[f] = p_*[\tilde{f}] \in N$. Следовательно, $\ker i_* \subset N$. Включение $N \subset \ker i_*$ очевидно. $\square$

6.49. Упражнение. Показать, что для любого топологического пространства Y существует клеточное пространство Y' , допускающее слабую гомотопическую эквивалентность $f: Y' \rightarrow Y$. [Указание: для построения Y' и f используйте методы, применявшиеся при доказательстве теоремы 6.39.]

6.50. Упражнение. Показать, что если Y', Y'' — клеточные пространства, $f'': Y'' \rightarrow Y$ — некоторое отображение и $f': Y' \rightarrow Y$ — слабая гомотопическая эквивалентность, то существует такое клеточное отображение $g: Y'' \rightarrow Y'$, что $f' \circ g \simeq f''$, и g единственно с точностью до гомотопии.

Построенная по топологическому пространству Y пара (Y', f') из упражнения 6.49 называется *клеточным эквивалентом* пространства Y (см. Дайер [30]). Из 6.50 следует, что любые два клеточных эквивалента пространства Y гомотопически эквивалентны

и что эта эквивалентность единственна с точностью до гомотопии. Кроме того, если задано отображение $h: X \rightarrow Y$ топологических пространств и (X', f') , (Y', g') — клеточные эквиваленты для X и Y соответственно, то найдется такое клеточное отображение $h': X' \rightarrow Y'$, что $g' \cdot h' \simeq h \cdot f'$ и h' единственно с точностью до гомотопии. Эту ситуацию можно изобразить следующей диаграммой:

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & X \\ h' \downarrow & & \downarrow h \\ Y' & \xrightarrow{g'} & Y. \end{array}$$

6.51. Упражнение. Пусть $f: (X'; A', B', x'_0) \rightarrow (X; A, B, x_0)$ — такое отображение триад, что

$$f_*: \pi_* (A' \cap B', x'_0) \rightarrow \pi_* (A \cap B, x_0),$$

$$f_*: \pi_* (A', x'_0) \rightarrow \pi_* (A, x_0),$$

$$f_*: \pi_* (B', x'_0) \rightarrow \pi_* (B, x_0)$$

— изоморфизмы. Показать, что если $X = \dot{A} \cup \dot{B}$, то

$$f_*: \pi_* (X'; A', B', x'_0) \rightarrow \pi_* (X; A, B, x_0)$$

также является изоморфизмом. [Указание: заменить X цилиндром отображения, достаточно мелко триангулировать $D^{n-1} \times I$ и доказывать утверждение по симплексам.]

6.52. Упражнение. Пусть $f: (X'; A', B') \rightarrow (X; A, B)$ — отображение триад, причем $(X'; A', B')$ — клеточная триада, $X = \dot{A} \cup \dot{B}$, $f|_{A' \cap B'}: A' \cap B' \rightarrow A \cap B$, $f|_{A'}: A' \rightarrow A$, $f|_{B'}: B' \rightarrow B$ — слабые гомотопические эквивалентности и относительные клеточные пространства $(A', A' \cap B')$, $(B', A' \cap B')$ являются 0-связными. Тогда $f: X' \rightarrow X$ — также слабая гомотопическая эквивалентность.

6.53. Упражнение. Показать, что результаты 6.21 — 6.26 могут быть перенесены на произвольные топологические пространства путем введения некоторых дополнительных предположений (таких как $X = \dot{A} \cup \dot{B}$ для теоремы 6.21).

6.54. Упражнение. Пусть $i: A \subset X$ — такое корасслоение, что пара (X, A) n -связна ($n \geq 1$), а пространство A m -связно. Обозначим через $p: X \rightarrow X/A$ естественную проекцию. Показать, что для любого клеточного пространства Y с $\dim Y \leq m + n$ имеет место точная последовательность

$$[Y, A] \xrightarrow{i_*} [Y, X] \xrightarrow{p_*} [Y, X/A].$$

6.55. Упражнение. *Графом* называется линейно связанное одномерное клеточное пространство, а *деревом* — граф, который не содержит клеточных подпространств, гомеоморфных S^1 .

- а) Показать, что любое дерево стягиваемо.
- б) Показать, что каждый граф содержит максимальное дерево.
- с) Показать, что для каждого графа X с максимальным деревом T имеет место изоморфизм

$$\pi_1(X, x_0) \cong F(T^*),$$

где $F(T^*)$ — свободная группа, порожденная множеством T^* всех одномерных клеток, не содержащихся в T .

- д) Для любого линейно связного клеточного пространства X описать группу $\pi_1(X, x_0)$ в терминах образующих и соотношений.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Приведенное здесь элегантное и элементарное доказательство теоремы о гомотопическом вырезании принадлежит Бордману. Имеется много других доказательств этой теоремы, но все они значительно сложнее помещенного в этой книге и используют нечто вроде спектральных последовательностей, в то время как для нашего доказательства нужны лишь самые тривиальные сведения из гомотопической топологии. Еще одно (более сложное) доказательство теоремы Фрейденшталя будет дано в главе 15.

Доказанных в этой главе теорем о гомотопических группах вполне достаточно для того, чтобы развить содержательную гомотопическую теорию. Мы же обратимся в оставшихся главах к стабильной гомотопической теории и теории гомологий (являющейся ветвью стабильной гомотопической теории; см. заключительные замечания к главе 9).

ССЫЛКИ НА ЛИТЕРАТУРУ

1. Дайер [30].
2. Спеньер [72].
3. Хилтон, Уайли [92].

В начале пятидесятых годов Стинрод и Эйленберг [74] доказали, что на категории конечных симплициальных пространств гомотопии (симплициальные или сингулярные) с коэффициентами в группе G однозначно определяются семью аксиомами, ныне известными как аксиомы Стинрода — Эйленберга. Кроме того, они показали, что многие свойства гомотопического функтора могут быть получены непосредственно из этих аксиом. Позже другие математики (Атья, Хирцебрух и Дж. У. Уайтхед) заметили, что имеются функторы, удовлетворяющие всем аксиомам Стинрода — Эйленберга, за исключением «аксиомы размерности», и обладающие, следовательно, многими свойствами обычного гомотопического функтора. Первое систематическое исследование таких обобщенных теорий гомотопий было предпринято Уайтхедом в работе [81]. В настоящей главе мы сформулируем аксиомы для обобщенных теорий гомотопий (и когомотопий) и выведем из них ряд важных следствий. В главе 8 описан метод построения различных теорий гомотопий и когомотопий, а в главе 9 мы покажем, что этот метод позволяет получить все теории когомотопий на категории клеточных пространств. В главах 10, 11 и 12 будут рассмотрены три фундаментальных примера теорий гомотопий и когомотопий.

7.1. Определение. Обозначим через $\mathcal{T}^2$ категорию всех топологических пар (X, A) (A — подпространство в X) и непрерывных отображений $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$. На $\mathcal{T}^2$ задан функтор ограничения $R: \mathcal{T}^2 \rightarrow \mathcal{T}^2$, определенный формулами $R(X, A) = (A, \emptyset)$, $R(f) = f|_A$. Пусть $\mathcal{T}^{2'}$ — гомотопическая категория: ее объекты совпадают с объектами из $\mathcal{T}^2$, а морфизмами являются гомотопические классы непрерывных отображений. На $\mathcal{T}^{2'}$ по-прежнему задан функтор

$$R: \mathcal{T}^{2'} \rightarrow \mathcal{T}^{2'}; R(X, A) = (A, \emptyset), R[f] = [f|_A].$$

Неприведенной теорией гомотопий h_* на $\mathcal{T}^{2'}$ называется последовательность функторов $h_n: \mathcal{T}^{2'} \rightarrow \mathcal{A}$, где $n \in \mathbb{Z}$, и естественных преобразований $\partial_n: h_n \rightarrow h_{n-1} \circ R$, $n \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющих следующим двум аксиомам.

i) Аксиома точности. Для любой пары $(X, A) \in \mathcal{T}^{2'}$ имеет место точная последовательность

$$\dots \rightarrow h_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_{n+1}(X, A)} h_n(A, \emptyset) \xrightarrow{h_n[i]} h_n(X, \emptyset) \xrightarrow{h_n[\eta]} h_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n(X, A)} \dots,$$

где $i: (A, \Phi) \rightarrow (X, \Phi)$, $j: (X, \Phi) \rightarrow (X, A)$ — естественные включения.

ii) Аксиома вырезания. Для любой пары $(X, A) \in \mathcal{S}'$ и любого подмножества $U \subset A$ с $\bar{U} \subset \dot{A}$ все индуцированные включением $j: (X - U, A - U) \rightarrow (X, A)$ гомоморфизмы

$$h_n[j]: h_n(X - U, A - U) \rightarrow h_n(X, A), \quad n \in \mathbb{Z},$$

являются изоморфизмами. В дальнейшем гомоморфизм $h_n[f]$ будет обозначаться символом f_* , а $\partial_n(X, A)$ — символом ∂ .

Замечание. Аксиомы 1 и 2 Стинрода — Эйленберга утверждают, что h_n — функтор на $\mathcal{S}^2$, аксиома 3 — что ∂_n представляет собой естественное преобразование, аксиома 5 — что h_n определены на $\mathcal{S}^{2'}$, а не только на $\mathcal{S}^2$. Аксиома 4 — это сформулированная выше аксиома точности и аксиома 6 — это аксиома вырезания.

7.2. Предложение. Аксиома вырезания эквивалентна следующему утверждению:

7.3. Для любой триады $(X; A, B)$ (A, B — подпространства в X и $A \cup B = X$), удовлетворяющей условию $\dot{A} \cup \dot{B} = X$, все индуцированные включением $j: (A, A \cap B) \rightarrow (X, B)$ гомоморфизмы

$$j_*: h_n(A, A \cap B) \rightarrow h_n(X, B), \quad n \in \mathbb{Z},$$

являются изоморфизмами.

Доказательство. Пусть h_n — функтор, удовлетворяющий аксиоме вырезания и $(X; A, B)$ — триада с $\dot{A} \cup \dot{B} = X$. Так как $\overline{X - A} = X - \dot{A} \subset \dot{B}$, то пара (X, B) и подмножество $X - A \subset B$ удовлетворяют условиям аксиомы вырезания. Но $(X - (X - A), B - (X - A)) = (A, A \cap B)$, поэтому $h_n(A, A \cap B) \rightarrow h_n(X, B)$ — изоморфизм.

Обратно, предположим, что функтор h_n удовлетворяет утверждению 7.3. Пусть (X, A) — некоторая пара, и пусть подмножество $U \subset A$ таково, что $\bar{U} \subset \dot{A}$. Так как $(X - U)^\circ \cup \dot{A} = (X - \bar{U}) \cup \dot{A} \supset (X - \dot{A}) \cup \dot{A} = X$, то мы можем применить 7.3 к триаде $(X; X - U, A)$. Но $(X - U, (X - U) \cap A) = (X - U, A - U)$, поэтому h_n удовлетворяет аксиоме вырезания. $\square$

7.4. Лемма. Пусть $(X; A, B)$ — клеточная триада. Тогда можно найти открытое множество $A' \supset A$ и гомотопию $H: X \times I \rightarrow X$, удовлетворяющие следующим условиям:

- i) $H_0 = 1_X$,
- ii) H неподвижна на A ,
- iii) $H_1(A') \subset A$,
- iv) $H(B \times I) \subset B$.

Доказательство. Пусть $A^{-1} = A$ и $H^{-1}: X \times I \rightarrow X$ — стационарная гомотопия ($H^{-1}(x, t) = x$ для всех $t \in I$). Предположим, индуктивно, что для каждого k , $-1 \leq k < n$, мы построили такую открытую окрестность A^k подпространства A в $(X, A)^{k+1}$, что $A^{k-1} = A^k \cap (X, A)^k$, и такую гомотопию $H^k: X \times I \rightarrow X$, что

- a) $H_0^k = H_1^{k-1}$,
- b) H^k стационарна на $(X, A)^k$,
- c) $H_1^k(A^k) \subset A$,
- d) $H^k(B \times I) \subset B$.

Обозначим через $\{e_\gamma^{n+1}: \gamma \in \Gamma\}$ множество всех $(n+1)$ -мерных клеток из (X, A) , а через f_γ^{n+1} — характеристическое отображение клетки e_γ^{n+1} . Пусть $D_0^{n+1} = \{x \in D^{n+1}: \|x\| < 1/2\}$. Тогда $D^{n+1} - D_0^{n+1}$ является открытой окрестностью сферы S^n . Гомотопия $K: D^{n+1} \times I \rightarrow D^{n+1}$, задаваемая формулами

$$K(x, t) = \begin{cases} (1+t)x, & \|x\| \leq \frac{1}{1+t}, \\ \frac{x}{\|x\|}, & \|x\| \geq \frac{1}{1+t}, \end{cases} \quad x \in D^{n+1}, t \in I,$$

показывает, что $D^{n+1} - D_0^{n+1}$ стягивается на S^n . Пусть теперь

$$U_\gamma^{n+1} = \left\{ f_\gamma^{n+1}(y): f_\gamma^{n+1}\left(\frac{y}{\|y\|}\right) \in A^{n-1}, y \in D^{n+1} - D_0^{n+1} \right\}.$$

Легко видеть, что U_γ^{n+1} — открытое подмножество в e_γ^{n+1} . Поэтому, если положить $A^n = A^{n-1} \cup \bigcup_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma^{n+1}$, то без труда проверяется, что A^n — открытая окрестность подпространства A в $(X, A)^{n+1}$ и $A^n \cap (X, A)^n = A^{n-1}$. Определим гомотопию $H^n: (X, A)^{n+1} \times I \rightarrow X$ как

$$H^n(x, t) = \begin{cases} H_1^{n-1}(x), & x \in (X, A)^n, \\ H_1^{n-1}(f_\gamma^{n+1}(K(y, t))), & x \in f_\gamma^{n+1}(y), y \in D^{n+1}, t \in I. \end{cases}$$

Тогда H^n непрерывна и удовлетворяет на $(X, A)^{n+1}$ равенству $H_0^n = H_1^{n-1}$, что позволяет продолжить ее на пространство X с сохранением этого равенства. Выполнение условий a), b) и c) очевидно. Так как H^{n-1} удовлетворяет условию d), то H^n также удовлетворяет ему. Следовательно, индукцией по k мы построим окрестности A^k и гомотопии H^k для всех $k \geq -1$.

Положим теперь $A' = \bigcup_{k \geq -1} A^k$. Множество A' открыто, поскольку $A' \cap e_\gamma^m = A^{m-1} \cap e_\gamma^m$ для всех m, γ . Наконец, зададим гомотопию $H: X \times I \rightarrow X$ как

$$H(x, t) = \begin{cases} H^{r-1}(x, (r+1)(r(t-1)+1)), & \frac{r-1}{r} \leq t \leq \frac{r}{r+1}, x \in X, \\ H^r(x, 1), & t = 1, x \in (X, A)^r. \end{cases}$$

Рассуждения, аналогичные использованным в предложении 6.35, показывают, что гомотопия H непрерывна и $H_0 = H_0^0 = 1_X$. Кроме того, H неподвижна в подпространстве A , $H_1(A') \subset A$ и $H(B \times I) \subset B$. $\square$

Обозначим через $\mathcal{W}^2$ категорию клеточных пар (X, A) (где A — клеточное подпространство в X) и их непрерывных отображений, а через $\mathcal{W}^{2'}$ — соответствующую гомотопическую категорию.

7.5. Предложение. Для любой клеточной триады $(X; A, B)$ все индуцированные включением $j: (A, A \cap B) \rightarrow (X, B)$ гомоморфизмы

$$j_*: h_n(A, A \cap B) \rightarrow h_n(X, B), \quad n \in \mathbb{Z},$$

являются изоморфизмами.

Доказательство. Пусть $(X; A, B)$ — некоторая клеточная триада. Выберем открытую окрестность A' и гомотопию H такими, как в лемме 7.4. Пусть $r = H_1$. Тогда $r|_{A'}: (A', A' \cap B) \rightarrow (A, A \cap B)$ является гомотопически обратным к отображению $i: (A, A \cap B) \rightarrow (A', A' \cap B)$, так что $(r|_{A'})_*$ — изоморфизм. Поскольку $r \simeq 1_X$, то $r_*: h_n(X, B) \rightarrow h_n(X, B)$ — тождественное отображение. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} h_n(A', A' \cap B) & \xrightarrow{j'_*} & h_n(X, B) \\ \cong \downarrow (r|_{A'})_* & & \downarrow r_* = 1 \\ h_n(A, A \cap B) & \xrightarrow{j_*} & h_n(X, B). \end{array}$$

Так как $X - A$ является открытым подмножеством в B и $X = A' \cup (X - A) \subset A' \cup B$, то, согласно п. 7.3, j'_* — изоморфизм. Следовательно, j_* также является изоморфизмом. $\square$

7.6. Итак, если неприведенная теория гомологий рассматривается на категории $\mathcal{W}^{2'}$, то аксиому вырезания можно заменить эквивалентным утверждением 7.5.

Выведем теперь для теорий гомологий простейшие следствия из аксиом.

7.7. Предложение. Если $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ — гомотопическая эквивалентность, то $f_*: h_n(X, A) \rightarrow h_n(Y, B)$ — изоморфизм для любого $n \in \mathbb{Z}$. $\square$

7.8. Следствие. Пусть A — деформационный ретракт пространства X . Тогда $h_n(X, A) = 0$, $n \in \mathbb{Z}$. $\square$

7.9. Следствие.

$$h_n(X, X) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad \square$$

7.10. Предложение. Пусть x — произвольная точка из X и $i: (\{x\}, \emptyset) \rightarrow (X, \emptyset)$ — включение. Тогда гомоморфизм i_* мономорфно отображает $h_n(\{x\}, \emptyset)$ на прямое слагаемое в $h_n(X, \emptyset)$ и, более того,

$$h_n(X, \emptyset) \cong h_n(\{x\}, \emptyset) \oplus h_n(X, \{x\}).$$

Доказательство. Пусть $c: X \rightarrow \{x\}$ — очевидное отображение; тогда $c \cdot i = 1$. Рассмотрим точную последовательность

$$\cdots \longrightarrow h_n(\{x\}, \emptyset) \xrightarrow{i_*} h_n(X, \emptyset) \xrightarrow{j_*} h_n(X, \{x\}) \longrightarrow \cdots$$

$\quad \quad \quad \curvearrowright \quad \quad \quad$
 $\quad \quad \quad c_* \quad \quad \quad$

Поскольку $c_* \cdot i_* = (c \cdot i)_* = 1_* = 1$, то эта последовательность расщепляется. Таким образом, согласно 3.22,

$$h_n(X, \emptyset) \cong h_n(\{x\}, \emptyset) \oplus h_n(X, \{x\}).$$

Указанный изоморфизм задается формулой

$$a \mapsto (c_*(a), j_*(a)). \square$$

7.11. Предложение. Пусть (X, A, B) — некоторая тройка $\mathcal{U}$ и $I: (A, B) \rightarrow (X, B)$, $J: (X, B) \rightarrow (X, A)$ — очевидные включения. Тогда имеет место точная последовательность

$$\dots \rightarrow h_n(A, B) \xrightarrow{I_*} h_n(X, B) \xrightarrow{J_*} h_n(X, A) \xrightarrow{\Delta} h_{n-1}(A, B) \rightarrow \dots,$$

где через Δ обозначена композиция

$$h_n(X, A) \xrightarrow{\partial} h_{n-1}(A, \emptyset) \xrightarrow{l_*} h_{n-1}(A, B).$$

Доказательство дословно повторяет доказательство теоремы 3.20.

7.12. Определение. Говорят, что топологическая триада $(X; A, B)$ *вырезается* относительно теории гомологий h_* , если все индуцированные включением $j: (A, A \cap B) \rightarrow (X, B)$ гомоморфизмы

$$j_*: h_n(A, A \cap B) \rightarrow h_n(X, B), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

являются изоморфизмами.

Согласно предложению 7.2, триада $(X; A, B)$ вырезаема, если $\hat{A} \cup \hat{B} = X$. В силу предложения 7.5 любая клеточная триада вырезаема.

7.13. Лемма. Триада $(X; A, B)$ вырезается одновременно $\in (X; B, A)$.

Доказательство. Построим новые пространства $C = A \cap B$,

$$X' = (A \times \{0\}) \cup (C \times I) \cup (B \times \{1\}) \subset X \times I,$$

$$A' = (A \times \{0\}) \cup (C \times I),$$

$$B' = (C \times I) \cup (B \times \{1\}),$$

$$C' = C \times I.$$

Проекция $p_X: X \times I \rightarrow X$ определяет отображение $p_X: (X', A', B', C') \rightarrow (X, A, B, C)$. Нетрудно видеть, что $(p_X|_{A'}): (A', C') \rightarrow$

¹⁾ Ср. с. пп. 3.19 и 3.20. — *Прим. ред.*

(A, C) является гомотопически обратным к отображению $(A, C) \rightarrow (A', C')$, задаваемому формулой $a \mapsto (a, 0)$. Аналогично, $(p_X|B') : (B', C') \rightarrow (B, C)$ — гомотопическая эквивалентность.

Для каждого $n \in \mathbb{Z}$ мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} h_n(A', C') & \xrightarrow{j'_*} & h_n(X', B') \\ \cong \downarrow (p_X|A')_* & & \downarrow p_{X*} \\ h_n(A, C) & \xrightarrow{j_*} & h_n(X, B), \end{array}$$

в которой j'_* — изоморфизм, поскольку $A' \cup B' = X'$. Таким образом, $p_{X*} : h_n(X', B') \rightarrow h_n(X, B)$ являются изоморфизмами для всех $n \in \mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда триада $(X; A, B)$ вырезаема. Поэтому, применяя лемму о пяти гомоморфизмах к коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & h_{n+1}(X', B') & \xrightarrow{\Delta} & h_n(B', C') & \xrightarrow{I'_*} & h_n(X', C') & \xrightarrow{J'_*} \\ & & \downarrow p_{X*} & & \cong \downarrow (p_X|B')_* & & \downarrow p_{X*} & \\ \cdots & \longrightarrow & h_{n+1}(X, B) & \xrightarrow{\Delta} & h_n(B, C) & \xrightarrow{I_*} & h_n(X, C) & \xrightarrow{J_*} \\ & & & & & & & \\ & & & & h_n(X', B') & \xrightarrow{\Delta} & h_{n-1}(B', C') & \longrightarrow \cdots \\ & & & & \downarrow p_{X*} & & \cong \downarrow (p_X|B')_* & \\ & & & & h_n(X, B) & \xrightarrow{\Delta} & h_{n-1}(B, C) & \longrightarrow \cdots, \end{array}$$

мы найдем, что $p_{X*} : h_n(X', C') \rightarrow h_n(X, C)$ — изоморфизмы для всех $n \in \mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда $(X; A, B)$ вырезаема. Но $C = B \cap A$, $C' = B' \cap A'$, так что $p_{X*} : h_n(X', C') \rightarrow h_n(X, C)$ — изоморфизмы для всех $n \in \mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда вырезаема триада $(X; B, A)$. $\square$

Естественно ожидать, что гомологические аналоги следствий из теорем 6.21 о гомотопическом вырезании тоже верны, причем уже без каких бы то ни было размерностных ограничений. Сформулировав их, мы получим следующие утверждения.

7.14. Предложение. Если $A \subset X$ — корасслоение, то для любого $n \in \mathbb{Z}$ проекция $p : (X, A) \rightarrow (X/A, \{*\})$ индуцирует изоморфизм $p_* : h_n(X, A) \rightarrow h_n(X/A, \{*\})$.

Доказательство. Аналогично доказательству следствия 6.22 все сводится к проверке того, что триада $(X \cup CA, \lambda^+ \cup CA^+;$

X^+ , CA^+) вырезаема. Множество

$$X' = X^+ \cup \{[t, a]: a \in A, t \in [0, 1/3] \cup (2/3, 1]\}$$

является открытой окрестностью для X^+ в $X^+ \cup CA^+$, и оно деформируется на X^+ так же, как в лемме 7.4 (рис 15). Теперь доказательство завершается так же, как доказывалось предложение 7.5. $\square$

7.15. Для любого пространства (X, x_0) с отмеченной точкой x_0 конус (CX, x_0) стягиваем. Поэтому в силу следствия 7.8 $h_n(CX, \{x_0\}) = 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}$, так что из точности последовательности тройки $(CX, X, \{x_0\})$ вытекает, что для каждого $n \in \mathbb{Z}$ гомоморфизм

$$\Delta: h_{n+1}(CX, X) \rightarrow h_n(X, \{x_0\}), \quad n \in \mathbb{Z},$$

является изоморфизмом. Определим гомоморфизм

$$\tilde{\sigma}_n(X, x_0): h_n(X, \{x_0\}) \rightarrow h_{n+1}(SX, \{*\})$$

как композицию

$$h_n(X, \{x_0\}) \xrightarrow{\Delta} h_{n+1}(CX, X) \xrightarrow{p_*} h_{n+1}(CX/X, \{*\}) = h_{n+1}(SX, \{*\}).$$

7.16. Предложение. Если $(X, x_0) \in \mathcal{P}\mathcal{T}$, то $\tilde{\sigma}_n(X, x_0)$ является изоморфизмом для любого $n \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Согласно лемме 6.4, включение $X \subset CX$ является корасслоением. Следовательно, в силу предложения 7.14 гомоморфизм p_* является изоморфизмом для любого $n \in \mathbb{Z}$. $\square$

7.17. Следствие. Для любого $n \in \mathbb{Z}$ и любого неотрицательного целого числа k имеет место изоморфизм

$$\tilde{\sigma}_n(S^k, s_0): h_n(S^k, \{s_0\}) \rightarrow h_{n+1}(S^{k+1}, \{s_0\}). \quad \square$$

7.18. Обозначим через $+$ топологическое пространство, состоящее из единственной точки. Тогда имеет место отображение $s: + \rightarrow S^0$, задаваемое формулой $s(+)= -1$. Так как триада $(S^0; \{-1\}, \{+1\})$ вырезаема, то

$$s_*: h_n(+, \emptyset) \rightarrow h_n(S^0, \{+1\})$$

— изоморфизм для любого $n \in \mathbb{Z}$. Следовательно

$$h_n(S^k, \{s_0\}) \cong h_{n-k}(S^0, \{s_0\}) \cong h_{n-k}(+, \emptyset)$$

для любого $n \in \mathbb{Z}$ и любого $k \geq 0$. Группы $h_n(+, \emptyset)$ называются группами коэффициентов теории гомологий h_* .

7.19. Теорема. Предположим, что триада $(X; A, B)$ вырезаема, и пусть $C \subset A \cap B$. Тогда имеет место точная последо-

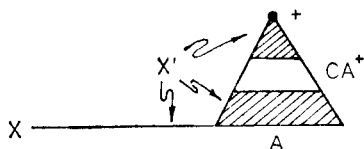


Рис. 15

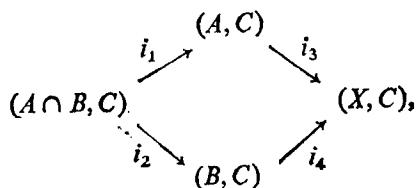
выпительность

$$\dots \rightarrow h_n(A \cap B, C) \xrightarrow{\alpha} h_n(A, C) \oplus h_n(B, C) \xrightarrow{\beta} h_n(X, C) \xrightarrow{\Delta'} h_{n-1}(A \cap B, C) \rightarrow \dots,$$

где $\alpha(x) = (i_{1*}(x), i_{2*}(x))$, $\beta(x, y) = i_{3*}(x) - i_{4*}(y)$ и через Δ' обозначена композиция

$$h_n(X, C) \xrightarrow{j_{1*}} h_n(X, B) \xrightarrow{i_*} h_n(A, A \cap B) \xrightarrow{\Delta} h_{n-1}(A \cap B, C).$$

Здесь $i_1, i_2, i_3, i_4, j_1, J_1$ суть включения



$$(A, A \cap B) \xrightarrow{j_1} (X, B), \quad (X, C) \xrightarrow{J_1} (X, B),$$

а Δ_1 — граничный гомоморфизм для тройки $(A, A \cap B, C)$.

Доказательство. Имеем

$$\beta \circ \alpha(x) = \beta(i_{1*}(x), i_{2*}(x)) = i_{3*} \circ i_{1*}(x) - i_{4*} \circ i_{2*}(x).$$

Но очевидно, что $i_3 \circ i_1 = i_4 \circ i_2$. Поэтому $\beta \circ \alpha = 0$, т. е. $\text{im } \alpha \subset \ker \beta$. Остальные пять включений ($\ker \beta \subset \text{im } \alpha$, $\text{im } \beta \subset \ker \Delta'$, $\ker \Delta' \subset \text{im } \beta$, $\text{im } \Delta' \subset \ker \alpha$, $\ker \alpha \subset \text{im } \Delta'$) доказываются диаграммным поиском по следующей коммутативной диаграмме:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & h_{n+1}(A, C) & \longrightarrow & h_{n+1}(A, A \cap B) & \xrightarrow{\Delta_1} & h_n(A \cap B, C) \xrightarrow{i_{1*}} \\
 & & \downarrow & & \cong \downarrow j_{1*} & & \downarrow i_{2*} \\
 \dots & \longrightarrow & h_{n+1}(X, C) & \xrightarrow{J_{1*}} & h_{n+1}(X, B) & \longrightarrow & h_n(B, C) \xrightarrow{i_{4*}} \\
 & & & & & & h_n(A, C) \longrightarrow h_n(A, A \cap B) \xrightarrow{\Delta_1} \dots \\
 & & & & & & \downarrow i_{3*} \quad \cong \downarrow j_{1*} \\
 & & & & h_n(X, C) & \xrightarrow{J_{1*}} & h_n(X, B) \longrightarrow \dots
 \end{array}$$

7.20. З а м е ч а н и е. Возможно, читатель заметил некоторый произвол в нашем определении гомоморфизма Δ' . Дело здесь вот в чем: поскольку триада $(X; B, A)$ также вырезаема, то можно

с равным успехом определить гомоморфизм Δ' как композицию

$$h_n(X, C) \xrightarrow{J_{2*}} h_n(X, A) \xrightarrow{j_{1*}} h_n(B, A \cap B) \xrightarrow{\Delta_1} h_{n-1}(A \cap B, C).$$

Разумеется, заменив Δ' гомоморфизмом Δ'' , мы снова получим точную последовательность теоремы 7.19. В этой связи законно спросить: совпадают ли гомоморфизмы Δ' и Δ'' ? Оказывается, не совпадают; в действительности имеет место равенство $\Delta' = -\Delta''$.

7.21. Лемма. Для любой вырезаемой триады $(X; A, B)$ имеет место равенство

$$\Delta' = -\Delta''.$$

Доказательство. Рассмотрим коммутативный шести-угольник

$$\begin{array}{ccccc}
 & & h_n(X, C) & & \\
 & J_{2*} \swarrow & \downarrow J_* & \searrow J_{1*} & \\
 h_n(X, A) & & & & h_n(X, B) \\
 & \nwarrow I_{2*} & & \nearrow I_{1*} & \\
 & h_n(X, A \cap B) & & & \\
 7.22. \quad j_{2*} \uparrow \cong & & & & \cong \uparrow j_{1*} \\
 & \nwarrow k_{2*} & & \nearrow k_{1*} & \\
 h_n(B, A \cap B) & & \Delta & & h_n(A, A \cap B) \\
 & \searrow \Delta_2 & & \swarrow \Delta_1 & \\
 & h_{n-1}(A \cap B, C) & & &
 \end{array}$$

с точными вертикальной и двумя диагональными последовательностями. Ломаная, идущая сверху вниз в левой части диаграммы, представляет гомоморфизм Δ'' , а в правой части — гомоморфизм Δ' . Для данного элемента $x \in h_n(X, C)$ выберем такой элемент $y_1 \in h_n(A, A \cap B)$, что $j_{1*}y_1 = J_{1*}x$. Тогда $\Delta_1 y_1 = \Delta' x$. Кроме того,

$$I_{1*}(J_*x - k_{1*}y_1) = J_{1*}x - j_{1*}y_1 = 0,$$

так что из точности вытекает существование элемента $y_2 \in h_n(B, A \cap B)$ с $k_{2*}y_2 = J_*x - k_{1*}y_1$. Таким образом,

$$j_{2*}y_2 = I_{2*}k_{2*}y_2 = I_{2*}J_*x - I_{2*}k_{1*}y_1 = J_{2*}x.$$

Следовательно,

$$\Delta''x = \Delta_2 y_2 = \Delta k_{2*}y_2 = \Delta J_*x - \Delta k_{1*}y_1 = -\Delta_1 y_1 = -\Delta'x. \quad \square$$

Последовательность 7.21 носит название *точной последовательности Майера — Вьеториса* и является одним из полезнейших технических средств теории гомологий. Пусть $C = \emptyset$. Если в этом случае можно представить X в виде объединения двух подпрост-

ранств с известными гомологиями этих подпространств и их пересечения, то последовательность Майера — Вьеториса доставляет нам информацию о гомологиях самого пространства X . Более общим образом, если $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n$ и мы знаем группы $h_n(X_i, \Phi)$ и $h_n(X_i \cap (X_1 \cup \dots \cup X_{i-1}), \Phi)$, то при удачном стечении обстоятельств можно по индукции получить информацию о группах $h_n(X, \Phi)$.

С помощью последовательности Майера — Вьеториса без труда доказываются следующие утверждения.

7.23. Предложение. Пусть $(X; A, B)$ — вырезаемая триада. Тогда для любого $n \in \mathbb{Z}$ включения

$$i_A: (A, A \cap B) \rightarrow (X, A \cap B),$$

$$i_B: (B, A \cap B) \rightarrow (X, A \cap B)$$

индуцируют изоморфизм

$$(i_{A*}, i_{B*}): h_n(A, A \cap B) \oplus h_n(B, A \cap B) \rightarrow h_n(X, A \cap B).$$

Доказательство. Положим $C = A \cap B$. Тогда, согласно следствию 7.9, имеем $h_n(A \cap B, C) = 0$, $n \in \mathbb{Z}$. Используя диаграмму леммы 7.21, найдем, что $\beta = (i_{A*}, -i_{B*})$ — изоморфизм. Но это означает, что (i_{A*}, i_{B*}) также является изоморфизмом. $\square$

7.24. Следствие. Пусть $X = A \cup B$, где A, B — непересекающиеся открытые множества. Тогда

$$(i_{A*}, i_{B*}): h_n(A, \Phi) \oplus h_n(B, \Phi) \rightarrow h_n(X, \Phi)$$

— изоморфизм для любого $n \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Поскольку $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} = A \cup B = X$, то триада $(X; A, B)$ вырезаема. $\square$

7.25. Следствие. Для любых пунктированных клеточных пространств (X, x_0) , (Y, y_0) включения $i_X: (X, \{x_0\}) \rightarrow (X \vee Y, \{*\})$, $i_Y: (Y, y_0) \rightarrow (X \vee Y, \{*\})$ индуцируют изоморфизм

$$(i_{X*}, i_{Y*}): h_n(X, \{x_0\}) \oplus h_n(Y, \{y_0\}) \rightarrow h_n(X \vee Y, \{*\}), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Триада $(X \vee Y; X, Y)$ является клеточной и, значит, вырезаемой. $\square$

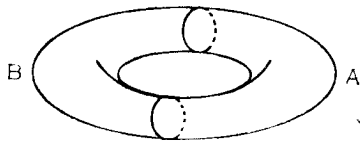


Рис. 16.

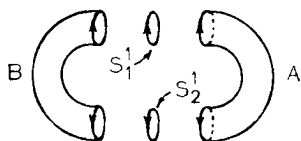


Рис. 17.

7.26. Примеры. i) Тор $T = S^1 \times S^1$ можно разрезать на два куска $T = A \cup B$ таким образом, чтобы каждый из них был гомеоморфен $S^1 \times I$ и $A \cap B = S^1 \cup S^1$ (рис. 16). Поскольку и A , и B

гомотопически эквивалентны окружности S^1 (требуемую гомотопическую эквивалентность задает отображение $p_A: A \cong S^1 \times I \rightarrow S^1$), то последовательность Майера — Вьеториса имеет вид:

7.27.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & h_{n+1}(T, \emptyset) & \xrightarrow{\Delta'} & & & \\ & & h_n(A \cap B, \emptyset) & \xrightarrow{\alpha} & h_n(A, \emptyset) \oplus h_n(B, \emptyset) & \xrightarrow{\beta} & h_n(T, \emptyset) \xrightarrow{\Delta'} \cdots \\ & & \parallel & & \cong \downarrow & & \\ & & \parallel & & p_{A*} \oplus p_{B*} & & \\ & & \parallel & & \downarrow & & \\ h_n(S^1, \emptyset) \oplus h_n(S^1, \emptyset) & \xrightarrow{\alpha'} & h_n(S^1, \emptyset) \oplus h_n(S^1, \emptyset). \end{array}$$

Таким образом, возникает потребность исследовать гомоморфизм α' . Если мы ориентируем окружности из $A \cap B$ так, как показано на рис. 17, то оба края множества A будут согласованно ориентированными (конечно, аналогично обстоит дело и с множеством B). Пусть $j_A: A \cap B \rightarrow A$, $j_B: A \cap B \rightarrow B$ — очевидные включения. Тогда композиция

$$S^1 \xrightarrow{j_A} A \xrightarrow{p_A} S^1$$

есть тождественное отображение 1_{S^1} . Аналогично, $p_A \circ j_A|_{S^1_1} = 1_{S^1_1}$, $p_B \circ j_B|_{S^1_1} = 1_{S^1_1}$, $p_B \circ j_B|_{S^1_2} = 1_{S^1_2}$. Следовательно, гомоморфизм α' задается матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

т. е. $\alpha'(x, y) = (x + y, x + y)$. Но эта матрица эквивалентна матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

так что $\ker \alpha' \cong h_n(S^1, \emptyset)$, $\operatorname{coker} \alpha' \cong h_n(S^1, \emptyset)$. Поэтому последовательность Майера — Вьеториса 7.27 разбивается в семейство коротких точных последовательностей.

7.28. $0 \rightarrow h_n(S^1, \emptyset) \rightarrow h_n(T, \emptyset) \rightarrow h_{n-1}(S^1, \emptyset) \rightarrow 0$, $n \in \mathbb{Z}$. Это — самое большее, что можно сказать о группах $h_n(T, \emptyset)$, не зная групп коэффициентов теории гомологий h_* . Если мы рассмотрим обычные сингулярные гомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}$, то

$$h_n(S^1, \emptyset) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0, 1, \\ 0, & n \neq 0, 1. \end{cases}$$

В частности, $h_{n-1}(S^1, \emptyset)$ — свободная абелева группа, и поэтому все последовательности 7.28 расщепляются. Таким образом, мы

получаем, что

$$h_n(T, \Phi) \cong h_{n-1}(S^1, \Phi) \oplus h_n(S^1, \Phi) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n=0, 2, \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & n=1, \\ 0, & n \neq 0, 1, 2. \end{cases}$$

ii) Подобно тору, бутылку Клейна K также можно разрезать на две части, гомеоморфные $S^1 \times I$. Однако на сей раз гомоморфизм α' задается матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & v'_* \end{pmatrix},$$

где $v'_*: S^1 \rightarrow S^1$ — отображение, обращающее ориентацию (как в п. 2.22). Имеют место аналоги точных последовательностей 7.28:

$$0 \rightarrow \text{coker } \alpha'_i \rightarrow h_n(K, \Phi) \rightarrow \text{ker } \alpha'_{n-1} \rightarrow 0.$$

В случае сингулярных гомологий с целыми коэффициентами гомоморфизм $v'_*: H_1(S^1, \Phi) \rightarrow H_1(S^1, \Phi)$ есть умножение на -1 , а $v'_*: H_0(S^1, \Phi) \rightarrow H_0(S^1, \Phi)$ — тождественный изоморфизм. Таким образом,

$$\alpha'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \alpha'_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\text{ker } \alpha'_1 = 0$, $\text{coker } \alpha'_1 = \mathbb{Z}_2$, $\text{ker } \alpha'_0 = \mathbb{Z}$, $\text{coker } \alpha'_0 = \mathbb{Z}$. Это дает

$$h_n(K, \Phi) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n=0, \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2, & n=1, \\ 0, & n \neq 0, 1. \end{cases}$$

Другие применения точной последовательности Майера — Вьеториса читатель найдет в главе 14.

Мы определили понятие неприведенной теории гомологий h_* на категории $\mathcal{T}^{2'}$. Займемся теперь тесно связанным с ним понятием приведенной теории гомологий на $\mathcal{P}\mathcal{T}'$.

7.29. На категории $\mathcal{P}\mathcal{T}'$ определен функтор надстройки S , задаваемый равенствами $S(X, x_0) = (SX, *)$ и $S[f] = [Sf] = [1_S \wedge f]$. Приведенная теория гомологий k_* на категории $\mathcal{P}\mathcal{T}'$ — это семейство функторов $k_n: \mathcal{P}\mathcal{T}' \rightarrow \mathcal{A}$ и естественных эквивалентностей $\sigma_n: k_n \rightarrow k_{n+1} \circ S$, $n \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющих следующей аксиоме.

Аксиома точности: для каждой пунктированной пары (X, A, x_0) последовательность

$$k_n(A, x_0) \xrightarrow{k_n[i]} k_n(X, x_0) \xrightarrow{k_n[j]} k_n(X \cup CA, *)$$

точна. Здесь $i: (A, x_0) \rightarrow (X, x_0)$ и $j: (X, x_0) \rightarrow (X \cup CA, *)$ — очевидные включения.

В дальнейшем для краткости мы будем обозначать $k_n[f]$ символом f_* и $\sigma_n(X, x_0)$ — символом σ . Кроме того, как правило,

мы будем опускать в обозначениях отмеченную точку и писать $k_n(X)$ вместо $k_n(X, x_0)$.

Очень часто мы будем накладывать на приведенные теории гомологий некоторые дополнительные требования. Сформулируем их в виде двух аксиом.

7.30. Аксиома суммы. Для любого семейства $\{(X_\alpha, x_\alpha): \alpha \in A\}$ пунктированных пространств вложения $i_\alpha: X_\alpha \rightarrow \bigvee_{\beta \in A} X_\beta$ индуцируют изоморфизм

$$\{i_{\alpha*}\}: \bigoplus_{\alpha \in A} k_n(X_\alpha) \rightarrow k_n\left(\bigvee_{\alpha \in A} X_\alpha\right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

7.31. Аксиома слабой гомотопической эквивалентности. Если $f: X \rightarrow Y$ — слабая гомотопическая эквивалентность, то для любой точки $x_0 \in X$ и любого $n \in \mathbb{Z}$ гомоморфизм $f_*: k_n(X, x_0) \rightarrow k_n(Y, f(x_0))$ является изоморфизмом.

Аксиома суммы будет полезна при исследовании не конечных клеточных пространств, а аксиома слабой гомотопической эквивалентности будет использоваться для получения информации о пространствах, не имеющих клеточной структуры. Аналогичные аксиомы можно сформулировать и для неприведенных теорий гомологий.

7.32. Предложение. Пусть $\{x\}$ — одноточечное топологическое пространство. Тогда для любого $n \in \mathbb{Z}$

$$k_n(\{x\}) = 0.$$

Доказательство. Оба включения $i: (\{x\}, x) \rightarrow (\{x\}, x)$ и $j: (\{x\}, x) \rightarrow (\{x\} \cup C\{x\}, *)$ являются тождественными отображениями. Поэтому последовательность

$$k_n(\{x\}) \xrightarrow{i} k_n(\{x\}) \xrightarrow{j} k_n(\{x\})$$

может быть точной в том и только в том случае, когда $k_n(\{x\}) = 0$. $\square$

7.33. Предложение. Существуют такие естественные преобразования

$$\hat{\partial}_n: k_n(X \cup CA) \rightarrow k_{n-1}(A), \quad n \in \mathbb{Z},$$

что для любой пунктированной пары (X, A, x_0) имеет место длинная точная последовательность

$$\dots \rightarrow k_1(A) \xrightarrow{i_*} k_n(X) \xrightarrow{j_*} k_n(X \cup CA) \xrightarrow{\hat{\partial}_n(X, A, x_0)} k_{n-1}(A) \rightarrow \dots$$

Доказательство. Пусть $k': X \cup CA \rightarrow SA$ — отображение, определенное в п. 2.39, а $v': SA \rightarrow SA$ — гомотопическое обращение

ние в H -когруппе SA (см. п. 2.22). Зададим $\hat{\partial}_n(X, A, x_0)$ как композицию

$$k_n(X \cup CA) \xrightarrow{(v' \circ k')_*} k_n(SA) \xrightarrow{\sigma} k_{n-1}(A).$$

Очевидно, что гомоморфизм $\hat{\partial}_n$ естествен относительно пунктированных пар. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
 k_n(A) & \xrightarrow{i_*} & k_n(X) & \xrightarrow{j_*} & \\
 & & k_n(X \cup CA) & \xrightarrow{k_*} & k_n((X \cup CA) \cup CX) & \xrightarrow{l_*} & k_n(((X \cup CA) \cup CX) \cup C(X \cup CA)) \\
 & & \searrow (v' \circ k')_* & \cong \downarrow (v' \circ \bar{q})_* & \downarrow \bar{q}'_* \\
 & & & k_n(SA) & \xrightarrow{Si_*} & k_n(SX) \\
 & & \cong \uparrow \sigma & \uparrow \sigma & \cong \uparrow \sigma \\
 & & k_{n-1}(A) & \xrightarrow{i_*} & k_{n-1}(X)
 \end{array}$$

В силу аксиомы точности верхняя строка этой диаграммы точна. Поэтому точна также и последовательность 7.33. $\square$

Из сказанного выше ясно, что приведенные теории гомологий более приспособлены для изучения пунктированных пространств, чем неприведенные теории гомологий. Многие результаты главы 2 о гомотопических множествах имеют аналоги для приведенных теорий. В дальнейшем мы увидим, что даже результаты пп. 7.15—7.17 фактически являются утверждениями, относящимися к приведенным теориям гомологий.

З а м е ч а н и е. Стинрод и Эйленберг определили приведенные группы сингулярных гомологий $\tilde{H}_n(X)$ как $\tilde{H}_n(X) = H_n(X, \{x_0\})$. Покажем, что этот прием, примененный к произвольной неприведенной теории гомологий, дает приведенную теорию гомологий.

7.34. Пусть h_* — некоторая неприведенная теория гомологий. Обозначим через $\tilde{h}_*$ семейство функторов $\tilde{h}_n: \mathcal{PT}' \rightarrow \mathcal{A}$, определенных равенствами $\tilde{h}_n(X, x_0) = h_n(X, \{x_0\})$, $\tilde{h}_n[f] = h_n[f]$ для $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ и естественных преобразований $\tilde{\sigma}_n: \tilde{h}_n \rightarrow h_{n+1} \circ S$ из п. 7.15. Согласно предложению 7.16, $\tilde{\sigma}_n$ являются естественными эквивалентностями для всех $n \in \mathbb{Z}$.

Мы хотим доказать, что $\tilde{h}_*$ — приведенная теория гомологий; для этого достаточно проверить аксиому точности. Пусть (X, A, x_0) — произвольная пунктированная пара. Тогда имеет

место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}
 \tilde{h}_n(A, x_0) & \xrightarrow{\tilde{h}_n[i]} & \tilde{h}_n(X, x_0) & \xrightarrow{\tilde{h}_n[j]} & \tilde{h}_n(X \cup CA, *) \\
 \parallel & & \parallel & & \parallel \\
 & & & & h_n(X \cup CA, \{*\}) \\
 & & & & \downarrow j'_* \cong \\
 & & & & h_n(X \cup CA, CA) \\
 & & & & \downarrow i'_* \cong \\
 h_n(A, \{x_0\}) & \xrightarrow{I_*} & h_n(X, \{x_0\}) & \xrightarrow{J_*} & h_n(X, A),
 \end{array}$$

нижняя строка которой представляет собой часть точной последовательности тройки $(X, A, \{x_0\})$. Кроме того, i'_* — изоморфизм по аксиоме вырезания (см. доказательство предложения 7.14) и j'_* — изоморфизм в силу стягиваемости пространства $(CA, *)$. Следовательно, верхняя строка диаграммы также точна, откуда вытекает, что $\tilde{h}_*$ — приведенная теория гомологий.

7.35. Пусть теперь задана некоторая приведенная теория гомологий k_* . Обозначим через $\hat{k}_*$ семейство функторов $\hat{k}_n: \mathcal{T}^{2'} \rightarrow \mathcal{A}$, определенных равенствами¹⁾

$$\hat{k}_n(X, A) = k_n(X^+ \cup CA^+), \quad \hat{k}_n[f] = k_n[\hat{f}],$$

где $\hat{f}: X^+ \cup CA^+ \rightarrow Y^+ \cup CB^+$ индуцировано отображением пар $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ и естественными преобразованиями $\hat{\partial}_n: \hat{k}_n \rightarrow k_{n-1} \cdot R$ предложения 7.33. Тогда в силу 7.33 функтор $\hat{k}_*$ удовлетворяет аксиоме точности.

Предположим, что теория k_* удовлетворяет аксиоме слабой гомотопической эквивалентности. Пусть $(X; A, B)$ — триада с $X = \dot{A} \cup \dot{B}$. Мы хотим показать, что для любого $n \in \mathbb{Z}$ включение $j: (A, A \cap B) \rightarrow (X, B)$ индуцирует изоморфизм

$$\hat{k}_n(A, A \cap B) \xrightarrow{\hat{k}_n[j]} \hat{k}_n(X, B), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Если $(X; A, B)$ — клеточная триада, то это утверждение можно доказать и без использования аксиомы слабой гомотопической эквивалентности. Действительно, рассмотрим коммутативную

¹⁾ Заметим, что любой паре (X, A) канонически отвечает пара (X^+, A^+) , и $X^+ \cup CA^+ = X^+ \cup C(A^+)$ есть конус включения $A^+ \subset X^+$. — Прим. ред.

диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 k_n(A^+ \cup C(A \cap B)^+) & \xrightarrow{\hat{j}_*} & k_n(X^+ \cup CB^+) \\
 \cong \downarrow p_{1*} & & \cong \downarrow p_{2*} \\
 k_n(A/A \cap B) & \xrightarrow[\cong]{\bar{j}_*} & k_n(X/B),
 \end{array}$$

в которой p_1, p_2 — гомотопические эквивалентности и $\bar{j}: A/A \cap B \rightarrow X/B$ — гомеоморфизм. Следовательно, $\hat{j}_*$ — изоморфизм, т. е. на категории $\mathcal{U}^2$ клеточных пар $\hat{k}_*$ без каких-либо дополнительных предположений является неприведенной теорией гомологий. На категории $\mathcal{T}^2$ дело обстоит сложнее.

Пусть $(X; A, B)$ — произвольная триада с $A \cup B = X$. Возьмем клеточные эквиваленты C' для $C = A \cap B$, A' для A , B' для B таким образом, что $A' \cap B' = C'$, и обозначим все три отображения $C' \rightarrow C$, $A' \rightarrow A$, $B' \rightarrow B$ одним и тем же символом ¹⁾ f . Положим $X' = A' \cup B'$. Из упражнения 6.52 вытекает, что $f: X' \rightarrow X$ является клеточным эквивалентом для пространства X . Из аксиом точности и слабой гомотопической эквивалентности следует, что индуцированные гомоморфизмы

$$f_*: k_n(A'^+ \cup C(A' \cap B')^+) \rightarrow k_n(A^+ \cup C(A \cap B)^+),$$

$$f_*: k_n(X'^+ \cup CB'^+) \rightarrow k_n(X^+ \cup CB^+)$$

являются изоморфизмами. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 k_n(A^+ \cup C(A \cap B)^+) & \xrightarrow{\hat{j}_*} & k_n(X^+ \cup CB^+) \\
 \cong \uparrow f_* & & \cong \uparrow f_* \\
 k_n(A'^+ \cup C(A' \cap B')^+) & \xrightarrow{\hat{j}'_*} & k_n(X'^+ \cup CB'^+).
 \end{array}$$

Гомоморфизм $\hat{j}'_*$ в ней является изоморфизмом, поскольку $(X'; A', B')$ — клеточная триада. Следовательно, $\hat{j}_*$ — также изоморфизм и, значит, $\hat{k}_*$ удовлетворяет аксиоме вырезания. Таким образом, $\hat{k}_*$ — неприведенная теория гомологий.

Покажем теперь, что теория $\hat{h}_*$ естественно эквивалентна теории h_* , а $\hat{k}_*$ — теории k_* . Этим мы установим взаимно однозначное соответствие между приведенными и неприведенными тео-

¹⁾ Предполагается также, что отображения $A' \rightarrow A$ и $B' \rightarrow B$ совпадают на C' . — Прим. ред.

рями. Однако уже сейчас ясно, что любому утверждению о неприведенной теории соответствует утверждение о приведенной теории и наоборот.

7.36. Предложение. Для любых $(X, x_0), (Y, y_0) \in \mathcal{PW}'$ и любого n включения $i_X: (X, x_0) \rightarrow (X \vee Y, *)$, $i_Y: (Y, y_0) \rightarrow (X \vee Y, *)$ индуцируют изоморфизм

$$(i_{X*}, i_{Y*}): k_n(X) \oplus k_n(Y) \rightarrow k_n(X \vee Y).$$

Доказательство. Мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \hat{k}_n(X, \{x_0\}) \oplus \hat{k}_n(Y, \{y_0\}) & \xrightarrow{(i_{X*}, i_{Y*})} & \hat{k}_n(X \vee Y, \{*\}) \\ \parallel & & \parallel \\ k_n(X^+ \cup Cx_0^+) \oplus k_n(Y^+ \cup Cy_0^+) & & k_n((X \vee Y)^+ \cup C^+) \\ \parallel & & \parallel \\ k_n(X) \oplus k_n(Y) & \xrightarrow{(i_{X*}, i_{Y*})} & k_n(X \vee Y), \end{array}$$

верхний морфизм которой является изоморфизмом в силу следствия 7.25. Следовательно, нижний морфизм также является изоморфизмом. $\square$

7.37. Лемма. Пусть (L, l_0) — такая H -когруппа с умножением $\mu': L \rightarrow L \vee L$ и гомотопическим обращением $\nu': L \rightarrow L$, что L — клеточное пространство. Тогда гомоморфизм

$$k_n(L) \xrightarrow{\mu'_*} k_n(L \vee L) \xrightarrow[\cong]{(i_{1*}, i_{2*})} k_n(L) \oplus k_n(L)$$

задается формулой $x \mapsto (x, x)$, а гомоморфизм

$$\nu'_*: k_n(L) \rightarrow k_n(L)$$

формулой $x \mapsto -x$, где $x \in k_n(L)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Если $l_0: L \rightarrow L$ — постоянное отображение ($l_0(l) = l_0$ для любого $l \in L$), то имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} k_n(L) & \xrightarrow{\quad} & k_n(L \vee L) & \xleftarrow{\quad} & k_n(L) \oplus k_n(L) \\ & \searrow \scriptstyle 1 & \downarrow \scriptstyle (l_0, 1)_* & \swarrow \scriptstyle (i_{1*}, i_{2*}) & \\ & & k_n(L) & & \end{array}$$

Так как отображение $l_0: L \rightarrow L$ пропускается через $c: L \rightarrow \{l_0\}$ и $k_n(\{l_0\}) = 0$ согласно предложению 7.32, то $l_{0*} = 0$. Положим $\alpha = (i_{1*}, i_{2*})^{-1} \cdot \mu'_*$; тогда $x = (0, 1) \cdot \alpha(x)$, откуда следует, что $\alpha(x) = (y, x)$ для некоторого элемента y (зависящего от x). Используя тот факт, что $(1, l_0) \cdot \mu' \simeq 1$, мы находим, что $\alpha(x) = (x, y')$ для некоторого y' . Следовательно, $\alpha(x) = (x, x)$.

Мы имеем также $(v', 1) \cdot \mu' \simeq l_0$, откуда $(v'_*, 1) \cdot \alpha = (v', 1)_* \cdot \mu'_* = l_{0*} = 0$. Значит, $0 = (v'_*, 1) \cdot \alpha(x) = v'_*(x) + x$ для всех $x \in k_n(L)$, т. е. $v'_*(x) = -x$. $\square$

Замечание. Для любого пунктированного пространства (X, x_0) очевидным образом определено «складывающее» отображение $\Delta': X \vee X \rightarrow X$. Так как $\Delta' \cdot i_1 = 1_X = \Delta' \cdot i_2$, то, очевидно, $\Delta'_* \cdot (i_{1*}, i_{2*})(x, y) = x + y$ для любых $x, y \in k_n(X)$.

Для любой приведенной теории гомологий k_* имеет место отображение

$$\kappa_n: [X, x_0; Y, y_0] \rightarrow \text{Hom}(k_n(X), k_n(Y)),$$

определенное формулой

$$\kappa_n[f] = f_* = k_n[f].$$

7.38. Предложение. Пусть (L, l_0) — такая H -когруппа, что L — клеточное пространство. Тогда для любых $n \in \mathbb{Z}$, $(\mathcal{X}, x_0) \in \mathcal{P}\mathcal{T}$ отображение

$$\kappa_n: [L, l_0; Y, y_0] \rightarrow \text{Hom}(k_n(L), k_n(Y))$$

является гомоморфизмом.

Доказательство. Если заданы отображения $f, g: (L, l_0) \rightarrow (Y, y_0)$, то мы имеем

$$[f] + [g] = [\Delta' \cdot (f \vee g) \cdot \mu'].$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \kappa_n([f] + [g])(x) &= \Delta'_* \cdot (f \vee g)_* \cdot \mu'_*(x) = \Delta'_*(f_*(x), g_*(x)) = \\ &= f_*(x) + g_*(x) = \kappa_n[f](x) + \kappa_n[g](x) \end{aligned}$$

для любого $x \in k_n(L)$. Таким образом,

$$\kappa_n([f] + [g]) = \kappa_n[f] + \kappa_n[g]. \quad \square$$

7.39. Определение. Особый интерес представляет случай, когда $(L, l_0) = (S^n, s_0)$ и в группе $k_0(S^0)$ выделен элемент $\iota_0 \in k_0(S^0)$. Определим гомоморфизм Гуревича $h: \pi_n(Y, y_0) \rightarrow k_n(Y)$ как композицию

$$\begin{aligned} \pi_n(Y, y_0) &\cong [S^n, s_0; Y, y_0] \xrightarrow{\kappa_n} \text{Hom}(k_n(S^n), k_n(Y)) \xrightarrow{\text{Hom}(\sigma^n, 1)} \\ &\text{Hom}(k_0(S^0), k_n(Y)) \xrightarrow{e} k_n(Y), \end{aligned}$$

где $e(\phi) = \phi(\iota_0)$ для $\phi \in \text{Hom}(k_0(S^0), k_n(Y))$. Имеется и другое описание гомоморфизма h . Для каждого n положим $\iota_n = \sigma^n(\iota_0) \in k_n(S^n)$. Тогда $h[f] = f_*(\iota_n) \in k_n(Y)$ для любого $f: (S^n, s_0) \rightarrow (Y, y_0)$. В дальнейшем мы изучим этот гомоморфизм более подробно (см. главы 10, 13, 19).

А сейчас завершим доказательство взаимно однозначного соответствия между неприведенными и приведенными теориями гомологий.

7.40. Определение. *Естественным преобразованием* $T_*: h_* \rightarrow h'_*$ неприведенной теории гомологий h_* в неприведенную теорию гомологий h'_* называется такое семейство естественных преобразований $T_n: h_n \rightarrow h'_n$, что для каждой пары (X, A) имеет место коммутативный квадрат

$$\begin{array}{ccc} h_n(X, A) & \xrightarrow{\partial} & h_{n-1}(A, \emptyset) \\ \downarrow T_n(X, A) & & \downarrow T_{n-1}(A, \emptyset) \\ h'_n(X, A) & \xrightarrow{\partial'} & h'_{n-1}(A, \emptyset). \end{array}$$

Имеется и соответствующее понятие естественного преобразования приведенных теорий гомологий¹⁾. Естественное преобразование T_* называется *естественной эквивалентностью теорий гомологий*, если T_n — естественная эквивалентность для каждого $n \in \mathbb{Z}$.

7.41. Для любой приведенной теории гомологий k_* и любого пунктированного пространства (X, x_0) мы имеем

$$\tilde{k}_n(X, x_0) = \hat{k}_n(X, \{x_0\}) = k_n(X^+ \cup C \{x_0\}^+).$$

Говорят, что (X, x_0) — пунктированное пространство с невырожденной отмеченной точкой, если включение $\{x_0\} \subset X$ является корасслоением. В этом случае в силу предложения 6.6 проекция $p: (X^+ \cup C \{x_0\}^+, *) \rightarrow (X, x_0)$ (сжатие конуса $C \{x_0\}^+$ в отмеченную точку) является гомотопической эквивалентностью. Если обозначить через $\mathcal{PT}'_0$ гомотопическую категорию пунктированных пространств с невырожденными отмеченными точками, то проекция p определяет на этой категории естественную эквивалентность $T_n: \tilde{k}_n \rightarrow k_n$ для каждого $n \in \mathbb{Z}$.

7.42. Лемма. *Эквивалентности T_n удовлетворяют условию*

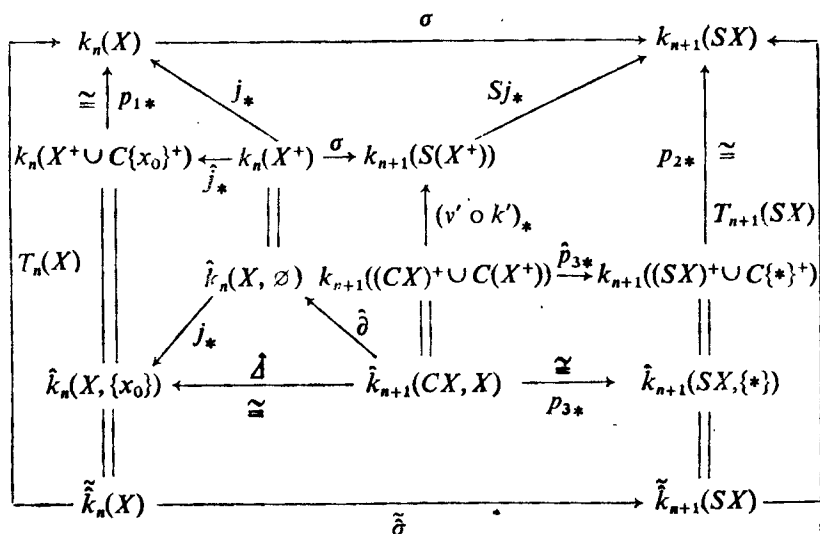
$$T_{n+1}(SX) \circ \tilde{\sigma} = \sigma \circ T_n(X).$$

Таким образом, если k_* удовлетворяет аксиоме слабой гомотопической эквивалентности, то семейство $T_* = \{T_n\}$ определяет естественную эквивалентность приведенных теорий гомологий k_* и $\tilde{k}_*$ на категории²⁾ $\mathcal{PT}'_0$.

¹⁾ Соответствующим аналогом равенства $\partial' T_n(X, A) = T_{n-1}(A, \emptyset) \partial$ является равенство $T_n(SX) \sigma = \sigma' T_{n-1}(X)$. — Прим. ред.

²⁾ Тот факт, что $\tilde{k}_*$ является приведенной теорией гомологий, доказан в п. 7.35, и именно здесь используется то, что k_* удовлетворяет аксиоме слабой гомотопической эквивалентности. — Прим. ред.

Доказательство. Рассмотрим диаграмму



где $j: (X^+, +) \rightarrow (X, x_0)$ определено формулами $j|X = 1_X$, $j(+)=x_0$. Из определения гомоморфизмов $T_n(X)$, $T_{n+1}(SX)$, $\hat{\Delta}$, $\hat{\delta}$, $\hat{\sigma}$ и естественности преобразования σ непосредственно следует, что эта диаграмма коммутативна. Каждая из проекций обозначена символом p_i , $i = 1, 2, 3$. Заметим, в частности, что отображение v' необходимо для того, чтобы имела место гомотопность $p_2 \circ \hat{p}_3 \simeq Sj \circ v' \circ k'$.

Так как $\hat{\Delta}$ — изоморфизм, то для любого $x \in \hat{k}_n(X)$ найдется такой $y \in \hat{k}_{n+1}(CX, X)$, что $\hat{\Delta}(y) = x$. Но тогда

$$\begin{aligned} \sigma \cdot T_n(X)(x) &= \sigma \cdot p_{1*}(x) = \sigma p_{1*} \hat{\Delta}(y) = \\ &= \sigma \cdot j_* \cdot \hat{\delta}(y) = Sj_* \cdot \sigma \cdot \hat{\delta}(y) = Sj_* \cdot (v' \circ k')_*(y) = \\ &= T_{n+1}(SX) \cdot \hat{\sigma} \cdot \hat{\Delta}(y) = T_{n+1}(SX) \cdot \hat{\sigma}(x). \quad \square \end{aligned}$$

7.43. Для любой неприведенной теории h_* и любой пары $(X, A) \in \mathcal{T}^{2'}$ мы имеем

$$\hat{h}_n(X, A) = \hat{h}_n(X^+ \cup CA^+) = h_n(X^+ \cup CA^+, \{*\}).$$

Для каждого $n \in \mathbb{Z}$ композиция

$$h_n(X^+ \cup CA^+, \{*\}) \xrightarrow{j_*} h_n(X^+ \cup CA^+, CA^+) \xrightarrow{i_*} h_n(X, A)$$

определяет естественную эквивалентность $T'_n: \hat{h}_n \rightarrow h_n$.

Если задан некоторый элемент $x \in \hat{h}_n(X, A) = h_n(X^+ \cup CA^+, \{*\})$, то

$$\begin{aligned} \partial \cdot T'_n(x) &= \partial \cdot i_{2*}^{-1} \circ j_{1*}^{-1} \circ J_{1*}(x) = i_{3*}^{-1} \circ \Delta_1 \circ j_{1*}^{-1} \circ J_{1*}(x) = \\ &= -i_{3*}^{-1} \circ \Delta_2 \circ j_{2*}^{-1} \circ J_{2*}(x) = -T'_{n-1}(A, \phi) \circ \tilde{\sigma}^{-1} \circ p_{2*} \circ J_{2*}(x) = \\ &= -T'_{n-1}(A, \phi) \circ \tilde{\sigma}^{-1} \circ k'_*(x) = T'_{n-1}(A, \phi) \circ \tilde{\sigma}^{-1} \circ (v' \circ k')_*(x) = \\ &= T'_{n-1}(A, \phi) \circ \hat{\partial}(x). \quad \square \end{aligned}$$

Замечания. i) Легко видеть, что если $(X, A) \in \mathcal{F}^2$, то $X^+ \cup CA^+ \in \mathcal{P}\mathcal{F}_0$. Следовательно, доказав леммы 7.42 и 7.44, мы установили взаимно однозначное соответствие между неприведенными и приведенными теориями гомологий.

ii) Если ограничиться категориями $\mathcal{U}^{2'}$ и $\mathcal{F}\mathcal{U}^{2'}$ клеточных пар и пунктированных клеточных пространств, то взаимно однозначное соответствие между неприведенными и приведенными теориями получается без аксиомы слабой гомотопической эквивалентности (в силу пп. 6.32 и 7.7 она выполняется автоматически).

Из сказанного выше ясно, что нет нужды рассматривать сразу оба класса теорий гомологий. Очевидно, что приведенные теории более тесно связаны с гомотопическими группами. В то же время мы увидим, что неприведенные теории более удобны в некоторых других ситуациях, например, при изучении многообразий.

Так как для любого однооточечного пространства $\{x\}$ пространство $\{x\}^+$ гомеоморфно нульмерной сфере S^0 , то мы имеем $k_n(S^0) \cong k_n(\{x\}^+) = \hat{k}_n(\{x\}, \phi)$ для любого $n \in \mathbb{Z}$ и любой приведенной теории гомологий k_* . Поэтому разумно назвать группы $k_n(S^0)$, $n \in \mathbb{Z}$, группами коэффициентов приведенной теории k_* . Заметим, что $k_m(S^n) \cong k_{m-n}(S^0)$ для любых m, n .

Поскольку для любого клеточного пространства (X, x_0) мы имеем $X^n/X^{n-1} \cong \bigvee_{\alpha \in J_n} S^n$, то точная последовательность пары (X^n, X^{n-1}) превращается в точную последовательность

$$\dots \rightarrow k_{q+1}\left(\bigvee_{\alpha} S^n\right) \xrightarrow{\hat{\partial}} k_q(X^{n-1}) \rightarrow k_q(X^n) \rightarrow k_q\left(\bigvee_{\alpha} S^n\right) \rightarrow \dots$$

Если множество J_n конечно, то, применяя предложение 7.36 и индукцию по числу клеток, мы получим изоморфизмы

$$k_q\left(\bigvee_{\alpha \in J_n} S^n\right) \cong \bigoplus_{\alpha \in J_n} k_q(S^n) \cong \bigoplus_{\alpha \in J_n} k_{q-n}(S^0).$$

Таким образом, имея информацию о группах коэффициентов $k_*(S^0)$, мы зачастую можем индуктивно получить информацию о группах $k_*(X^n)$. Однако, если клеточное пространство X не конечно, то требуются некоторые дополнительные предположения. Если k_*

удовлетворяет аксиоме суммы, то

$$k_q(X^n/X^{n-1}) \cong k_q\left(\bigvee_{\alpha \in J_n} S_\alpha^n\right) \cong \bigoplus_{\alpha \in J_n} k_q(S^n) \cong \bigoplus_{\alpha \in J_n} k_{q-n}(S^0)$$

даже когда множество индексов J_n бесконечно.

И все же, несмотря на то, что эти изоморфизмы для каждого n доставляют нам некоторую информацию о группе $k_q(X^n)$, мы в общем случае не можем абсолютно ничего сказать о группе $k_q(X)$ для бесконечномерного клеточного пространства X . Читатель вправе спросить, почему эти проблемы не возникали при изучении гомотопических групп. Дело в том, что элементы гомотопических групп $\pi_n(X, x_0)$ представляются отображениями $f: S^n \rightarrow X$ и образ $f(S^n)$, будучи компактным, всегда лежит в конечном клеточном подпространстве. Поскольку такого рода соображения мало полезны для теорий гомологий k_* , мы пойдем другим путем.

Вложения $j_n^m: X^n \rightarrow X^m$, $n \leq m$, индуцируют гомоморфизмы $j_{n*}^m: k_q(X^n) \rightarrow k_q(X^m)$, удовлетворяющие равенствам $j_{n*}^m \circ j_{p*}^n = j_{p*}^m$. Кроме того, вложения $i_n: X^n \rightarrow X$ индуцируют такие морфизмы $i_{n*}: k_q(X^n) \rightarrow k_q(X)$, что $i_{m*} \circ i_{n*}^m = i_{n*}$. Имеется обобщающая эту ситуацию алгебраическая конструкция — так называемая прямая (или индуктивная) система абелевых групп.

7.45. Определение. *Направленным множеством* называется такое частично упорядоченное множество $(A, \leq)$, что для любых двух элементов $\alpha, \beta \in A$ существует такой элемент $\gamma \in A$, что $\alpha \leq \gamma, \beta \leq \gamma$.

Прямой (или индуктивной) системой абелевых групп называется такое семейство $\{G_\alpha: \alpha \in A\}$ абелевых групп G_α , индексированных элементами направленного множества A , и гомоморфизмов $j_\alpha^\beta: G_\alpha \rightarrow G_\beta$, $\alpha \leq \beta$, что $j_\beta^\gamma \circ j_\alpha^\beta = j_\alpha^\gamma$ при $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ и $j_\alpha^\alpha = 1$ для любого $\alpha \in A$. *Прямой (или индуктивный) предел*¹⁾ $\text{dir lim } G_\alpha$ прямой системы $\{G_\alpha, j_\alpha^\beta, A\}$ — это абелева группа, определяемая следующим образом. Пусть $i_\alpha: G_\alpha \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in A} G_\alpha$ — очевидное вложение и пусть R — подгруппа $\bigoplus_{\alpha \in A} G_\alpha$ группы, порожденная элементами

вида $i_\beta \circ j_\alpha^\beta(g) - i_\alpha(g)$ для всех $g \in G_\alpha$ и всех таких $\alpha, \beta \in A$, что $\alpha \leq \beta$. Тогда $\text{dir lim } G_\alpha = \bigoplus_{\alpha \in A} G_\alpha / R$. Вложения $i_\alpha: G_\alpha \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in A} G_\alpha$ индуцируют гомоморфизмы $G_\alpha \rightarrow \text{dir lim } G_\alpha$, которые мы также обозначим через i_α . Они удовлетворяют условию $i_\beta \circ j_\alpha^\beta = i_\alpha$ при $\alpha \leq \beta$.

7.46. Предложение. *Прямой предел $(\text{dir lim } G_\alpha, \{i_\alpha\})$ с точностью до изоморфизма характеризуется следующим свойством. Для любой группы H и любых гомоморфизмов $f_\alpha: G_\alpha \rightarrow H$, $\alpha \in A$,*

¹⁾ В литературе встречаются также обозначения $\text{colim } G_\alpha$, $\varinjlim G_\alpha$, $\varprojlim G_\alpha$. — Прим. ред.

удовлетворяющих равенствам $f_\beta \circ j_\alpha^\beta = f_\alpha$ при всех $\alpha \leq \beta$, найдется единственный гомоморфизм $f: \operatorname{dir} \lim G_\alpha \rightarrow H$ с $f \circ i_\alpha = f_\alpha$, $\alpha \in A$.

Доказательство. Прямая сумма $\bigoplus_{\alpha \in A} G_\alpha$ характеризуется с точностью до изоморфизма тем свойством, что для любого семейства гомоморфизмов $f_\alpha: G_\alpha \rightarrow H$ найдется единственный гомоморфизм $f': \bigoplus_{\alpha} G_\alpha \rightarrow H$ с $f' \circ i_\alpha = f_\alpha$, $\alpha \in A$. Если, кроме того, гомоморфизмы f_α удовлетворяют равенствам $f_\beta \circ j_\alpha^\beta = f_\alpha$ для всех α, β с $\alpha \leq \beta$, то $f'(R) = 0$. Следовательно, в этом случае f' пропускается через $\operatorname{dir} \lim G_\alpha = \bigoplus_{\alpha \in A} G_\alpha / R$, что дает отображение $f: \operatorname{dir} \lim G_\alpha \rightarrow H$ с $f \circ i_\alpha = f_\alpha$, $\alpha \in A$.

Предположим теперь, что $g: \operatorname{dir} \lim G_\alpha \rightarrow H$ — еще один гомоморфизм, удовлетворяющий условиям $g \circ i_\alpha = f_\alpha$, $\alpha \in A$. Для композиции $g \circ q: \bigoplus_{\alpha} G_\alpha \rightarrow H$, где $q: \bigoplus_{\alpha} G_\alpha \rightarrow \operatorname{dir} \lim G_\alpha$ — естественная проекция, выполняются равенства $(g \circ q) \circ i_\alpha = f_\alpha$, $\alpha \in A$. Следовательно, $g \circ q = f'$. Но f является единственным гомоморфизмом, для которого $f \circ q = f'$. Поэтому $f = g$.

Пусть, наконец, G — некоторая группа и $i_\alpha: G_\alpha \rightarrow G$ — такие гомоморфизмы, что для любого семейства $f_\alpha: G_\alpha \rightarrow H$, $\alpha \in A$, с $f_\beta \circ j_\alpha^\beta = f_\alpha$ существует единственный гомоморфизм $\phi: G \rightarrow H$ с $\phi \circ i_\alpha = f_\alpha$. Взяв в качестве f_α гомоморфизмы $i_\alpha: G_\alpha \rightarrow \operatorname{dir} \lim G_\alpha$, мы найдем единственный гомоморфизм $\phi: G \rightarrow \operatorname{dir} \lim G_\alpha$, для которого $\phi \circ i_\alpha = i_\alpha$.

Аналогично, существует единственный гомоморфизм $\phi': \operatorname{dir} \lim G_\alpha \rightarrow G$ с $\phi' \circ i_\alpha = i_\alpha$. Оба гомоморфизма $\psi = \phi' \circ \phi$ и $\psi = 1_G$ удовлетворяют условию $\psi \circ i_\alpha = i_\alpha$, поэтому, в силу единственности, $\phi' \circ \phi = 1_G$. Точно так же $\phi \circ \phi' = 1_{\operatorname{dir} \lim G_\alpha}$. Следовательно, ϕ представляет собой изоморфизм, и он является единственным изоморфизмом, для которого $\phi \circ i_\alpha = i_\alpha$. $\square$

Гомоморфизм f , существование и единственность которого установлена в предложении 7.46, будет обозначаться через

$$\{f_\alpha\}: \operatorname{dir} \lim G_\alpha \rightarrow H.$$

7.47. Определение. Морфизмом прямых систем абелевых групп $\{G_\alpha, j_\alpha^\beta, A\} \xrightarrow{\{\phi_\alpha\}} \{G'_\alpha, j_\alpha^\beta, A\}$ называется такое семейство гомоморфизмов $\phi_\alpha: G_\alpha \rightarrow G'_\alpha$, $\alpha \in A$, что $j_\alpha^\beta \circ \phi_\alpha = \phi_\beta \circ j_\alpha^\beta$.

7.48. Следствие. Любой морфизм прямых систем $\{G_\alpha\} \rightarrow \{G'_\alpha\}$ индуцирует такой гомоморфизм

$$\operatorname{dir} \lim \phi_\alpha: \operatorname{dir} \lim G_\alpha \rightarrow \operatorname{dir} \lim G'_\alpha,$$

что $(\operatorname{dir} \lim \phi_\alpha) \circ i_\beta = i'_\beta \circ \phi_\beta$ для всех $\beta \in A$.

Доказательство. Для отображений

$$f_\beta = i'_\beta \circ \phi_\beta: G_\beta \rightarrow \operatorname{dir} \lim G'_\alpha$$

выполняются равенства $f_\beta \circ j_\alpha^\beta = i'_\beta \circ \phi_\beta \cdot j_\alpha^\beta = i'_\beta \cdot j_\alpha^\beta \cdot \phi_\alpha = i'_\alpha \cdot \phi_\alpha = f_\alpha$. Следовательно, можно положить $\text{dir lim } \phi_\alpha = \{f_\alpha\}$. $\square$

7.49. Следствие. Пусть $\{G_\alpha, j_\alpha^\beta\}$, $\{G'_\alpha, j'_\alpha^\beta\}$ — прямые системы¹⁾ и $f_\alpha: G_\alpha \rightarrow H$, $f'_\alpha: G'_\alpha \rightarrow H'$, $\alpha \in A$, — такие гомоморфизмы, что $f_\beta \circ j_\alpha^\beta = f_\alpha$, $f'_\beta \circ j'_\alpha^\beta = f'_\alpha$. Пусть, далее, $\{\phi_\alpha\}: \{G_\alpha\} \rightarrow \{G'_\alpha\}$ — морфизм прямых систем и $\phi: H \rightarrow H'$ — такой гомоморфизм, что для каждого $\alpha \in A$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} G_\alpha & \xrightarrow{f_\alpha} & H \\ \phi_\alpha \downarrow & & \downarrow \phi \\ G'_\alpha & \xrightarrow{f'_\alpha} & H' \end{array}$$

коммутативна. Тогда имеет место коммутативный квадрат

$$\begin{array}{ccc} \text{dir lim } G_\alpha & \xrightarrow{\{f_\alpha\}} & H \\ \text{dir lim } \phi_\alpha \downarrow & & \downarrow \phi \\ \text{dir lim } G'_\alpha & \xrightarrow{\{f'_\alpha\}} & H' \end{array}$$

Доказательство. Имеем $\phi \cdot \{f_\alpha\} \cdot i_\beta = \phi \cdot f_\beta = f'_\beta \cdot \phi_\beta$ и $\{f'_\alpha\} \cdot \text{dir lim } \phi_\alpha \cdot i_\beta = \{f'_\alpha\} \cdot i'_\beta \cdot \phi_\beta = f'_\beta \cdot \phi_\beta$

для всех $\beta \in A$. В силу единственности отсюда следует, что $\phi \cdot \{f_\alpha\} = \{f'_\alpha\} \cdot \text{dir lim } \phi_\alpha$. $\square$

Прямые пределы, кроме того, хорошо ведут себя по отношению к точным последовательностям.

7.50. Предложение. Пусть $\{A_\alpha\}$, $\{B_\alpha\}$, $\{C_\alpha\}$ — прямые системы и $\{\phi_\alpha\}: \{A_\alpha\} \rightarrow \{B_\alpha\}$, $\{\psi_\alpha\}: \{B_\alpha\} \rightarrow \{C_\alpha\}$ — морфизмы прямых систем. Если все последовательности

$$A_\alpha \xrightarrow{\phi_\alpha} B_\alpha \xrightarrow{\psi_\alpha} C_\alpha, \quad \alpha \in A,$$

точные, то последовательность

$$\text{dir lim } A_\alpha \xrightarrow{\text{dir lim } \phi_\alpha} \text{dir lim } B_\alpha \xrightarrow{\text{dir lim } \psi_\alpha} \text{dir lim } C_\alpha$$

также точна.

Доказательство. Введем на $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ отношение эквивалентности $\sim$, полагая, что $g \sim g'$, где $g \in G_\alpha$, $g' \in G_\beta$, тогда и только тогда, когда существует $\gamma \geq \alpha$, $\gamma \geq \beta$ с $j_\alpha^\gamma g = j_\beta^\gamma g'$. В фак-

¹⁾ В дальнейшем обозначение прямой системы $\{G_\alpha, j_\alpha^\beta, A\}$ будет часто сокращаться до $\{G_\alpha, j_\alpha^\beta\}$ или даже до $\{G_\alpha\}$. — Прим. ред

гормножестве $\hat{G} = \bigcup_{\alpha} G_{\alpha} / \sim$ естественным образом определена операция сложения: $\{g\} + \{g'\} = \{j_{\alpha}^{\gamma} g + j_{\beta}^{\gamma} g'\}$, $g \in G_{\alpha}$, $g' \in G_{\beta}$. Зададим гомоморфизмы $i_{\alpha}: G_{\alpha} \rightarrow \hat{G}$, полагая $i_{\alpha}(g) = \{g\}$. Легко видеть, что $\{\hat{G}, i_{\alpha}\}$ обладает универсальным свойством прямого предела и, следовательно, $\operatorname{dir} \lim G_{\alpha} = \hat{G}$. В частности, если $g \in G_{\alpha}$, то $i_{\alpha}(g) = 0$ в группе $\operatorname{dir} \lim G_{\alpha}$ тогда и только тогда, когда $j_{\alpha}^{\gamma}(g) = 0$ для некоторого $\gamma \geq \alpha$.

Без труда проверяется, что $(\operatorname{dir} \lim \psi_{\alpha}) \cdot (\operatorname{dir} \lim \phi_{\alpha}) = \operatorname{dir} \lim (\psi_{\alpha} \cdot \phi_{\alpha}) = 0$. Пусть теперь для $\{b\} \in \hat{B} \cong \operatorname{dir} \lim B_{\alpha}$ выполнено равенство $\operatorname{dir} \lim \psi_{\alpha} \{b\} = 0$. Для $b \in B_{\alpha}$ это означает, что

$$0 = j_{\alpha}^{\beta} \psi_{\alpha}(b) = \psi_{\beta} \cdot j_{\alpha}^{\beta}(b)$$

для некоторого $\beta \geq \alpha$. Следовательно, $j_{\alpha}^{\beta}(b) = \phi_{\beta}(a)$ для некоторого $a \in A_{\beta}$. Таким образом, $\operatorname{dir} \lim \phi_{\alpha}(\{a\}) = \{b\}$. $\square$

7.51. Следствие. Если $\{\phi_{\alpha}\}: \{G_{\alpha}\} \rightarrow \{G'_{\alpha}\}$ — такой морфизм прямых систем, что каждый гомоморфизм ϕ_{α} является мономорфизмом (соответственно, эпиморфизмом; соответственно, изоморфизмом), то этим же свойством обладает $\operatorname{dir} \lim \phi_{\alpha}$.

В предыдущей главе мы в неявном виде использовали следующий результат.

7.52. Предложение. Пусть (X, x_0) — пунктированное пространство и $\{X_{\alpha}: \alpha \in \Lambda\}$ — такое упорядоченное по включению семейство его подпространств, что для каждого компактного подмножества $C \subset X$ существует такое X_{γ} , что $C \subset X_{\gamma}$. Пусть $j_{\alpha}^{\beta}: X_{\alpha} \rightarrow X_{\beta}$, $i_{\alpha}: X_{\alpha} \rightarrow X$ — естественные включения. Тогда группы $\pi_n(X_{\alpha}, x_0)$ и гомоморфизмы $j_{\alpha*}^{\beta}$ образуют прямую систему абелевых групп ($n \geq 2$) и

$$\{i_{\alpha*}\}: \operatorname{dir} \lim \pi_n(X_{\alpha}, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$$

является изоморфизмом.

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Если задано отображение $f: (S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$, то существует $X_{\alpha} \subset X$ с $f(S^n) \subset X_{\alpha}$. Таким образом, f определяет элемент $[f]_{\alpha} \in \pi_n(X_{\alpha}, x_0)$ и без труда проверяется, что $\{i_{\alpha*}\}(\{[f]_{\alpha}\}) = [f]$. Следовательно, $\{i_{\alpha*}\}$ — эпиморфизм.

Пусть теперь $g_1: (S^n, s_0) \rightarrow (X_{\alpha}, x_0)$, $g_2: (S^n, s_0) \rightarrow (X_{\beta}, x_0)$ — такие отображения, что $\{i_{\alpha*}\}(\{[g_1]\}) = \{i_{\alpha*}\}(\{[g_2]\})$. Это равенство означает, что $i_{\alpha*} g_1 \simeq i_{\beta*} g_2$ в X . Обозначим через H связывающую их гомотопию. Так как образ $H(S^n \times I)$ компактен, то найдется такое X_{γ} , что $H(S^n \times I) \subset X_{\gamma}$. Другими словами, $j_{\alpha*}^{\gamma}[g_1] = j_{\beta*}^{\gamma}[g_2]$, т. е. $\{[g_1]\} = \{[g_2]\}$. Следовательно, $\{i_{\alpha*}\}$ — мономорфизм. $\square$

Соответствующий результат справедлив и для теорий гомологий, удовлетворяющих на $\mathcal{F}\mathcal{U}$ аксиоме суммы.

7.53. Предложение. Пусть (X, x_0) — клеточное пространство и

$$X^0 \subset \dots \subset X^n \subset \dots \subset X$$

— такая последовательность его клеточных подпространств, что $\bigcup_{n \geq 0} X^n = X$. Обозначим через $j_n^m: X^n \rightarrow X^m$, $i_n: X^n \rightarrow X$ очевидные включения. Тогда группы $k_q(X^n)$ и гомоморфизмы j_{n*}^m образуют прямую систему. Если, кроме того, k_* удовлетворяет на $\mathcal{F}\mathcal{U}$ аксиоме суммы, то

$$\{i_{n*}\}: \operatorname{dir} \lim k_q(X^n) \rightarrow k_q(X)$$

— изоморфизм для любого $q \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Построим «бесконечный телескоп»

$$X' = \bigcup_{n \geq -1} [n-1, n]^+ \wedge X^n \subset [-2, \infty)^+ \wedge X.$$

Тогда X' является клеточным пространством, и мы имеем отображение $r: X' \rightarrow X$, которое представляет собой ограничение на X' проекции $p_X: [-2, \infty) \times X \rightarrow X$. Для каждого n положим $X'_n =$

$$\bigcup_{k=-1}^n [k-1, k]^+ \wedge X^k \subset X'. \text{ Легко видеть, что имеют место вклю-}$$

чения $j_n'^m: X'_n \rightarrow X'_m$, $n \leq m$, и $i_n': X'_n \rightarrow X'$. Кроме того, определены отображения $r_n: X'_n \rightarrow X^n$ (ограничения на X'_n проекции $[-2, n]^+ \wedge X^n \rightarrow X^n$) и $k_n: X^n \rightarrow X'_n$ (задаваемые формулой $k_n(x) = [n, x]$, $x \in X^n$). Эти отображения удовлетворяют соотношениям

$$r_m \circ j_n'^m = j_n^m \circ r_n, \quad r_n \circ k_n = 1_{X^n},$$

$$i_n \circ r_n = r \circ i_n', \quad k_n \circ r_n \simeq 1_{X_n'}.$$

Гомотопия $k_n \circ r_n \simeq 1_{X_n'}$ задается формулой

$$K_n([s, x], t) = [(1-t)s + tn, x], \quad s \in [k-1, n], \quad x \in X^k, \quad t \in I.$$

Следовательно, r_n является гомотопической эквивалентностью для каждого $n \geq -1$.

Без труда проверяется, что $\{\pi_q(X^n, x_0), j_{n*}^m\}$, $\{\pi_q(X'_n, *), j_{n*}'^m\}$ — прямые системы и $\{r_{n*}\}$ — морфизм прямых систем. В силу следствия 7.49 квадрат

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{dir} \lim \pi_q(X'_n, *) & \xrightarrow[\cong]{\{j_{n*}'^m\}} & \pi_q(X', x_0) \\ 7.54. \quad \operatorname{dir} \lim r_{n*} \downarrow \cong & & \downarrow r_* \\ \operatorname{dir} \lim \pi_q(X^n, x_0) & \xrightarrow[\cong]{\{j_{n*}^m\}} & \pi_q(X, x_0) \end{array}$$

коммутативен, а в силу предложения 7.52 $\{i'_{n*}\}$ и $\{i_{r*}\}$ являются изоморфизмами. Следовательно, r_* — изоморфизм для каждого q . Но тогда по теореме 6.32 Уайтхеда r является гомотопической эквивалентностью. (Это хороший пример ситуации, когда трудно представить отображение, гомотопически обратное к данному отображению r .)

Положим теперь

$$A = \bigcup_{\substack{k \geq -1 \\ k \text{ нечетно}}} [k-1, k]^+ \wedge X^k \subset X',$$

$$B = \bigcup_{\substack{k \geq 0 \\ k \text{ четно}}} [k-1, k]^+ \wedge X^k \subset X'.$$

Легко видеть, что

i) $A \cup B = X'$,

ii) $A \cap B = \bigvee_{k \geq -1} \{k\} \times X^k \cong \bigvee_{k \geq -1} X^k$,

iii) $\bigvee_{\substack{k \geq -1 \\ k \text{ нечетно}}} \{k\} \times X^k$ — сильный деформационный ретракт в A ,

iv) $\bigvee_{\substack{k \geq 0 \\ k \text{ четно}}} \{k\} \times X^k$ — сильный деформационный ретракт в B .

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & k_q(A \cap B) & \xrightarrow{\alpha} & k_q(A) \oplus k_q(B) & \xrightarrow{\beta} & k_q(X') \xrightarrow{\Delta'} \dots \\
 & & \uparrow & & \uparrow \cong & & \downarrow \cong r_* \\
 & & (\oplus_{n \text{ odd}} k_q(X^n)) \oplus (\oplus_{n \text{ even}} k_q(X^n)) & & & \nearrow \beta' & \\
 & \uparrow \cong & & & \parallel & & \\
 \oplus_{n \geq -1} k_q(X^n) & \xrightarrow{\alpha'} & \oplus_{n \geq -1} k_q(X^n) & \xrightarrow{\{(-1)^{n+1} i_{n*}\}} & k_q(X) & &
 \end{array}$$

верхняя строка которой представляет собой точную последовательность Майера — Вьеториса для триады $(X'; A, B)$, гомоморфизм α' определен формулой $\alpha'(x) = i_n(x) + i_{n+1} \cdot j_{n*}^{n+1}(x)$ для $x \in k_q(X^n)$ (где $i_n: k_q(X^n) \rightarrow \bigoplus_n k_q(X^n)$ — вложение прямого слагаемого), а гомоморфизм β' задан формулой

$$\beta'(x) = (-1)^{n+1} i'_{n*} k_{*} (x), \quad x \in k_q(X^n).$$

Ясно, что α' — мономорфизм и, значит, β' (а потому и $\{(-1)^{n+1} i_{n*}\}$) — эпиморфизм. Поэтому мы имеем коммутативную

диаграмму точных последовательностей

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \oplus_{n \geq -1} k_q(X^n) & & \\
 & \nearrow \alpha' & \downarrow & \searrow \{(-1)^{n+1} i_{n*}\} & \\
 0 \rightarrow \oplus_{n \geq -1} k_q(X^n) & & \oplus_n (-1)^{n+1} & \rightarrow k_q(X) \rightarrow 0, & \\
 & \searrow \partial & \downarrow & \nearrow \{i_{n*}\} & \\
 & & \oplus_{n \geq -1} k_q(X^n) & &
 \end{array}$$

где $\partial(x) = (-1)^n \{i_{n+1} i_{n*}^{n+1}(x) - i_n(x)\}$ для $x \in k_q(X^n)$. Но $\text{dir lim } k_q(X^n) = \oplus k_q(X^n) / \text{im } \partial$. $\square$

Таким образом, если теория гомологий k_* удовлетворяет на $\mathcal{W}$ аксиоме суммы, то, зная группы $k_q(X^n)$ для всех $n \geq -1$, можно получить некоторую информацию о группе

$$\text{dir lim } k_q(X^n) \cong k_q(X).$$

Доказательство следующей теоремы служит типичным примером рассуждения, основанного на индукции по остовам, — приеме, о котором уже упоминалось выше.

7.55. Теорема. Пусть $T_*: k_* \rightarrow k'_*$ — естественное преобразование приведенных теорий гомологий. Если

$$T_q(S^0): k_q(S^0) \rightarrow k'_q(S^0)$$

изоморфизм при $q < N$ и эпиморфизм при $q = N$, то для каждого конечного $(n-1)$ -связного клеточного пространства (X, x_0) гомоморфизм

$$T_q(X): k_q(X) \rightarrow k'_q(X)$$

является изоморфизмом при $q < n + N$ и эпиморфизмом при $q = n + N$. Если теории k_* , k'_* удовлетворяют на $\mathcal{W}'$ аксиоме суммы, то сказанное справедливо и для бесконечного клеточного пространства X . Если, сверх того, k_* , k'_* удовлетворяют аксиоме слабой гомотопической эквивалентности, то сказанное справедливо и для произвольного $(n-1)$ -связного топологического пространства X .

Доказательство. Так как T перестановочно с функтором надстройки σ , то квадрат

$$\begin{array}{ccc}
 k_q(S^0) & \xrightarrow[\cong]{\sigma^n} & k_{q+n}(S^n) \\
 T_q(S^0) \downarrow & & \downarrow T_{q+n}(S^n) \\
 k'_q(S^0) & \xrightarrow[\cong]{\sigma'^n} & k'_{q+n}(S^n)
 \end{array}$$

коммутативен, откуда следует, что $T_{q+n}(S^n)$ — изоморфизм при $q < N$ и эпиморфизм при $q = N$. Так как T — естественное пре-

образование, то имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{x \in J_n} k_q(S_x^n) & \xrightarrow{\{i_{x*}\}} & k_q(\bigvee_{\alpha \in J_n} S_\alpha^n) \\ \downarrow T_q & & \downarrow T_q \\ \bigoplus_{x \in J_n} k'_q(S_x^n) & \xrightarrow{\{i_{x*}\}} & k'_q(\bigvee_{\alpha \in J_n} S_\alpha^n). \end{array}$$

Гомоморфизм $\bigoplus_{\alpha} T_q(S_{\alpha}^n)$ является изоморфизмом при $q < n + N$ и эпиморфизмом при $q = n + N$. И в той, и в другой теории $\{i_{\alpha*}\}$ — изоморфизм, если J_n конечно, или же если k_* , k'_* удовлетворяют аксиоме суммы. Во всех случаях $T_q(\bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n)$ — изоморфизм для $q < n + N$ и эпиморфизм для $q = n + N$.

Заменяя, если необходимо, гомотопически эквивалентным пространством, можно считать, что $X^{n-1} = \{x_0\}$. Так как $k_q(X^{n-1}) = k_q(\{x_0\}) = 0 = k'_q(X^{n-1})$ для всех q , то $T_q(X^{n-1})$ — изоморфизм. Предположим теперь, что при некотором $m \geq n$ мы доказали, что $T_q(X^{m-1})$ — изоморфизм при $q < n + N$ и эпиморфизм при $q = n + N$. Рассмотрим коммутативную диаграмму точных последовательностей

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightarrow & k_{q+1}(\bigvee_{\alpha \in J_m} S_{\alpha}^m) & \rightarrow & k_q(X^{m-1}) & \rightarrow & k_q(X^m) \rightarrow \\ & & \downarrow T_{q+1}(\bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^m) & & \downarrow T_q(X^{m-1}) & & \downarrow T_q(X^m) \\ \cdots & \rightarrow & k'_{q+1}(\bigvee_{\alpha \in J_m} S_{\alpha}^m) & \rightarrow & k'_q(X^{m-1}) & \rightarrow & k'_q(X^m) \rightarrow \\ & & & & & & \\ & & & & k_q(\bigvee_{\alpha \in J_m} S_{\alpha}^m) & \rightarrow & k_{q-1}(X^{m-1}) \rightarrow \cdots \\ & & & & \downarrow T_q(\bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^m) & & \downarrow T_{q-1}(X^{m-1}) \\ & & & & k'_q(\bigvee_{\alpha \in J_m} S_{\alpha}^m) & \rightarrow & k'_{q-1}(X^{m-1}) \rightarrow \cdots \end{array}$$

Если $q < n + N$, то $T_q(X^{m-1})$, $T_q(\bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^m)$ и $T_{q-1}(X^{m-1})$ — изоморфизмы, а $T_{q+1}(\bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^m)$ — эпиморфизм. Поэтому по лемме о пяти гомоморфизмах $T_q(X^m)$ также является изоморфизмом. Если же $q = n + N$, то $T_q(X^{m-1})$, $T_q(\bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^m)$ — эпиморфизмы, а $T_{q-1}(X^{m-1})$ — изоморфизм, так что $T_q(X^m)$ является эпиморфизмом.

В случае, когда клеточное пространство X бесконечномерно, а k_* , k'_* удовлетворяют аксиоме суммы, мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{dir} \lim k_q(X^m) & \xrightarrow[\cong]{\{i_{m*}\}} & k_q(X) \\ \operatorname{dir} \lim T_q(X^m) \downarrow & & \downarrow T_q(X) \\ \operatorname{dir} \lim k'_q(X^m) & \xrightarrow[\cong]{\{i_{m*}\}} & k'_q(X). \end{array}$$

Таким образом, если $T_q(X^m)$ — изоморфизм при $q < n + N$ и эпиморфизм при $q = n + N$ ($m \geq -1$), то теми же свойствами обладает гомоморфизм $\operatorname{dir} \lim T_q(X^m)$ и, значит, гомоморфизм $T_q(X)$.

Наконец, если теории k_* , k'_* удовлетворяют аксиоме слабой гомотопической эквивалентности, то мы получим доказательство, взяв клеточные эквиваленты. $\square$

Двойственным к понятию теории гомологий является понятие теории когомологий.

7.56. Определение. Приведенной теорией когомологий на категории $\mathcal{P}\mathcal{T}'$ называется семейство кофункторов $k^n: \mathcal{P}\mathcal{T}' \rightarrow \mathcal{A}$ и естественных эквивалентностей $\sigma^n: k^{n-1} \cdot S \rightarrow k^n$, $n \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющих следующей аксиоме.

Аксиома точности: для каждой пунктированной пары (X, A, x_0) последовательность

$$k^n(A, x_0) \xrightarrow{k^n[i]} k^n(X, x_0) \xrightarrow{k^n[j]} k^n(X \cup CA, *)$$

точна. Здесь $i: (A, x_0) \rightarrow (X, x_0)$ и $j: (X, x_0) \rightarrow (X \cup CA, *)$ — очевидные вложения.

Аналогичным образом можно определить неприведенную теорию когомологий на категории $\mathcal{T}^{2'}$.

Для теорий когомологий все леммы, предложения, теоремы и т. д., начиная с предложения 7.2 и кончая леммой 7.44, допускают двойственные формулировки и двойственные доказательства. К сожалению, при переходе к пределу когомологии ведут себя не так хорошо, как гомологии. Поэтому для теорий когомологий аналоги всех результатов, начиная с определения 7.45, нуждаются в особой трактовке.

Включения $j_n^m: X^n \rightarrow X^m$, $n \leq m$, и $i_n: X^n \rightarrow X$ индуцируют гомоморфизмы $j_n^{m*}: k^q(X^m) \rightarrow k^q(X^n)$ и $i_n^*: k^q(X) \rightarrow k^q(X^n)$, удовлетворяющие равенствам $j_n^{m*} \cdot j_m^{p*} = j_n^{p*}$, $j_n^{m*} \cdot i_m^* = i_n^*$. Это наблюдение приводит к следующему понятию, дуализирующему понятие прямой системы.

7.57. Определение. Обратной (или проективной) системой абелевых групп называется такое семейство $\{G_\alpha\}$ абелевых групп,

индексированных элементами направленного множества A , и гомоморфизмов $j_\alpha^\beta: G_\beta \rightarrow G_\alpha$, $\alpha \leq \beta$, что $j_\alpha^\beta \circ j_\beta^\gamma = j_\alpha^\gamma$ при $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ и $j_\alpha^\alpha = 1$ для любого $\alpha \in A$. Если задана некоторая обратная система $\{G_\alpha, j_\alpha^\beta, A\}$, то обратным (или проективным) пределом называется группа $\lim^0 G_\alpha = \text{inv lim } G_\alpha$, определяемая следующим образом¹⁾:

$\text{inv lim } G_\alpha$ есть подгруппа группы $\prod_{\alpha \in A} G_\alpha$,

состоящая из всех таких $f \in \prod_{\alpha \in A} G_\alpha$, что $j_\alpha^\beta(f(\beta)) = f(\alpha)$ для любых α, β с $\alpha \leq \beta$. Ограничения проекций $p_\alpha: \prod_{\alpha \in A} G_\alpha \rightarrow G_\alpha$ на подгруппу $\text{inv lim } G_\alpha$ индуцируют гомоморфизмы

$$p_\alpha: \text{inv lim } G_\alpha \rightarrow G_\alpha,$$

удовлетворяющие условиям $j_\alpha^\beta \circ p_\beta = p_\alpha$ для любых α, β из A с $\alpha \leq \beta$.

7.58. Предложение. Обратный предел $(\text{inv lim } G_\alpha, \{p_\alpha\})$ характеризуется с точностью до изоморфизма следующим свойством. Для любой группы H и любых гомоморфизмов $f_\alpha: H \rightarrow G_\alpha$, $\alpha \in A$, удовлетворяющих равенствам $j_\alpha^\beta \circ f_\beta = f_\alpha$ при $\alpha \leq \beta$, найдется единственный гомоморфизм $f: H \rightarrow \text{inv lim } G_\alpha$ с $p_\alpha \circ f = f_\alpha$, $\alpha \in A$.

Доказательство. Легко видеть, что существует и единствен такой гомоморфизм $\{f_\alpha\}: H \rightarrow \prod_{\alpha \in A} G_\alpha$, что $p_\alpha \circ \{f_\alpha\} = f_\alpha$. Поэтому для доказательства достаточно убедиться, что при сделанных предположениях $\text{im } \{f_\alpha\} \subset \text{inv lim } G_\alpha$. А это проверяется дуализацией соответствующих рассуждений из 7.46. $\square$

Как и раньше, обозначим гомоморфизм f , существование и единственность которого гарантируется предложением 7.58, через $\{f_\alpha\}: H \rightarrow \text{inv lim } G_\alpha$.

7.59. Существует очевидное определение морфизма обратных систем. Дуализируя 7.48, получим, что морфизм $\{\phi_\alpha\}: \{G_\alpha\} \rightarrow \{G'_\alpha\}$ обратных систем индуцирует такой гомоморфизм

$$\text{inv lim } \phi_\alpha: \text{inv lim } G_\alpha \rightarrow \text{inv lim } G'_\alpha,$$

что $p'_\beta \circ \text{inv lim } \phi_\alpha = \phi_\beta \circ p_\beta$ для всех $\beta \in A$.

7.60. Аналогичным образом можно дуализировать следствие 7.49. В результате получим такое утверждение: если задан морфизм обратных систем

$$\{\phi_\alpha\}: \{G_\alpha\} \rightarrow \{G'_\alpha\}$$

¹⁾ Встречаются также обозначения $\varprojlim G_\alpha$, $\varprojlim G_\alpha$ и просто $\lim G_\alpha$. — Прим. ред.

и такие гомоморфизмы $f_\alpha: H \rightarrow G_\alpha$, $f'_\alpha: H' \rightarrow G'_\alpha$, $\phi: H \rightarrow H'$, что $j_\alpha^\beta \cdot f_\beta = f_\alpha$, $j'_\alpha^\beta \cdot f'_\beta = f'_\alpha$ и $f'_\alpha \cdot \phi = \phi_\alpha \cdot f_\alpha$, то имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\{f_\alpha\}} & \operatorname{inv} \lim G_\alpha \\ \phi \downarrow & & \downarrow \operatorname{inv} \lim \phi_\alpha \\ H' & \xrightarrow{\{f'_\alpha\}} & \operatorname{inv} \lim G'_\alpha. \end{array}$$

Все сказанное до сих пор об обратных пределах получалось дуализацией соответствующих утверждений о прямых пределах. Однако, как только мы приходим к предложению 7.50, двойственность нарушается: обратный предел $\operatorname{inv} \lim$ не сохраняет точность.

7.61. Пример. Пусть $p: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ — каноническая проекция. Тогда имеет место коммутативная диаграмма с точными строками

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{p} & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \times 3 & & \downarrow 1 & & \downarrow 1 \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{p} & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Пусть $\{A_n, j_n^m\}$ — проективная система с $A_n = \mathbb{Z}$ для всех целых $n \geq 0$ и $j_n^m(z) = 3^{m-n}z$, $n \leq m$, а $\{B_n, k_n^m\}$ — обратная система с $B_n = \mathbb{Z}_2$ для всех $n \geq 0$ и $k_n^m = 1$, $n \leq m$. Определим отображения $\{\phi_n\}: \{A_n\} \rightarrow \{B_n\}$, $\{\psi_n\}: \{B_n\} \rightarrow \{0\}$, полагая $\phi_n(x) = p(x)$, $x \in A_n$, $\psi_n = 0$. Тогда $\{\phi_n\}$, $\{\psi_n\}$ являются морфизмами обратных систем, и для каждого $n \geq 0$ имеет место точная последовательность

$$A_n \xrightarrow{\phi_n} B_n \xrightarrow{\psi_n} 0.$$

Но единственной последовательностью целых чисел $\{a_0, a_1, \dots\}$, для которой $a_i = 3a_{i+1}$ при всех $i \geq 0$, является нулевая последовательность. Поэтому $\operatorname{inv} \lim A_n = 0$. Ясно, что $\operatorname{inv} \lim B_n = \mathbb{Z}_2$. Таким образом, предельная последовательность

$$\operatorname{inv} \lim A_n \xrightarrow{\operatorname{inv} \lim \phi_n} \operatorname{inv} \lim B_n \xrightarrow{\operatorname{inv} \lim \psi_n} \operatorname{inv} \lim 0$$

не точна.

В действительности функтор $\operatorname{inv} \lim$ представляет собой пример так называемого *точного слева* функтора (см. [49]) и, следовательно, порождает производные функторы $\lim^k$, $k \geq 0$. Мы ограничимся здесь случаем $A = \mathbb{N}$, поскольку он гораздо проще общей ситуации и в то же время вполне достаточен для приложений к обратным системам $\{k^q(X'')\}$.

7.62. Рассмотрим отображение $\prod_n G_n \xrightarrow{\delta} \prod_n G_n$, определенное формулой

$$\delta f(n) = (-1)^n f(n) + (-1)^{n+1} j_n^{n+1}(f(n+1))$$

для $f \in \prod_n G_n$. Отметим, что $\ker \delta \subset \prod_n G_n$ состоит из тех элементов $f \in \prod_n G_n$, для которых $j_n^{n+1}(f(n+1)) = f(n)$, $n \geq 0$. Но это — в точности группа $\lim^0 G_n = \text{inv} \lim G_n$. Положим $\lim^1 G_n = \text{coker } \delta$.

Говорят, что задана короткая точная последовательность

$$0 \rightarrow \{A_n\} \rightarrow \{B_n\} \rightarrow \{C_n\} \rightarrow 0$$

обратных систем, если для каждого $n \geq 0$ точна последовательность абелевых групп и гомоморфизмов

$$0 \rightarrow A_n \rightarrow B_n \rightarrow C_n \rightarrow 0.$$

7.63. Предложение. *Короткая точная последовательность*

$$0 \rightarrow \{A_n\} \xrightarrow{\{\phi_n\}} \{B_n\} \xrightarrow{\{\psi_n\}} \{C_n\} \rightarrow 0$$

проективных систем порождает точную последовательность

$$0 \rightarrow \lim^0 A_n \rightarrow \lim^0 B_n \rightarrow \lim^0 C_n \rightarrow \lim^1 A_n \rightarrow \lim^1 B_n \rightarrow \lim^1 C_n \rightarrow 0.$$

Доказательство. Будем считать, что

$$\prod_n G_n \xrightarrow{\delta} \prod_n G_n$$

представляет собой коцепный комплекс $C^* \{G_n\}$ с $C^0 = C^1 = \prod_n G_n$, $C^k = 0$, $k \geq 2$. В этих терминах $\lim^0 G_n = H^0(C^* (\{G_n\}))$, $\lim^1 G_n = H^1(C^* (\{G_n\}))$. Мы имеем короткую точную последовательность коцепных комплексов

$$0 \rightarrow C^* (\{A_n\}) \xrightarrow{\{\phi_n\}^\#} C^* (\{B_n\}) \xrightarrow{\{\psi_n\}^\#} C^* (\{C_n\}) \rightarrow 0.$$

Результирующая длинная точная последовательность групп когомологий есть не что иное, как последовательность 7.63. $\square$

7.64. Следствие. Если $\{\phi_n\}: \{G_n\} \rightarrow \{G'_n\}$ — такой морфизм обратных систем, что каждый ϕ_n — изоморфизм, то $\lim^0 \phi_n$ и $\lim^1 \phi_n$ являются изоморфизмами.

Попытаемся теперь дуализировать предложение 7.53. Прежде всего сформулируем для теорий когомологий аналог аксиомы суммы.

7.65. Аксиома суммы. Для любого семейства $\{(X_\alpha, x_\alpha): \alpha \in A\}$ пунктированных пространств включения $i_\alpha: X_\alpha \rightarrow \bigvee_{\beta \in A} X_\beta$ индуцируют изоморфизм

$$\{i_\alpha^*\}: k^q \left(\bigvee_\alpha X_\alpha \right) \rightarrow \prod_{\alpha \in A} k^q(X_\alpha).$$

Самое большое, что мы можем получить в качестве аналога предложения 7.53, — это следующее утверждение.

7.66. Предложение. Пусть (X, x_0) — клеточное пространство и $X^0 \subset \dots \subset X^n \subset \dots \subset X$ — такая последовательность его клеточных подпространств, что $\bigcup_{n \geq 0} X^n = X$. Обозначим через $j_n^m: X^n \rightarrow X^m$, $n \geq m$, $i_n: X^n \rightarrow X$ очевидные включения. Тогда $\{k^q(X^n), j_n^{m*}, \mathbb{N}\}$ для каждого $q \in \mathbb{Z}$ образует обратную систему. Если теория когомологий k^* удовлетворяет на $\mathcal{F}\mathcal{W}'$ аксиоме суммы, то имеет место точная последовательность¹⁾

$$0 \rightarrow \lim^1 k^{q-1}(X^n) \rightarrow k^q(X) \xrightarrow{\{i_n^*\}} \lim^0 k^q(X^n) \rightarrow 0.$$

Доказательство. Воспользуемся схемой доказательства предложения 7.53. Пусть

$$X' = \bigcup_{n \geq -1} [n-1, n]^+ \wedge X^n \subset [-2, \infty)^+ \wedge X,$$

$$A = \bigcup_{\substack{k \geq -1 \\ k \text{ нечетно}}} [k-1, k]^+ \wedge X^k \subset X',$$

$$B = \bigcup_{\substack{k \geq 0 \\ k \text{ четно}}} [k-1, k]^+ \wedge X^k \subset X'.$$

Точная последовательность Майера — Вьеториса для триады $(X'; A, B)$ в нашем случае имеет вид

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & k^{q-1}(A) \oplus k^{q-1}(B) & \xrightarrow{\alpha} & k^{q-1}(A \cap B) & \xrightarrow{\Delta'} & \\ & & \parallel & & \parallel & & \\ & & \prod_{n \geq -1} k^{q-1}(X^n) & \xrightarrow{\alpha'} & \prod_{n \geq -1} k^{q-1}(X^n) & & \\ & & & & & & \\ k^q(X') & \xrightarrow{\beta} & k^q(A) \oplus k^q(B) & \xrightarrow{\alpha} & k^q(A \cap B) & \longrightarrow & \dots \\ & \nearrow r^* \cong & \searrow \beta' & & \parallel & & \parallel \\ k^q(X) & \xrightarrow{\{i_n^*\}} & \prod_{n \geq -1} k^q(X^n) & \xrightarrow{\alpha'} & \prod_{n \geq -1} k^q(X^n), & & \end{array}$$

¹⁾ Как уже говорилось, можно определить функторы $\lim^k$, $k \geq 0$, бесконечно продолжающие вправо точную последовательность предложения 7.63 (см. [5*]). При этом для $A = \mathbb{N}$ $\lim^k = 0$ при $k > 1$, поэтому такая последовательность в предложении 7.63 обрывается. Обобщается и предложение 7.66: если имеется семейство $\{X_\alpha\}$ клеточных подпространств с $\bigcup X_\alpha = X$, то возникает спектральная последовательность (см. гл. 15) $E_r^{p,q}$, где $E_1^{p,q} = \lim^p k^q(X_\alpha)$, сходящаяся к $k^*(X)$; см. [2*]. — Прим. ред

где гомоморфизм α' задан формулой $[\alpha'(f)](n) = (-1)^{n+1} \{f(n) - j_n^{n+1} * f(n+1)\}$, $f \in \prod_{n \geq -1} k^q(X^n)$, а гомоморфизм β' — формулой $[\beta'(x)](n) = k_n^* i_n^* (x)$, $x \in k^q(X')$. Таким образом, $\alpha' = -\delta$, и мы получаем точную последовательность

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{coker } \alpha' & \longrightarrow & k^q(X) & \xrightarrow{\{i_n^*\}} & \text{ker } \alpha' \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & & & \parallel \\ & & \lim^1 k^{q-1}(X^n) & & & & \lim^0 k^q(X^n). \end{array}$$

Следовательно, для теорий когомологий гомоморфизм

$$\{i_n^*\}: k^q(X) \rightarrow \lim^0 k^q(X^n)$$

является изоморфизмом в том и только в том случае, когда $\lim^1 k^{q-1}(X^n) = 0$.

Сформулируем теперь аналог теоремы 7.55. Его доказательство не использует результатов пп. 7.57–7.66.

7.67. Теорема. Пусть $T^*: k^* \rightarrow k'^*$ — естественное преобразование теорий когомологий, удовлетворяющих на категории $\mathcal{W}'$ аксиоме суммы. Если $T^q(S^0): k^q(S^0) \rightarrow k'^q(S^0)$ — изоморфизм для $q > N$ и эпиморфизм для $q = N$, то для любого n -мерного клеточного пространства (X, x_0) гомоморфизм

$$T^q(X): k^q(X) \rightarrow k'^q(X)$$

является изоморфизмом для $q > n + N$ и эпиморфизмом для $q = n + N$.

Доказательство. Получается дуализацией доказательства теоремы 7.55. $\square$

7.68. В следующей главе мы опишем метод, с помощью которого можно построить много различных приведенных теорий гомологий и когомологий на категории $\mathcal{W}'$. Однако в ряде задач удобнее пользоваться теориями, определенными для любых топологических пространств. Поэтому мы должны исследовать, в каких случаях приведенная теория гомологий (или когомологий) на $\mathcal{W}'$ может быть продолжена на категорию $\mathcal{W}$.

Пусть k_* — произвольная приведенная теория гомологий на $\mathcal{W}'$ и (X, x_0) — некоторое пунктированное пространство. Выберем для X клеточный эквивалент $f: X' \rightarrow X$ и такую отмеченную точку $x'_0 \in X'$, что $f(x'_0) = x_0$. Положим $k_n(X) = k_n(X')$, $n \in \mathbb{Z}$. Так как клеточный эквивалент определен однозначно с точностью до гомотопической эквивалентности, то группы $k_n(X)$ корректно определены.

Для заданного отображения $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ пунктированных пространств возьмем клеточные эквиваленты $g: X' \rightarrow X$, $h: Y' \rightarrow Y$ и такое отображение $f': (X', x'_0) \rightarrow (Y', y'_0)$, что $h \circ f' \simeq$

$f \cdot g$. Тогда можно положить $k_n[f] = k_n[f']$. Поскольку отображение f' единственно с точностью до гомотопности, то гомоморфизм $k_n[f]$ корректно определен.

Пусть теперь (X, x_0) — произвольное пунктированное пространство и $f': (X', x'_0) \rightarrow (X, x_0)$ — его клеточный эквивалент. Положим

$$C_1X = \{[t, x]: 1/3 \leq t \leq 1, x \in X\} \subset SX,$$

$$C_2X = \{[t, x]: 0 \leq t \leq 2/3, x \in X\} \subset SX.$$

Тогда $\{SX; C_1X, C_2X\}$ является триадой с $SX = C_1X^\circ \cup C_2X^\circ$. Кроме того, отображение триад

$$Sf': (SX'; C_+X', C_-X') \rightarrow (SX; C_1X, C_2X)$$

обладает тем свойством, что

$$Sf' | C_+X': C_+X' \rightarrow C_1X,$$

$$Sf' | C_-X': C_-X' \rightarrow C_2X,$$

$$Sf' | C_+X' \cap C_-X': C_+X' \cap C_-X' \rightarrow C_1X \cap C_2X$$

— слабые гомотопические эквивалентности. Поэтому в силу 6.52

$$Sf': SX' \rightarrow SX$$

является клеточным эквивалентом для SX . Это позволяет определить гомоморфизм $\sigma: k_n(X) \rightarrow k_{n+1}(X)$ требованием, чтобы диаграмма

$$\begin{array}{ccc} k_n(X) & \xrightarrow{\sigma} & k_{n+1}(SX) \\ \parallel & & \parallel \\ k_n(X') & \xrightarrow[\cong]{\sigma} & k_{n+1}(SX') \end{array}$$

была коммутативной.

Если (X, A, x_0) — некоторая пунктированная пара, возьмем клеточные эквиваленты $f': A' \rightarrow A$ и $g': X' \rightarrow X$. Пусть $h: A' \rightarrow X'$ — такое клеточное отображение, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{f'} & A \\ h \downarrow & & \cap \\ X' & \xrightarrow{g'} & X \end{array}$$

гомотопически коммутативна. Заменим пространство X' цилиндром отображения M_n , а отображение g' — композицией $g' \cdot r$ ($r: M_n \rightarrow X'$ — естественная проекция). Это позволяет считать, что $A' \subset X'$. Точно так же как выше, показывается, что $\hat{g}': X' \cup CA' \rightarrow$

$X \cup CA$ — слабая гомотопическая эквивалентность. Но тогда из коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} k_n(A) & \xrightarrow{i_*} & k_n(X) & \xrightarrow{j_*} & k_n(X \cup CA) \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ k_n(A') & \xrightarrow{i'_*} & k_n(X') & \xrightarrow{j'_*} & k_n(X' \cup CA') \end{array}$$

вытекает, что k_* удовлетворяет аксиоме точности. Следовательно, k_* является приведенной теорией гомологий на категории $\mathcal{P}\mathcal{T}'$. Очевидно, что k_* удовлетворяет аксиоме слабой гомотопической эквивалентности. Поэтому $\hat{k}_*$ является неприведенной теорией гомологий на $\mathcal{T}'$.

7.69. З а м е ч а н и е. В дальнейшем мы построим две важные геометрические теории гомологий: теорию сингулярных гомологий (глава 10) и теорию бордизмов (глава 12). Из построения этих теорий будет следовать, что они естественным образом определены на всей категории $\mathcal{P}\mathcal{T}'$. Но всякий раз, когда мы имеем теорию гомологий, определенную на $\mathcal{P}\mathcal{T}'$, мы обязаны выяснить, совпадает ли она с описанным выше продолжением из $\mathcal{P}\mathcal{U}'$ в $\mathcal{P}\mathcal{T}'$. Это совпадение будет иметь место, если исходная теория удовлетворяет аксиоме слабой гомотопической эквивалентности. Рассматривая цилиндр отображения M_f слабой гомотопической эквивалентности $f: X \rightarrow Y$ и результирующую точную последовательность

$$\dots \rightarrow h_{n+1}(M_f, X) \rightarrow h_n(X, \mathbb{C}) \xrightarrow{f_*} h_n(Y, \mathbb{C}) \rightarrow h_n(M_f, X) \rightarrow \dots$$

для неприведенной теории h_* , легко вывести, что аксиома слабой гомотопической эквивалентности для h_* равносильна выполнению одного из следующих условий.

7.70. Если $A \subset X$ — корасслоение и пара (X, A) n -связна для любого $n \geq 0$, то $h_*(X, A) = 0$.

7.71. Если пространство X n -связно для любого $n \geq 0$, то для любой точки $x_0 \in X$ гомоморфизм $h_*(\{x_0\}) \rightarrow h_*(X)$ эпиморфен.

7.72. У п р а ж н е н и е. Показать, что функтор

$$\pi_q^S = \text{dir lim } \pi_{q+n}(S^n \wedge \text{---})$$

удовлетворяет аксиоме слабой гомотопической эквивалентности.

7.73. У п р а ж н е н и е. Пусть

$$X_1 \subset X_2 \subset \dots \subset X_n \subset \dots \subset X$$

— такая последовательность подпространств топологического пространства X , что для каждого компактного подпространства $K \subset X$ найдется номер $k \geq 1$, для которого $K \subset X_k$. Тогда можно индуктивно построить такие клеточные эквиваленты $f^k: X'_k \rightarrow X_k$, $k \geq 1$, что X'_k — клеточное подпространство в X'_{k+1} и $f^{k+1}|_{X'_k} = f^k$, $k \geq 1$.

Введем в $X' = \bigcup_{k \geq 1} X'_k$ слабую топологию и обозначим через $f': X' \rightarrow X$ такое непрерывное отображение, что $f'|X'_k = f^k$.

а) Показать, что $f': X' \rightarrow X$ является клеточным эквивалентом для X .

б) Пусть k_* — теория гомологий, удовлетворяющая аксиомам суммы и слабой гомотопической эквивалентности. Показать, что

$$\{l_{k*}\}: \operatorname{dir} \lim k_q(X_k) \rightarrow k_q(X)$$

является изоморфизмом для любого $q \in \mathbb{Z}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В этом приложении мы докажем легко проверяемое условие обращения в нуль группы $\lim^1$.

Пусть

$$G_0 \xleftarrow{j_0} G_1 \xleftarrow{j_1} \dots \leftarrow G_n \xleftarrow{j_n} G_{n+1} \leftarrow \dots$$

— обратная система $\{G_n\}$ абелевых групп, индексированная неотрицательными целыми числами.

7.74. Определение. Говорят, что проективная система $\{G_n\}$ удовлетворяет условию Миттаг-Леффлера, если для каждого $n \geq 0$ найдется такой номер $m(n) \geq n$, что

$$\operatorname{im} [j'_n: G_r \rightarrow G_n] = \operatorname{im} [j_n^{m(n)}: G_{m(n)} \rightarrow G_n]$$

для всех $r \geq m(n)$. Другими словами, образ G_r в G_n стабилизируется, начиная с некоторого r .

7.75. Теорема. Если $\{G_n\}$ удовлетворяет условию Миттаг-Леффлера, то $\lim^1 G_n = 0$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что функция $m(n)$ монотонно возрастает. Мы должны для каждого элемента $f \in \prod_{n \geq 0} G_n$ найти такой элемент $g \in \prod_{n \geq 0} G_n$, что

$$7.76. \quad f(n) = (-1)^n g(n) + (-1)^{n+1} j_n g(n+1)$$

для всех $n \geq 0$.

Случай I. Предположим, что $f(n) \in \operatorname{im} j_n^{m(n)}$ для всех n , и построим $g(n)$ индукцией по n , начиная с $g(0) = 0$. Пусть $g(0)$, $g(1)$, ..., $g(n)$ уже выбраны так, что выполнено условие 7.76, а также условие

$$7.77. \quad g(k) \in \operatorname{im} j_k^{m(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Тогда мы имеем

$$g(n) - (-1)^n f(n) \in \operatorname{im} j_n^{m(n)} = \operatorname{im} j_n^{m(n+1)}.$$

Найдем элемент c из уравнения $g(n) - (-1)^n f(n) = j_n^{m(n+1)}(c)$ и

положим $g(n+1) = j_{n+1}^{m(n+1)}(c)$. Тогда

$$g(n) - (-1)^n f(n) = j_n g(n+1),$$

т. е.

$$f(n) = (-1)^n g(n) + (-1)^{n+1} j_n g(n+1),$$

что завершает шаг индукции.

Случай II. Рассмотрим теперь произвольный элемент f и определим h , полагая

$$h(n) = (-1)^n f(n) + (-1)^{n+1} j_n^{n+1} f(n+1) + \dots + (-1)^{m(n)} j_n^{m(n)} f(m(n)).$$

Тогда

$$(-1)^n h(n) + (-1)^{n+1} j_n h(n+1) \equiv f(n) \pmod{\text{im } j_n^{m(n)}},$$

так что мы свели случай II к случаю I. $\square$

Замечание 1. Пусть $\{G_n, j_n^m: n, m \in \mathbb{N}\}$ — такая обратная система, что каждая группа G_n конечна. Тогда все подгруппы $\text{im}[j_n^r: G_r \rightarrow G_n]$, $r \geq n$, не могут быть различными, и поэтому должен существовать такой номер $m(n) \geq n$, что $\text{im}[j_n^r: G_r \rightarrow G_n] = \text{im}[j_n^{m(n)}: G_{m(n)} \rightarrow G_n]$ для всех $r \geq m(n)$. Значит, в этом случае проективная система удовлетворяет условию Миттаг-Леффлера.

Замечание 2. Пусть X — некоторое топологическое пространство и

$$X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_n \subset \dots \subset X$$

— такая его фильтрация подпространствами X_n , что группы $H^*(X_n)$ конечно порождены. Пусть, далее, k^* — такая теория когомологий, что группа $k^{q-s-1}(S^0)$ конечна всякий раз, когда $\tilde{H}^s(X_n) \neq 0$. Используя спектральную последовательность Атьи — Хирцебруха — Уайтхеда (глава 15) нетрудно показать, что $k^{q-1}(X_n)$ конечна для всех n . Согласно замечанию 1 отсюда следует, что $\lim^1 k^{q-1}(X_n) = 0$ и, значит, $k^q(X) \cong \lim^0 k^q(X_n)$.

ССЫЛКИ НА ЛИТЕРАТУРУ

1. Адамс [10].
2. Дайер [30, 31].
3. Милнор [59].
4. Стинрод, Эйленберг [74].
5. Уайтхед [81].

В настоящей главе мы приступаем к построению теорий гомологий и когомологий. Для этого мы воспользуемся одной замечательной идеей, имеющей своим источником теорему Брауна (глава 9). Эта теорема утверждает, что каждый кофунктор $h: \mathcal{F}\mathcal{W}' \rightarrow \mathcal{A}$, удовлетворяющий аксиоме суммы и некоторому условию, похожему на теорему Майера—Вьеториса, имеет вид $h(X, x_0) = [X, x_0; E, e_0]$ для некоторого фиксированного клеточного пространства $(E, e_0) \in \mathcal{F}\mathcal{W}'$. В частности, если h^* — приведенная теория когомологий, удовлетворяющая аксиоме суммы, то для кофунктора h^n при любом $n \in \mathbb{Z}$ выполнены все условия теоремы Брауна, так что $h^n(-) = [-; E_n, *]$ для некоторого $(E_n, *) \in \mathcal{F}\mathcal{W}'$. Как мы знаем, кофункторы h^n не являются независимыми, они связаны естественными эквивалентностями

$$\begin{array}{ccc} h^r & \xrightarrow{(\sigma^r)^{-1}} & h^{r+1} \circ S \\ \parallel & & \parallel \\ [-; E_r] & & [S(-); E_{r+1}] = [-; \Omega E_{r+1}]. \end{array}$$

Тогда элемент $(\sigma^r)^{-1}[1_{E_r}] \in [E_r, \Omega E_{r+1}]$ представляется таким отображением $e'_r: E_r \rightarrow \Omega E_{r+1}$, что $(e'_r)_* = (\sigma^r)^{-1}$. Пусть $e_r: SE_r \rightarrow E_{r-1}$ — отображение, сопряженное с e'_r . Получающееся семейство $\{E_r, e_r: r \in \mathbb{Z}\}$ является прообразом понятия спектра, строгое определение которого мы дадим ниже.

Имеется и другая причина рассматривать категорию спектров. Как мы знаем, в любой теории гомологий гомоморфизм надстройки $\sigma: h_n(X) \rightarrow h_{n+1}(SX)$ всегда является изоморфизмом. В связи с этим по ряду причин было бы целесообразно так расширить категорию клеточных пространств $\mathcal{F}\mathcal{W}'$, чтобы в этой новой категории функтор надстройки S стал обратимым. Оказывается, что роль такой расширенной категории может выполнять категория спектров. В то же время категория спектров сохраняет многие приятные свойства категории $\mathcal{F}\mathcal{W}'$: любое вложение в ней является корасслоением, имеет место теорема Уайтхеда, существуют кочотные последовательности и т. д. Рассматриваемая в этой книге категория спектров была впервые построена Бордманом. Приведенное здесь описание этой категории принадлежит Адамсу.

8.1. Определение. Спектром E называется такое семейство $\{(E_n, *) : n \in \mathbb{Z}\}$ клеточных пространств, что для всех $n \in \mathbb{Z}$ надстройка SE_n является (или гомеоморфна) клеточным подпространством в E_{n+1} . Подспектр $F \subset E$ состоит из таких клеточных подпространств $F_n \subset E_n$, что $SF_n \subset F_{n+1}$.

8.2. Пример. Если X — произвольное клеточное пространство, то можно определить спектр $E(X)$, полагая

$$E(X)_n = \begin{cases} *, & n < 0, \\ S^n X, & n \geq 0. \end{cases}$$

Вообще говоря, семейство $\{E_n, e_n\}$, которое строится по данной теории когомологий с помощью теоремы Брауна, не является спектром; отображения e_n не обязаны быть гомеоморфизмами пространств SE_n на клеточные подпространства из E_{n+1} . Однако в предыдущих главах мы видели, что любое отображение может быть «превращено» во вложение.

8.3. Предложение. Для любого заданного семейства $\{E_n, e_n\}$ клеточных пространств $(E_n, *)$ и клеточных отображений $e_n: SE_n \rightarrow E_{n+1}$ можно построить спектр $E' = \{E'_n\}$ и гомотопические эквивалентности $r_n: E_n \rightarrow E'_n$, такие, что

$$r_{n+1}|_{SE'_n} = e_n \circ Sr_n,$$

т. е. имеют место коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} SE'_n & \subset & E'_{n+1} \\ \downarrow Sr_n & & \downarrow r_{n+1} \\ SE_n & \xrightarrow{e_n} & E_{n+1}. \end{array}$$

Доказательство. Мы используем еще одну конструкцию «телескопа». Пусть

$$E'_n = E_n \wedge \{n\}^+ \cup \bigcup_{k < n} S^{n-k} E_k \wedge [k, k+1]^+, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где $[x, k+1] \in S^{n-k} E_k \wedge [k, k+1]^+$ отождествляется с

$$[S^{n-k-1} e_k(x), k+1] \in S^{n-k-1} E_{k+1} \wedge [k+1, k+2]^+.$$

Поскольку каждое e_k является клеточным отображением, то все E'_n — клеточные пространства. Определим отображения $r_n: E'_n \rightarrow E_n$, полагая $r_n[x, t] = e_{n-1} \circ Se_{n-2} \circ \dots \circ S^{n-k-1} e_k(x)$, $(x, t) \in S^{n-k} E_k \times [k, k+1]$. Кроме того, зададим отображения $i_n: E_n \rightarrow E'_n$ формулой

$$i_n(x) = [x, n] \in E_n \times \{n\} \subset E'_n.$$

Легко видеть, что $r_n \circ i_n = 1_{E_n}$. Наконец, определим гомотопию $H_n: E'_n \times I \rightarrow E'_n$, полагая

$$H([x, t], s) = \begin{cases} [S^{n-m}e_{m-1} \circ S^{n-m+1}e_{m-2} \circ \dots \circ S^{n-k-1}e_k(x), (1-s)t + sn] & \text{для } [x, t] \in \\ S^{n-k}E_k \wedge [k, k+1]^+, k < n, m \leq (1-s)t + sn \leq m+1, s \in I, \\ k \leq m < n; \\ [x, n] & \text{для } [x, t] \in E_n \wedge \{n\}^+, s \in I. \end{cases}$$

Без труда проверяется, что H непрерывна и $H_0 = 1_{E'_n}$, $H_1 = i_n \circ r_n$. Следовательно, r_n — гомотопическая эквивалентность. Кроме того, SE'_n содержится в E'_{n+1} как клеточное подпространство и $r_{n+1}|SE'_n = e_n \circ Sr_n$. $\square$

8.4. Определим понятие *клетки* спектра E . Существует такой подспектр $F \subset E$, что $F_n = *$ для всех n ; мы обозначим этот подспектр F также через $*$ и назовем его клеткой размерности $-\infty$. Если e_n^d — произвольная d -мерная клетка в E_n (отличная от $*$ при $d=0$), то Se_n^d представляет собой $(d+1)$ -мерную клетку в E_{n+1} , и, вообще, $S^m e_n^d$ есть $(m+d)$ -мерная клетка в E_{n+m} . Клетка e_n^d не может быть более чем d -кратной надстройкой, так что мы можем продолжать эту последовательность назад до тех пор, пока не дойдем до такой клетки $e_{n'}^{d'}$ в $E_{n'}$, что $e_n^d = S^{d-d'}e_{n'}^{d'}$ (в этом случае $n = n' + d - d'$), но $e_{n'}^{d'}$ не является надстройкой ни над какой клеткой из $E_{n'-1}$. Тогда последовательность $e = \{e_{n'}^{d'}, Se_{n'}^{d'}, S^2e_{n'}^{d'}, \dots\}$ будет называться *клеткой размерности $d' - n'$* в E . Таким образом, в каждом клеточном пространстве E_n каждая клетка принадлежит в точности одной клетке из E .

8.5. **Определение.** Спектр E называется *конечным*, если он состоит из конечного числа клеток. Спектр называется *счетным*, если он имеет счетное множество клеток.

Замечание. Спектр E конечен тогда и только тогда, когда существует такое целое число N , что $E_n = S^{n-N}E_N$ для $n \geq N$ и клеточное пространство E_N конечно.

8.6. **Определение.** *Фильтрацией* спектра E называется возрастающая последовательность $\{E^n; n \in \mathbb{Z}\}$ его подспектров, объединение которых совпадает с E .

8.7. **Примеры.** 1) *Фильтрация остовами* $\{E^{(n)}\}$ определяется следующим образом: $E^{(n)}$ есть объединение всех клеток из E размерностей, не превосходящих n . В отличие от случая клеточных пространств остов $E^{(n)}$ может быть нетривиальным для произвольного целого отрицательного n и это обстоятельство мешает применению метода математической индукции к фильтрации остовами.

2) *Фильтрация слоями* $\{E^n\}$ определяется следующим образом: для каждой клетки $e = \{e_n, Se_n, \dots\}$ спектра E можно найти конечный подспектр F спектра E , содержащий клетку e (например,

пусть $F_n \subset E_n$ — клеточное подпространство, состоящее из e_n и всех ее граней; положим тогда $F_m = *$, $m < n$; $F_m = S^{m-n}F_n$, $m \geq n$. Пусть $l(e)$ — наименьшее из чисел клеток во всех таких подспектрах F (в действительности $l(e)$ — число граней клетки e_n). Положим тогда $E^n = *$, $n \leq 0$, $E^n = \{\text{объединение всех клеток с } l(e) \leq n\}$, $n > 0$. Подспектры E^n называются *слоями* спектра E .

8.8. Лемма. *Последовательность $\{E^n\}$ является фильтрацией спектра E .*

Доказательство. Подпространство $E_m^n \subset E_m$ представляет собой объединение всех таких клеток e_m , которые входят в клетки $e = \{e_k, Se_k, \dots\}$ спектра E с $l(e) \leq n$. Пусть $F \subset E$ — некоторый подспектр в E , содержащий клетку e и состоящий, самое большее, из n клеток. Тогда e_m является клеткой пространства $F_m \subset E_m$, и очевидно, что $F_m \subset E_m^n$. Следовательно, каждая грань клетки e_m лежит в E_m^n , так что E_m^n является клеточным подпространством в E_m . Легко видеть, что $SE_m^n \subset E_{m+1}^n$, $E^n \subset E^{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{Z}$ и $\bigcup_n E^n = E$. $\square$

Интуитивно, спектр E строится последовательно слой за слоем. Мы начинаем с $E^1 = *$. Затем мы приклеиваем к пространствам E_m^1 клетки соответствующих размерностей вместе со всеми их надстройками и получаем E^2 . Далее процедура повторяется. Мы будем использовать фильтрацию слоями в доказательствах по индукции.

Для построения категории спектров нужно определить понятие отображения спектров. Очевидное определение оказывается не подходящим для наших целей, поэтому мы назовем эти объекты «функциями».

8.9. Определение. *Функция $f: E \rightarrow F$ из спектра E в спектр F — это семейство $\{f_n: n \in \mathbb{Z}\}$ таких клеточных отображений $f_n: E_n \rightarrow F_n$, что $f_{n+1}|SE_n = Sf_n$. Композиция функций определяется очевидным образом. Вложение $i: F \subset E$ подспектра $F \subset E$ есть функция, и если $g: E \rightarrow G$ — функция, то $g|F = g \circ i$ — также функция.*

8.10. Определение. *Кофинальным подспектром спектра E называется такой его подспектр F , что каждая клетка из E лежит в F ; это означает, что для любой клетки $e_n \subset E_n$ существует такой номер m , что $S^m e_n \subset F_{n+m}$. Очевидно, что если F — кофинальный подспектр и $K_n \subset E_n$ — конечное подпространство, то существует такое m , что $S^m K_n \subset F_{n+m}$.*

8.11. Лемма. *Пересечение двух кофинальных подспектров есть кофинальный подспектр. Если $G \subset F \subset E$ — такие спектры, что F кофинален в E и G кофинален в F , то G кофинален в E . Произвольное объединение кофинальных подспектров есть снова кофинальный подспектр.* $\square$

8.12. Определение. Пусть E, F — спектры. Рассмотрим множество S всех пар вида (E', f') , где $E' \subset E$ — кофинальный подспектр и $f': E' \rightarrow F$ — некоторая функция. Введем на S сле-

дующее отношение эквивалентности: $(E', f') \sim (E'', f'')$ тогда и только тогда, когда существует такая пара (E''', f''') , что $E''' \subset E' \cap E''$, E''' кофинален в E и $f'|_{E'''} = f''' = f''|_{E'''}$. Назовем классы эквивалентности отображениями из E в F ; таким образом, $\text{hom}(E, F) = S/\sim$. Интуитивно, отображения — это функции, определенные лишь на «бесконечном хвосте» каждой клетки.

Следующая лемма понадобится для определения композиции отображений.

8.13. Лемма. Пусть E и F — спектры и $f: E \rightarrow F$ — функция. Если $F' \subset F$ — кофинальный подспектр, то существует такой кофинальный подспектр $E' \subset E$, что $f(E') \subset F'$.

Доказательство. Пусть S — множество всех таких подспектров G спектра E , что $f(G) \subset F'$. Положим $E' = \bigcup_{G \in S} G$. Тогда E'

является подспектром спектра E и $f(E') \subset F'$. Мы должны показать, что E' кофинален. Пусть $e = \{e_n, Se_n, \dots\}$ — некоторая клетка из E и $L \subset E_n$ — некоторое конечное клеточное подпространство, содержащее e_n . В этом случае $f(L)$ содержится в конечном подпространстве K клеточного пространства F_n , и поскольку подспектр $F' \subset F$ кофинален, то найдется такой номер N , что $S^N K \subset F'_{n+N}$. Следовательно, $f(S^N L) \subset F'_{n+N}$. Таким образом, $G = \{S^N L, \dots\}$ является подспектром в E и $f(G) \subset F'$. Значит, $\{S^N e_n, \dots\} \subset E'$, откуда вытекает, что E' кофинален. $\square$

Теперь возможна композиция отображений; мы берем композицию любых композируемых представителей. Существование таких представителей гарантирует лемма 8.13.

В результате мы получаем корректно определенное отображение. Очевидно, что композиция отображений ассоциативна. Функция вложения подспектра $i: F \subset E$ определяет отображение, так что для любого отображения $g: E \rightarrow G$ ограничение $g|_F = g \circ i$ также является отображением.

8.14. Заметим, что в категории $\mathcal{SF}$ спектров и отображений любой спектр эквивалентен любому своему кофинальному подспектру. Действительно, если подспектр $E' \subset E$ кофинален, то вложение $i: E' \rightarrow E$ и тождественная функция $1: E' \rightarrow E'$ определяют такие отображения $i: E' \rightarrow E$ и $f: E \rightarrow E'$ спектров, что $f \circ i = 1_{E'}$, $i \circ f = 1_E$. Следовательно, любые два кофинальных подспектра $E', E'' \subset E$, будучи эквивалентны E , эквивалентны между собой.

Если $E = \{E_n\}$ — спектр и (X, x_0) — некоторое клеточное пространство, то мы можем образовать новый спектр $E \wedge X$: положим $(E \wedge X)_n = E_n \wedge X$ со слабой топологией. Это опять спектр, поскольку $S(E \wedge X)_n = S(E_n \wedge X) = S^1 \wedge (E_n \wedge X) \cong (S^1 \wedge E_n) \wedge X \subset E_{n+1} \wedge X = (E \wedge X)_{n+1}$. Для данного отображения $f: E \rightarrow F$ спектров, представленного парой (E', f') , и отображения $g: K \rightarrow L$ клеточных пространств мы получаем отображение $f \wedge g: E \wedge K \rightarrow F \wedge L$ спектров, представленных парой $(E' \wedge K, f' \wedge g)$, так как $E' \wedge K$ кофинален в $E \wedge K$.

8.15. Определим теперь гомотопии спектров. Гомотопия — это отображение $h: E \wedge I^+ \rightarrow F$. Существуют два отображения $i_0: E \rightarrow E \wedge I^+$, $i_1: E \rightarrow E \wedge I^+$, индуцированные включениями, соответственно, 0 и 1 в I^+ . Говорят, что два отображения спектров $f_0, f_1: E \rightarrow F$ гомотопны, если существует гомотопия $h: E \wedge I^+ \rightarrow F$ с $h \cdot i_0 = f_0$, $h \cdot i_1 = f_1$. Мы будем обозначать $h \cdot i_0$ через h_0 и $h \cdot i_1$ через h_1 .

В терминах кофинальных подспектров два отображения $f_0, f_1: E \rightarrow F$, представленные парами (E'_0, f'_0) , (E'_1, f'_1) соответственно, гомотопны, если существует кофинальный подспектр $E'' \subseteq E'_0 \cap E'_1$ и функция $h'': E'' \wedge I^+ \rightarrow F$ такая, что $h''_0 = f'_0|_{E''}$, $h''_1 = f'_1|_{E''}$.

Гомотопность является отношением эквивалентности, так что мы можем определить множество $[E, F]$ как множество классов эквивалентности отображений $f: E \rightarrow F$. Композиция отображений спектров задает композицию гомотопических классов.

Таким образом, мы определили категорию $\mathcal{SP}$ спектров и отображений спектров, а также ассоциированную с ней гомотопическую категорию $\mathcal{SP}'$. Имеет место функтор $\mathcal{PW} \rightarrow \mathcal{SP}$, задаваемый соответствиями $(X, x_0) \mapsto E(X)$ для $(X, x_0) \in \mathcal{PW}$ и $f \mapsto E(f)$, где $E(f)_n = S^n f: S^n X \rightarrow S^n Y$, $n \geq 0$, для любого отображения $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$. Этот функтор вкладывает $\mathcal{PW}$ в $\mathcal{SP}$. В случаях, когда нет опасности путаницы, мы будем обозначать спектр $E(X)$ просто через X .

8.16. Замечание. Хотя для клеточных пространств X и Y описанный выше функтор инъективно отображает $\text{hom}_{\mathcal{PW}}(X, Y)$ в $\text{hom}_{\mathcal{SP}}(E(X), E(Y))$, неверно, что индуцированный функтор вкладывает $\text{hom}_{\mathcal{PW}}(X, Y) = [X, Y]$ в $\text{hom}_{\mathcal{SP}}(E(X), E(Y)) = [E(X), E(Y)]$; можно найти гомотопию $H: E(X) \wedge I^+ \rightarrow E(Y)$, связывающую $E(f_0)$ и $E(f_1)$, которая не имеет вида $E(K)$ ни для какой гомотопии $K: X \wedge I^+ \rightarrow Y$ из f_0 в f_1 . Например, может случиться, что $Sf_0 \simeq Sf_1$, хотя $f_0 \not\simeq f_1$.

8.17. Для данного отображения $f: E \rightarrow F$ спектров построим его конус $F \cup_f CE$. Снабдим единичный отрезок I отмеченной точкой 0 и определим CE как $E \wedge I$. Зададим $F \cup_f CE$, полагая $(F \cup_f CE)_n = F_n \cup_{f'_n} (E'_n \wedge I)$, где пара (E', f') представляет отображение f . Если (E'', f'') — другой представитель отображения f , то $\{F_n \cup_{f'_n} (E'_n \wedge I)\}$ и $\{F_n \cup_{f''_n} (E''_n \wedge I)\}$ имеют общий кофинальный подспектр $\{F_n \cup_{f'''_n} (E'''_n \wedge I)\}$ и, следовательно, эквивалентны.

Для любого спектра $E = \{E_n\}$ определим спектр ΣE , полагая $\Sigma E_n = E_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$. Для любой функции $f: E \rightarrow F$ зададим функцию $\Sigma f: \Sigma E \rightarrow \Sigma F$ формулой $(\Sigma f)_n = f_{n+1}$. Тогда для любого отображения $f: E \rightarrow F$, представленного парой (E', f') , мы можем определить $\Sigma f: \Sigma E \rightarrow \Sigma F$ как отображение, представимое парой $(\Sigma E', \Sigma f')$. Соответствие $\Sigma: \mathcal{SP} \rightarrow \mathcal{SP}$ является функтором и индуцирует функтор на $\mathcal{SP}'$, поскольку из $f_0 \simeq f_1$ следует, что

$\Sigma f_0 \simeq \Sigma f_1$. Можно итерировать функтор Σ : $\Sigma^n = \Sigma \cdot \Sigma^{n-1}$, $n \geq 2$. Кроме того, функтор Σ допускает обратный функтор Σ^{-1} , определяемый соответствиями $(\Sigma^{-1}E)_n = E_{n-1}$, $(\Sigma^{-1}f)_n = f_{n-1}$. Ясно, что $\Sigma^n \cdot \Sigma^m = \Sigma^{n+m}$ для всех целых чисел m, n . Позже будет установлено, что ΣE и $E \wedge S^1$ имеют один и тот же гомотопический тип, откуда будет следовать, что функтор надстройки обратим в $\mathcal{SP}$. А пока займемся изучением общих свойств категорий $\mathcal{SP}$ и $\mathcal{SP}'$.

В категории $\mathcal{SP}$ определено понятие суммы: для данного семейства спектров $\{E^\alpha: \alpha \in A\}$ положим $\left(\bigvee_\alpha E^\alpha\right)_n = \bigvee_\alpha E_n^\alpha$. Так как

$$S\left(\bigvee_\alpha E_n^\alpha\right) = \bigvee_\alpha S E_n^\alpha \subset \bigvee_\alpha E_{n+1}^\alpha, \text{ то это спектр.}$$

8.18. Предложение. Для любого семейства спектров $\{E^\alpha: \alpha \in A\}$ включения $i_\beta: E^\beta \rightarrow \bigvee_\alpha E^\alpha$ индуцируют биекции

$$\{\text{hom}(i_\alpha, 1)\}: \text{hom}_{\mathcal{SP}}\left(\bigvee_\alpha E^\alpha, F\right) \rightarrow \prod_\alpha \text{hom}_{\mathcal{SP}}(E^\alpha, F),$$

$$\{i_\alpha^*\}: \left[\bigvee_\alpha E^\alpha, F\right] \rightarrow \prod_\alpha [E^\alpha, F]$$

для любого $F \in \mathcal{SP}$.

С помощью процедуры приклеивания клеток спектры можно строить так же, как клеточные пространства. Пусть $\{E^n\}$ и $\{E^{(n)}\}$ — фильтрации, соответственно, слоями и остовами. Пусть $e = \{e_n, S e_n, \dots\}$ — некоторая d -мерная клетка в E ; обозначим через $f: S^{n+d-1} \rightarrow E_n$ приклеивающее отображение для e_n . Пусть S^0 — спектр $E(S^0)$; тогда спектр F , задаваемый соотношениями

$$F_m = \begin{cases} *, & m < n, \\ S^{m+d-1}, & m \geq n, \end{cases}$$

является кофинальным подспектром в $\Sigma^{d-1}S^0$. Таким образом, семейство $\{f, Sf, \dots\}$ определяет отображение $f: \Sigma^{d-1}S^0 \rightarrow E$, которое мы назовем приклеивающим отображением для e .

8.19. Предложение. Пусть E — некоторый спектр.

а) Для любого $n \in \mathbb{Z}$ обозначим через $\{e_\alpha: \alpha \in J_n\}$ множество клеток из $E^{(n)} - E^{(n-1)}$ и для любого $\alpha \in J_n$ обозначим через $f_\alpha: \Sigma^{n-1}S^0 \rightarrow E$ приклеивающее отображение для клетки e_α . Тогда $g = \{f_\alpha\}: \bigvee_\alpha \Sigma^{n-1}S^0 \rightarrow E$ пропускается через $E^{(n-1)}$ и $E^{(n)} = E^{(n-1)} \cup_g \bigvee_\alpha \Sigma^{n-1}S^0$.

б) Для любого $n \in \mathbb{Z}$ обозначим через $\{e_\alpha: \alpha \in A_n\}$ множество клеток из $E^n - E^{n-1}$ и для любого $\alpha \in A_n$ обозначим через $f_\alpha: \Sigma^{d_\alpha-1}S^0 \rightarrow E$ приклеивающее отображение клетки e_α . Тогда $g =$

$$\{f_\alpha\}: \bigvee_\alpha \Sigma^{d_\alpha-1} S^0 \rightarrow E \text{ пропускается через } E^{n-1} \text{ и}$$

$$E^n = E^{n-1} \cup_g C\left(\bigvee_\alpha \Sigma^{d_\alpha-1} S^0\right).$$

Доказательство очевидно. $\square$

Подобно вложениям клеточных пространств, вложения спектров обладают свойством гомотопического продолжения

8.20. Лемма. Пусть E и H — некоторые спектры, F — подспектр в E и G — кофинальный подспектр в $E \wedge \{0\}^+ \cup F \wedge I^+$. Для любой функции $g: G \rightarrow H$ найдутся кофинальный подспектр $K \subset E \wedge I^+$, содержащий G , и функция $k: K \rightarrow H$, продолжающая g . Кроме того, если $G = E \wedge \{0\}^+ \cup F \wedge I^+$, то можно взять $K = E \wedge I^+$.

Доказательство. Построим $K^n \subset E^n \wedge I^+$ и $k|_{K^n}$ индукцией по n . Так как $G^0 = E^0 = *$, то можно взять $K^0 = E^0 \wedge I^+$ и $k|_{K^0} = *$. Предположим, что уже построены слой K^n и функция $k|_{K^n}$, причем выполнены следующие условия:

- i) K^n кофинален в $E^n \wedge I^+$;
- ii) $G^n \subset K^n$;
- iii) $k|_{G^n} = g|_{G^n}$.

Для каждой клетки $e = \{e_m, Se_m, \dots\}$ из $E^{n+1} - (E^n \cup F^{n+1})$ можно найти такой номер N , что клетки из $S^N e_m \wedge I^+$ приклеены к K_{m+N}^n , а функция g определена на $S^N e_m \wedge \{0\}^+$. Тогда мы имеем отображение $S^N e_m \wedge \{0\}^+ \cup S^N e_m \wedge I^+ \rightarrow H_{m+N}$. Согласно предложению 6.5, оно продолжается до отображения $S^N e_m \wedge I^+ \rightarrow H_{m+N}$. Следовательно, мы можем добавить к $K^n \cup G^{n+1}$ клеточное подпространство $S^N e_m \wedge I^+$ и все его надстройки. Выполнив указанную процедуру для всех клеток из $E^{n+1} - (E^n \cup F^{n+1})$, мы получим слой K^{n+1} и функцию $k|_{K^{n+1}}$, удовлетворяющие условиям i) — iii). Это завершает шаг индукции. В результате мы имеем спектр $K = \bigcup_{n \geq 0} K^n$ и функцию $k: K \rightarrow H$, продолжающую g . Последнее

утверждение очевидно, для его доказательства достаточно применить предложение 6.5 ко всем пространствам $E_n \wedge I^+$, $n \geq 0$. $\square$

8.21. Определим гомотопические группы спектра, полагая $\pi_n(E) = [\Sigma^n S^0, E]$, $n \in \mathbb{Z}$. Можно также дать альтернативное описание групп $\pi_n(E)$. С этой целью заметим, что кофинальные подспектры $\Sigma^n S^0$ имеют вид $\Sigma^{n-r} E(S^r)$, $r \geq 0$. Функция $f: \Sigma^{n-r} E(S^r) \rightarrow E$ — это некоторое отображение $f: S^r \rightarrow E_{r-n}$ вместе со всеми своими надстройками $S^s f: S^{r+s} \rightarrow S^s E_{r-n} \subset E_{r+s-n}$. Легко видеть, что группы $\pi_{k+n}(E_k, *)$ ($k \geq \min(2, 2-n)$) и морфизмы $\pi_{k+n}(E_k, *) \xrightarrow{\Sigma} \pi_{k+n+1}(SE_k, *) \rightarrow \pi_{k+1+n}(E_{k+1}, *)$ образуют прямую систему абелевых групп. Зададим отображение

$$\alpha: [\Sigma^n S^0, E] \rightarrow \text{dir lim } \pi_{k+n}(E_k, *),$$

полагая $\alpha[\Sigma^{n-r} E(S^r), f] = \{[f]\}$. Очевидно, что α сюръективно. Пусть $\{[f]\} = 0$ в $\text{dir lim } \pi_{k+n}(E_k, *)$. Это означает, что для неко-

того s отображение $S^s f$ нульгомотопно; обозначим через H : $S^{r+s} \wedge I^+ \rightarrow E_{r+s-n}$ соответствующую гомотопию. Тогда $\{\Sigma^{n-r-s}(S^{r+s}) \wedge I^+, H\}$ является нульгомотопией отображения спектров $\{\Sigma^{n-r}E(S^r), f\}$, так что α инъективно. Следовательно, мы имеем

$$\pi_n(E) \cong \operatorname{dir} \lim \pi_{n+k}(E_k, *), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Нижe (см. 8.27) мы дадим еще одно независимое доказательство того, что $\pi_n(E)$ — группа.

Предостережение. В данном случае нужно тщательно различать спектр $E(X)$ и клеточное пространство X . В самом деле, $\pi_n(E(X)) \cong \operatorname{dir} \lim \pi_{n+k}(S^k X, *) = \pi_n^S(X)$ (см. теорему 6.28 и далее). Но стабильная гомотопическая группа $\pi_n^S(X)$ пространства X может существенно отличаться от $\pi_n(X, x_0)$.

Разумеется, любое отображение спектров $f: E \rightarrow F$ индуцирует гомоморфизм $f_*: \pi_n(E) \rightarrow \pi_n(F)$, $n \in \mathbb{Z}$. Назовем f *слабой гомотопической эквивалентностью*, если f_* — изоморфизм для любого $n \in \mathbb{Z}$. В категории спектров имеет место теорема Уайтхеда, доказательство которой формально аналогично соответствующему доказательству для клеточных пространств.

Докажем сначала аналог теоремы 6.30.

8.22. Лемма. Пусть задана коммутативная диаграмма спектров и функций (рис. 18), в которой f — слабая гомотопическая эквивалентность.

Тогда можно найти такой кофинальный подспектр $B' \subset B$ и функции $h': B' \rightarrow C$, $k: B' \wedge I^+ \rightarrow D$, что

- i) $A \subset B'$, ii) $h'|_A = g$,
- iii) $(k)_0 = h|_{B'}$, iv) $(k)_1 = f \cdot h'$,

v) k неподвижна на A , т. е. $k(a, t)$ не зависит от t при $a \in A$.

Доказательство. Рассмотрим вначале один частный случай. Пусть $A \subset \Sigma^n S^0$, $B \subset C \Sigma^n S^0$, $A \subset B$. Тогда найдется такой номер N , что $g_k = S^{k+N} g_{-N}$ для всех $k \geq -N$; то же самое верно и для функции h . Пара $(S^{k+N} h_{-N}, S^{k+N} g_{-N})$ определяет элемент группы $\operatorname{dir} \lim \pi_{k+n+1}(M_{f_k}, C_k, *)$. Так как последовательность

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \operatorname{dir} \lim \pi_{k+n}(C_k, *) &\xrightarrow{\operatorname{dir} \lim f_{k*}} \operatorname{dir} \lim \pi_{k+n}(D_k, *) \rightarrow \\ &\operatorname{dir} \lim \pi_{k+n}(M_{f_k}, C_k, *) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

точна, то $\operatorname{dir} \lim \pi_{k+n+1}(M_{f_k}, C_k, *) = 0$ и, значит, $\{(h_k, g_k)\} = 0$. Следовательно, для некоторого номера r найдутся такие отображения $h'_r: D^{n+r+1} \rightarrow C_r$ и гомотопия $k_r: D^{n+r+1} \wedge I^+ \rightarrow D_r$, что $h'_r|_{S^{n+r}} = S^{r+N} g_{-N}$, а k_r является гомотопией $\operatorname{rel} S^{n+r}$, связываю-

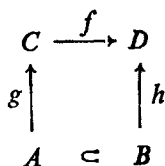


Рис. 18.

шей $S^{r+N}h_{-N}$ и $f_r \cdot h'_r$. Положим тогда

$$B'_m = \begin{cases} S^{m+n}, & -N \leq m < r, \\ D^{m+n+1}, & m \geq r, \end{cases} \quad h'_m = \begin{cases} g_m, & -N \leq m < r, \\ S^{m-r}h'_r, & m \geq r \end{cases}$$

и

$$k_m(x, t) = \begin{cases} f_m \circ g_m(x), & -N \leq m < r, \\ S^{m-r}k_r(x, t), & m \geq r. \end{cases}$$

Без труда проверяется, что B' кофинален в B и что $A \subset B'$.

Доказательство общего случая теперь формально совпадает с доказательством теоремы 6.30. Действительно, рассмотрим множество $\mathcal{S}$ троек (B', h', k) , удовлетворяющих условиям i) – v). Применяя лемму Цорна, найдем в $\mathcal{S}$ максимальный элемент (B', h', k) . Но тогда из разобранных выше частного случая вытекает, что B' кофинален в B . $\square$

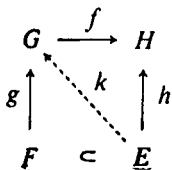


Рис. 19.

8.23. Следствие. Пусть задана коммутативная диаграмма спектров и отображений (рис. 19). Если f — слабая гомотопическая эквивалентность, то найдется такое отображение $k: E \rightarrow G$, что $k|_F = g$ и $f \circ k \simeq h \text{ rel } F$.

Доказательство. Выберем кофинальные подспектры $E' \subset E$, $G' \subset G$, $F' \subset F \cap E'$ и функции $g': F' \rightarrow G' \subset G$, $f': G' \rightarrow H$, $h': E' \rightarrow H$, представляющие отображения g , f и h соответственно. Применяя к нашей диаграмме лемму 8.22, найдем такой кофинальный подспектр $E'' \subset E'$ с $F' \subset E''$ и функции $k': E'' \rightarrow G'$, $\hat{k}: E'' \wedge I^+ \rightarrow H$, что $k'|_{F'} = g'$ и $\hat{k}$ является гомотопией $\text{rel } F'$, связывающей h' и $f' \circ k'$. Тогда $k = \{E'', k'\}$. $\square$

8.24. Следствие. Пусть $f: E \rightarrow F$ — отображение спектров, являющееся слабой гомотопической эквивалентностью. Тогда

$$f_*: [G, E] \rightarrow [G, F]$$

— биекция для любого спектра G .

Доказательство формально не отличается от доказательства теоремы 6.31. $\square$

8.25. Теорема. Отображение спектров является слабой гомотопической эквивалентностью тогда и только тогда, когда оно — гомотопическая эквивалентность.

Доказательство формально совпадает с доказательством теоремы 6.32. $\square$

Вооружившись теоремой 8.25, докажем теперь, что спектры ΣE и $E \wedge S^1$ имеют один и тот же гомотопический тип.

8.26. Теорема. В категории $\mathcal{SF}'$ существует эквивалентность $E \wedge S^1 \rightarrow \Sigma E$, естественная относительно отображений спектра E .

Доказательство. Рассмотрим «телескоп» E' , построенный в 8.3:

$$E'_n = E_n \wedge \{n\}^+ \cup \bigcup_{k < n} S^{n-k} E_k \wedge [k, k+1]^+, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Проекции $r_n: E'_n \rightarrow E_n$ определяют функцию из E' в E и, следовательно, отображение спектров $r: E' \rightarrow E$. Хотя вложения $i_n: E_n \rightarrow E'_n$ и не задают функций из E в E' , тем не менее для каждого n отображения i_n являются гомотопически обратными к r_n , откуда вытекает, что $r_*: \pi_n(E') \rightarrow \pi_n(E)$ — изоморфизм для всех $n \in \mathbb{Z}$. Таким образом, по теореме 8.25 отображение r является гомотопической эквивалентностью.

Построим теперь гомотопическую эквивалентность $f: E' \wedge S^1 \rightarrow \Sigma E$. С этой целью возьмем отображение $v': S^1 \rightarrow S^1$ с $(v')^2 = 1$ (см. п. 2.22) и следующим образом определим гомотопию $H: (S^1 \wedge S^1) \times I \rightarrow S^1 \wedge S^1$. Пусть $\alpha: (I^2, \bar{I}^2) \rightarrow (D^2, S^1)$ — гомеоморфизм, получающийся переносом центра квадрата в начало координат и последующей проекцией по радиусам. Зададим гомотопию $K: (D^2 \times I, S^1 \times I) \rightarrow (D^2, S^1)$, полагая $K(x, y, t) = (x \cos(\pi t/2) - y \sin(\pi t/2), x \sin(\pi t/2) + y \cos(\pi t/2))$. Тогда $\alpha^{-1} \circ K_t \circ \alpha$ является гомотопией квадрата $(I^2, \bar{I}^2)$ в самого себя. Следовательно, если отождествить $S^1 \wedge S^1$ с $I \times I / I \times \bar{I} \cup \bar{I} \times I$, то $\alpha^{-1} K_t \alpha$ индуцирует гомотопию $H: (S^1 \wedge S^1) \times I \rightarrow S^1 \wedge S^1$. Непосредственно проверяется, что $H_0 = 1$ и $H_1[x, y] = [v'(y), x]$. Определим теперь отображение

$$f_n: E'_n \wedge S^1 \rightarrow E_{n+1},$$

полагая

$$f_n[\xi, n, y] = [(v')^n(y), \xi] \in S^1 \wedge E_n \subset E_{n+1}$$

для $\xi \in E_n, y \in S^1$,

$$f_n[s, x, \xi, m+t, y] = [s, H(x, (v')^m(y), t), \xi] \in S^{n-m+1} E_m \in E_{n+1}$$

для $s \in S^{n-m-1}, x, y \in S^1, \xi \in E_m, 0 \leq t \leq 1$. Легко видеть, что f_n непрерывно и $Sf_n = f_{n+1}|S(E'_n \wedge S^1)$. Таким образом, мы получаем функцию $f: E' \wedge S^1 \rightarrow \Sigma E$.

Рассмотрим теперь отображения $g_n: SE_n \rightarrow E'_n \wedge S^1$, заданные формулой $g_n[x, \xi] = [\xi, n, (v')^n(x)]$, $\xi \in E_n, x \in S^1$. Так как $g_n|S^2 E_{n-1} \simeq Sg_{n-1}$, $f_n \circ g_n = 1$, $g_n \circ f_n \simeq 1$, то $f_*: \pi_n(E' \wedge S^1) \rightarrow \pi_n(\Sigma E)$ — изоморфизм для любого $n \in \mathbb{Z}$. Следовательно, по теореме 8.25 отображение f является гомотопической эквивалентностью. Таким образом, мы имеем $E \wedge S^1 \simeq E' \wedge S^1 \simeq \Sigma E$. Очевидно, что r и f естественны относительно отображений спектра E . $\square$

Замечание. Доказать это утверждение «в лоб», отыскивая гомотопически обратные для отображений r и f , по-видимому, очень трудно. Таким образом, теорема 8.25 играет в приведенном доказательстве ключевую роль.

8.27. Следствие. Каждое множество $[E, F]$ можно снабдить структурой абелевой группы так, что композиция превращается в билинейное отображение

Доказательство. Так как функтор Σ обратим, то $[E, F] \rightarrow [\Sigma E, \Sigma F]$ — взаимно однозначное соответствие. Кроме того, по теореме 8.26 существует взаимно однозначное соответствие $[\Sigma E, \Sigma F] \rightarrow [E \wedge S^1, F \wedge S^1]$. Следовательно, отображение

$$\sigma: [E, F] \rightarrow [E \wedge S^1, F \wedge S^1],$$

задаваемое формулой $\sigma([f]) = [f \wedge 1_{S^1}]$, является биекцией. Но тогда

$$\sigma^2: [E, F] \rightarrow [E \wedge S^2, F \wedge S^2]$$

— также биекция. Пусть теперь $\mu': S^2 \rightarrow S^2 \vee S^2$ — коумножение на сфере S^2 . Нетрудно видеть, что композиция

$$E \wedge S^2 \xrightarrow{1 \wedge \mu'} E \wedge (S^2 \vee S^2) \cong (E \wedge S^2) \vee (E \wedge S^2)$$

превращает $E \wedge S^2$ в гомотопически коммутативную H -когруппу в категории спектров. Поэтому остается лишь показать, что структура H -когруппы на спектре $E \wedge S^2$ индуцирует структуру группы в множестве гомотопических классов $[E \wedge S^2, F \wedge S^2]$, а это делается точно так же, как для топологических пространств (см. п. 2.22). $\square$

8.28. Определение. Для любого отображения спектров $f: E \rightarrow F$ последовательность

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{f} F \cup_f CE$$

называется *специальной корасслоенной последовательностью*¹⁾. Последовательность спектров и их отображений

$$G \xrightarrow{g} H \xrightarrow{h} K$$

называется *общей корасслоенной последовательностью* или просто *корасслоенной последовательностью*, если существует гомотопически коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow{g} & H & \xrightarrow{h} & K \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\ E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{j} & F \cup_f CE \end{array}$$

в которой α, β, γ суть гомотопические эквивалентности.

¹⁾ Здесь j есть очевидная функция, порожденная отображениями пространств j из предложения 2.35. — Прим. ред

8.29. Замечание. Без ограничения общности можно считать, что отображение f в диаграмме 8.28 является вложением спектров. В самом деле, пусть пара $\{E', f'\}$ представляет отображение f . Тогда цилиндр отображения $M_f = \{F_n \cup E'_n \wedge I^+\}$ имеет гомотопический тип спектра F и содержит E' в качестве подспектра.

8.30. Предложение. Любая пара соседних отображений в последовательности

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} F \cup_i CE \xrightarrow{k'} E \wedge S^1 \xrightarrow{f \wedge 1} F \wedge S^1$$

образует корасслоенную последовательность¹⁾.

Доказательство, по существу, совпадает с доказательством леммы 2.40.

8.31. Лемма. Пусть задана гомотопически коммутативная диаграмма спектров и их отображений (рис. 20), строки которой являются корасслоенными последовательностями. Тогда найдется такое отображение спектров $\gamma: K \rightarrow K'$, что результирующая диаграмма по-прежнему гомотопически коммутативна.

$$\begin{array}{ccccccc} G & \xrightarrow{g} & H & \xrightarrow{h} & K & \xrightarrow{k} & G \wedge S^1 \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \alpha \wedge 1 \\ G' & \xrightarrow{g'} & H' & \xrightarrow{h'} & K' & \xrightarrow{k'} & G' \wedge S^1 \end{array}$$

Рис. 20.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что строки данной коммутативной диаграммы являются специальными корасслоенными последовательностями (т. е. $K = H \cup_g CG$, $K' = H' \cup_{g'} CG$, h, h' — вложения). Более того, согласно п. 8.29 можно предположить даже, что g — вложение спектров. Выберем представителей (B, β') для β , (A', f') для g' и (A, α') для α так, чтобы $g(A) \subset B$ и $\alpha'(A) \subset A'$. Тогда мы получим гомотопически коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{g} & B & \longrightarrow & B \cup_g CA & \longrightarrow & A \wedge S^1 \\ \downarrow \alpha' & & \downarrow \beta' & & \downarrow \gamma' & & \downarrow \alpha' \wedge 1 \\ A' & \xrightarrow{f'} & H' & \longrightarrow & H' \cup_{f'} CA' & \longrightarrow & A' \wedge S^1, \end{array}$$

строки которой являются корасслоенными последовательностями и g — вложение. По лемме 8.20 найдется такая функция $\beta'': B \rightarrow H'$, что $\beta'' \circ g = f' \circ \alpha'$ и $\beta'' \simeq \beta'$. Определим функцию γ' , полагая $\gamma'|_B = \beta''$ и $\gamma'|_{CA} = \alpha'$: $CA \rightarrow CA'$. Если заменить β' функцией β'' , то включение последней в диаграмму делает ее строго коммутативной. Следовательно, диаграмма останется гомотопически коммутативной даже при наличии функции β' . $\square$

¹⁾ Здесь k' порождается отображениями k из леммы 2.36. — Прим. ред.

8.32. Предложение. Пусть $G \xrightarrow{g} H \xrightarrow{h} K$ — некоторая корасслоенная последовательность. Тогда для любого спектра E последовательности

$$[E, G] \xrightarrow{g_*} [E, H] \xrightarrow{h_*} [E, K],$$

$$[G, E] \xleftarrow{g^*} [H, E] \xleftarrow{h^*} [K, E]$$

точны.

Доказательство. i) Так как $h \circ g \simeq 0$, то $h_* \circ g_* = 0$. Рассмотрим теперь такое отображение спектров $f: E \rightarrow H$, что $h_*[f] = 0$; применим лемму 8.31 к диаграмме

$$\begin{array}{ccccccc} E & \longrightarrow & E \wedge I & \longrightarrow & E \wedge S^1 & \xrightarrow{1} & E \wedge S^1 \\ f \downarrow & & \downarrow \bar{h} & & \downarrow k & & \downarrow f \wedge 1 \\ H & \xrightarrow{h} & K & \longrightarrow & G \wedge S^1 & \xrightarrow{g \wedge 1} & H \wedge S^1, \end{array}$$

в которой $\bar{h}: E \wedge I \rightarrow K$ представляет собой нульгомотопию композиции $h \circ f$. В результате мы получим такое отображение $k: E \wedge S^1 \rightarrow G \wedge S^1$, что $(g \wedge 1) \circ k \simeq f \wedge 1$. Естественная эквивалентность

$$\sigma: [E, G] \rightarrow [E \wedge S^1, G \wedge S^1]$$

доставляет нам отображение $k': E \rightarrow G$ с $k \simeq k' \wedge 1$. Но тогда $(g \circ k') \wedge 1 = (g \wedge 1) \circ (k' \wedge 1) \simeq (g \wedge 1) \circ k \simeq f \wedge 1$. Так как $\sigma: [E, H] \rightarrow [E \wedge S^1, H \wedge S^1]$ инъективно, то отсюда следует, что $g \circ k' \simeq f$, т. е. $g_*[k'] = [f]$.

ii) Как и выше, равенство $g^* \circ h^* = 0$ следует из $h \circ g \simeq 0$. Пусть $f: H \rightarrow E$ таково, что $g^*[f] = 0$. Применяя лемму 8.31 к диаграмме

$$\begin{array}{ccccccc} G & \xrightarrow{g} & H & \xrightarrow{h} & K & \longrightarrow & G \wedge S^1 \\ & & \downarrow f & & \downarrow f' & & \\ * & \longrightarrow & E & \xrightarrow{1} & E & \longrightarrow & *, \end{array}$$

мы получим такое отображение $f': K \rightarrow E$, что $f' \circ h \simeq f$. Следовательно, $h^*[f'] = [f]$. $\square$

Таким образом, в категории спектров $\mathcal{S}\mathcal{S}'$ два сорта последовательностей — корасслоенная последовательность 2.41 и расслоенная последовательность 2.55 — совпадают.

8.33. Теперь мы в состоянии определить (приведенные) теории гомологий и когомологий, ассоциированные с произвольным спек-

ром E . Для любого $(X, x_0) \in \mathcal{F}\mathcal{W}'$ и $n \in \mathbb{Z}$ положим

$$E_n(X) = \pi_n(E \wedge X) = [\Sigma^n S^0, E \wedge X],$$

$$E^n(X) = [E(X), \Sigma^n E] \cong [\Sigma^{-n} S^0 \wedge X, E].$$

Если $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ — какое-либо непрерывное отображение, то, по определению, $E_n(f) = (1 \wedge f)_*$, $E^n(f) = E(f)^*$. Зададим гомоморфизм $\sigma_n: E_n(X) \rightarrow E_{n+1}(SX)$ как композицию

$$E_n(X) = [\Sigma^n S^0, E \wedge X] \xrightarrow{\Sigma} [\Sigma^{n+1} S^0, \Sigma E \wedge X] \xrightarrow{\cong} [\Sigma^{n+1} S^0, E \wedge S^1 \wedge X] = E_{n+1}(SX).$$

Очевидно, что σ_n — естественная эквивалентность. И, наконец, определим $\sigma^n: E^{n+1}(SX) \rightarrow E^n(X)$ как композицию

$$E^{n+1}(SX) = [E(SX), \Sigma^{n+1} E] \xrightarrow{i^*} [\Sigma E(X), \Sigma^{n+1} E] \xrightarrow{\Sigma^{-1}} [E(X), \Sigma^n E] = E^n(X).$$

Здесь мы использовали тот факт, что $E(SX)$ является кофинальным подспектром в $\Sigma E(X)$, и, значит, вложение $i: E(SX) \rightarrow \Sigma E(X)$ индуцирует изоморфизм

$$i^*: [\Sigma E(X), \Sigma^{n+1} E] \xrightarrow{\cong} [E(SX), \Sigma^{n+1} E].$$

Легко видеть, что σ^n — естественная эквивалентность.

Пусть (X, A, x_0) — произвольная пунктированная клеточная пара. Так как

$$E_n \wedge (X \cup CA) \cong (E_n \wedge X) \cup C(E_n \wedge A), \quad n \in \mathbb{Z},$$

то

$$E \wedge A \xrightarrow{1 \wedge i} E \wedge X \xrightarrow{1 \wedge j} E \wedge (X \cup CA)$$

является корасслоенной последовательностью. Но тогда, согласно предложению 8.32, имеет место точная последовательность

$$[\Sigma^n S^0, E \wedge A] \xrightarrow{(1 \wedge j)_*} [\Sigma^n S^0, E \wedge X] \xrightarrow{(1 \wedge i)_*} [\Sigma^n S^0, E \wedge (X \cup CA)].$$

По определению функтора E_n , эта последовательность есть не что иное, как

$$E_n(A) \xrightarrow{i_*} E_n(X) \xrightarrow{j_*} E_n(X \cup CA).$$

Таким образом, E_* является теорией гомологий на категории $\mathcal{F}\mathcal{W}'$.

Поскольку

$$S^n(X \cup CA) \cong S^n X \cup C(S^n A), \quad n \in \mathbb{Z},$$

то

$$E(A) \xrightarrow{E(j)} E(X) \xrightarrow{E(i)} E(X \cup CA)$$

— корасслоенная последовательность. Поэтому в силу предложения 8.32 имеет место точная последовательность

$$[E(A), \Sigma^n E] \xrightarrow{E(j)^*} [E(X), \Sigma^n E] \xrightarrow{E(i)^*} [E(X \cup CA), \Sigma^n E].$$

Но, по определению функтора E^n , эта последовательность есть не что иное, как

$$E^n(A) \xleftarrow{i^*} E^n(X) \xleftarrow{j^*} E^n(X \cup CA).$$

Таким образом, E^* является теорией когомологий на категории $\mathcal{F}\mathcal{U}'$.

Так как для любого семейства $\{X_\alpha: \alpha \in A\}$ клеточных пространств имеет место гомеоморфизм $S^n\left(\bigvee_\alpha X_\alpha\right) \cong \bigvee_\alpha S^n X_\alpha$, и, значит, $E\left(\bigvee_\alpha X_\alpha\right) \cong \bigvee_\alpha E(X_\alpha)$, то из предложения 8.18 следует, что

$$\{i_\alpha^*\}: E^n\left(\bigvee_\alpha X_\alpha\right) \rightarrow \prod_\alpha E^n(X_\alpha)$$

— изоморфизм для всех $n \in \mathbb{Z}$. Другими словами, теория когомологий E^* удовлетворяет аксиоме суммы.

Чтобы установить аналогичный результат для теории гомологий E_* , нам понадобится следующая лемма.

8.34. Лемма. Пусть E — конечный спектр и $\{F^\alpha: \alpha \in A\}$ — такое направленное по включению множество подспектров спектра F , что $\bigcup_\alpha F^\alpha = F$. Тогда включения $i_\alpha: F^\alpha \rightarrow F$ индуцируют изоморфизм

$$\{i_{\alpha*}\}: \operatorname{dir} \lim [E, F^\alpha] \rightarrow [E, F].$$

Доказательство. Так как спектр E конечен, то найдется такой номер N , что E_N — конечное клеточное пространство и $E_m = S^{m-N}E_N$, $m \geq N$. Если $f: E \rightarrow F$ — произвольное отображение спектров, представленное парой (E', f') , то, увеличивая в случае необходимости номер N , можно считать, что $E'_N = E_N$. Существует такое конечное клеточное подпространство $K \subset F_N$, что $f'(E_N) \subset K$. Поскольку A — направленное множество и $\bigcup_\alpha F^\alpha = F$, то можно

найти элемент α_0 , для которого $K \subset F_{N}^{\alpha_0}$. Пусть E'' — кофинальный подспектр в E , задаваемый равенствами

$$E''_m = \begin{cases} *, & m < N, \\ S^{m-N}E_N, & m \geq N, \end{cases}$$

и $f'': E'' \rightarrow F^{\alpha_0}$ — функция, определенная формулой $f'' = f' \mid E''$. Тогда $\{(E'', f'')\}$ задает такое отображение спектров $g: E \rightarrow F^{\alpha_0}$, что $i_{\alpha_0}[g] = [f]$. Следовательно, $\{i_{\alpha*}\}$ — эпиморфизм.

Пусть теперь $g: E \rightarrow F^\beta$ — такое отображение, что $\{i_{\alpha*}\} \{[g]\} = 0$. Обозначим через $h: E \wedge I^+ \rightarrow F$ нульгомтопию композиции $i_\beta \circ g$. Спектр $E \wedge I^+$ также конечен, поэтому, повторяя предыдущие рассуждения, мы найдем элемент $\gamma \geq \beta$ и нульгомтопию отображения $j_\gamma^* \circ g$. Следовательно, $\{[g]\} = 0$, т. е. $\{i_{\alpha*}\}$ — мономорфизм. $\square$

8.35. Следствие. Пусть E — произвольный спектр и $\{Y^\alpha: \alpha \in A\}$ — направленное множество подпространств $Y^\alpha \subset Y$ клеточного пространства Y . Если $\bigcup_\alpha Y^\alpha = Y$, то вложения $i_\alpha: Y^\alpha \subset Y$ индуцируют изоморфизм

$$\{i_{\alpha*}\}: \operatorname{dir} \lim E_n(Y^\alpha) \rightarrow E_n(Y), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Так как $\Sigma^n S^0$ — конечный спектр, то данное утверждение является частным случаем леммы 8.34, в котором $F^\alpha = E \wedge Y^\alpha$, $\alpha \in A$. $\square$

8.36. Следствие. Для любого спектра E теория гомологий E_* удовлетворяет аксиоме суммы.

Доказательство. Если семейство $\{X_\alpha: \alpha \in A\}$ конечно, то изоморфизм

$$\{i_{\alpha*}\}: \bigoplus_{\alpha \in A} E_n(X_\alpha) \rightarrow E_n\left(\bigvee_{\alpha \in A} X_\alpha\right)$$

получается из предложения 7.36 индукцией по числу элементов семейства. Переходя к общему случаю, обозначим через B множество всех конечных подмножеств из A , упорядоченное по включению, и для каждого $\beta \in B$ положим $Y^\beta = \bigvee_{\alpha \in \beta} X_\alpha \subset \bigvee_{\alpha \in A} X_\alpha$

Тогда мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{dir} \lim E_n(Y^\beta) & \xrightarrow[\cong]{\{i_{\beta*}\}} & E_n\left(\bigvee_{\alpha \in A} X_\alpha\right) \\ \cong \uparrow \operatorname{dir} \lim \{i_{\alpha*}\} & & \uparrow \{i_{\alpha*}\} \\ \operatorname{dir} \lim \left(\bigoplus_{\alpha \in \beta} E_n(X_\alpha)\right) & \xrightarrow[\cong]{\{j_\beta\}} & \bigoplus_{\alpha \in A} E_n(X_\alpha), \end{array}$$

где $j_\beta: \bigoplus_{\alpha \in \beta} E_n(X_\alpha) \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in A} E_n(X_\alpha)$, $\beta \in B$, — естественное вложение. На основании сделанного выше замечания

$$\{i_{\alpha*}\}: \bigoplus_{\alpha \in \beta} E_n(X_\alpha) \rightarrow E_n(Y^\beta)$$

является изоморфизмом для каждого $\beta \in B$. Поэтому в силу 7.51 $\operatorname{dir} \lim \{i_{\alpha*}\}$ также изоморфизм. Тот факт, что $\{j_\beta\}$ — изоморфизм, представляет собой простое алгебраическое упражнение. Следовательно, $\{i_{\alpha*}\}$ — изоморфизм, что и утверждалось. $\square$

Для когомологий следствие 8.35 превращается в более сложное утверждение.

8.37. Предложение. Для любого спектра E и любой фильтрации $\{X^n\}$ клеточного пространства X имеет место точная последовательность

$$0 \rightarrow \lim^1 E^{q-1}(X^n) \rightarrow E^q(X) \xrightarrow{\{i_n^*\}} \lim^0 E^q(X^n) \rightarrow 0.$$

Это в точности предложение 7.66, примененное к теории когомологий E^* . $\square$

8.38. Группы коэффициентов теории гомологий E_* имеют вид

$$E_n(S^0) = \pi_n(E \wedge S^0) = \pi_n(E), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Группы коэффициентов для E^* равны:

$$E^n(S^0) = [E(S^0), \Sigma^n E] = [S^0, \Sigma^n E] \cong [\Sigma^{-n} S^0, E] = \pi_{-n}(E), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

8.39. Любое отображение спектров $f: E \rightarrow F$ индуцирует естественные преобразования $T_*(f): E_* \rightarrow F_*$, $T^*(f): E^* \rightarrow F^*$ теорий гомологий и когомологий. Если f — гомотопическая эквивалентность, то $T_*(f)$, $T^*(f)$ — естественные эквивалентности. По теореме 8.25 это возможно тогда и только тогда, когда $f_*: \pi_n(E) \rightarrow \pi_n(F)$ — изоморфизм для всех $n \in \mathbb{Z}$. Таким образом, преобразование $T_*(f)$ является естественной эквивалентностью в том и только в том случае, когда оно индуцирует изоморфизм групп коэффициентов. Это частный случай теоремы 7.55. Разумеется, априори могут существовать естественные преобразования $T: E_* \rightarrow F_*$ теорий гомологий, не имеющие вида $T_*(f)$ ни для какого отображения $f: E \rightarrow F$.

8.40. Можно продолжить теорию когомологий E^* на категорию спектров $\mathcal{SP}'$, полагая $E^n(F) = [F, \Sigma^n E]$, $n \in \mathbb{Z}$, $F \in \mathcal{SP}'$. Это продолжение (которое мы по-прежнему обозначаем символом E^*) будет теорией когомологий в том смысле, что для всех $n \in \mathbb{Z}$ имеют место естественные эквивалентности

$$\sigma^n: E^{n+1}(F \wedge S^1) \cong E^{n+1}(\Sigma F) \cong E^n(F), \quad F \in \mathcal{SP}',$$

и E^* удовлетворяет следующей аксиоме точности: для любой корасслоенной последовательности

$$F \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} H$$

точна последовательность групп и гомоморфизмов

$$E^n(F) \xrightarrow{f^*} E^n(G) \xrightarrow{g^*} E^n(H).$$

(На категории $\mathcal{PW}'$ эта аксиома эквивалентна ранее сформулированной аксиоме точности.)

Если теперь $T^*: E^* \rightarrow F^*$ — естественная эквивалентность теорий когомологий на категории $\mathcal{SP}'$, то можно показать, что $T^* = T^*(f)$ для некоторого отображения $f: E \rightarrow F$. Действительно, в группе $E^0(E) = [E, E]$ имеется выделенный элемент $[1_E]$. Пусть $T^0(E)[1_E] \in F^0(E) = [E, F]$ представляется отображением $f: E \rightarrow F$. Тогда для любого спектра G и $x \in E^n(G)$, представленного отображением $g: G \rightarrow \Sigma^n E$, мы имеем

$$T^n(G)(x) = T^n(G)[g] = T^n(G)[1_{\Sigma^n E} \circ g] = T^n(G) \cdot g^*[1_{\Sigma^n E}] = g^*T^n(\Sigma^n E)[1_{\Sigma^n E}] = g^*T^0(E)[1_E] = g^*[f] =$$

$$[f \cdot g] = T^n(f)(G)[g] = (T^n(f)(G))(x).$$

Таким образом, $T^* = T^*(f)$.

После того, как мы определим приведенное произведение $E \wedge G$ двух спектров, можно будет продолжить на всю категорию $\mathcal{S}\mathcal{S}'$ и любую теорию гомологий E_* :

$$E_n(G) = \pi_n(E \wedge G) = [\Sigma^n S^0, E \wedge G].$$

Однако, в этом случае неясно, всегда ли естественное преобразование $T_*: E_* \rightarrow F_*$ на $\mathcal{S}\mathcal{S}'$ имеет вид $T_* = T_*(f)$ для некоторого отображения спектров $f: E \rightarrow F$.

8.41. Определение. Пусть E — такой спектр, что сопряженное отображение $e'_n: E_n \rightarrow \Omega E_{n+1}$ к вложению $e_n: SE_n \rightarrow E_{n+1}$ является слабой гомотопической эквивалентностью для любого $n \in \mathbb{Z}$. В этом случае E называется Ω -спектром.

8.42. Теорема. Если E — некоторый Ω -спектр, то для клеточного пространства (X, x_0) имеет место естественный изоморфизм

$$E^n(X) \cong [X, x_0; E_n, *].$$

Доказательство. Положим

$$k^n(X) = [X, x_0; E_n, *]$$

и определим $\bar{\sigma}^n: k^{k+1}(SX) \rightarrow k^n(X)$ как естественную эквивалентность

$$[SX, *; E_{n+1}, *] \xrightarrow{\cong} [X, x_0; \Omega E_{n+1}, \omega_0] \xrightarrow[\cong]{e_{n*}} [X, x_0; E_n, *].$$

Так как для любой пары (X, A, x_0) последовательность

$$[A, x_0; E_n, *] \xleftarrow{i^*} [X, x_0; E_n, *] \xleftarrow{i^*} [X \cup CA, *; E_n, *]$$

точна, то k^* является теорией когомологий на $\mathcal{F}\mathcal{W}'$. Поскольку для каждого семейства $\{X_\alpha: \alpha \in A\}$ гомоморфизм

$$\{i_\alpha^*\}: \left[\bigvee_\alpha X_\alpha, *; E_n, * \right] \rightarrow \prod_\alpha [X_\alpha, x_\alpha; E_n, *]$$

является изоморфизмом, то k^* удовлетворяет аксиоме суммы. Определим теперь естественное преобразование $T^n: k^n \rightarrow E^n$. С этой целью заметим, что любое отображение $f: (X, x_0) \rightarrow (E_n, *)$ индуцирует функцию $f': E'(X) \rightarrow E$, где

$$E'(X)_m = \begin{cases} *, & m < n, \\ S^{m-n}X, & m \geq n \end{cases}$$

является кофинальным подспектром спектра $\Sigma^{-n}E(X)$. Таким образом, мы получаем отображение спектров $\bar{f}: \Sigma^{-n}E(X) \rightarrow E$. Положим

$$T(\bar{f}) = [\bar{f}] \in [\Sigma^{-n}E(X), E] \cong [E(X), \Sigma^n E] = E^n(X).$$

Поскольку диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}
 [\Sigma^{-n-1} E(SX), E] & \xleftarrow{\cong} & [\Sigma^{-n} E(X), E] \\
 \uparrow T^{n+1}(SX) & \swarrow & \nwarrow \Sigma & & \uparrow T^n(X) \\
 [SX, *; SE_n, *] & & & & [X, x_0; E_n, *] \\
 \swarrow \varepsilon_{n*} & & & & \swarrow \varepsilon'_n \\
 [SX, *; E_{n+1}, *] & \xrightarrow{\cong} & [X, x_0; \Omega E_{n+1}, \omega_0] & \xleftarrow{\varepsilon'_{n*}} & \\
 \swarrow A & & & &
 \end{array}$$

коммутативна, то T^* — естественное преобразование теорий когомологий.

Далее, из коммутативности квадрата

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \pi_{k+1}(SE_{n+k}, *) & & \\
 & \nearrow \Sigma & & \searrow \varepsilon_{n+k*} & \\
 \pi_k(E_{n+k}, *) & & & & \pi_{k+1}(E_{n+k+1}, *) \\
 & \searrow \cong & & \swarrow \cong & \\
 & \varepsilon'_{n+k*} & \pi_k(\Omega E_{n+k+1}, \omega_0) & \xleftarrow{A} &
 \end{array}$$

вытекает, что гомоморфизм

$$[S^k, s_0; E_{n+k}, *] \rightarrow \operatorname{dir} \lim [S^{k+l}, s_0; E_{n+k+l}, *] \cong E^n(S^0)$$

является изоморфизмом. Значит,

$$T^n(S^0): k^n(S^0) \rightarrow E^n(S^0)$$

— изоморфизм для всех $n \in \mathbb{Z}$. Поэтому по теореме 7.67 преобразование T^* есть естественная эквивалентность. $\square$

8.43. В главах 10, 11 и 12 мы рассмотрим несколько важных примеров спектров и связанных с ними теорий гомологий и когомологий. А в заключение настоящей главы упомянем об одном замечательном спектре, с которым мы уже неоднократно встречались, — сферическом спектре $S^0 = E_*(S^0)$. Ассоциированная с ним теория гомологий S_*^0 известна как *теория стабильных гомотопий*:

$$S_*^0(X) = \pi_n(S^0 \wedge X) = \operatorname{dir} \lim \pi_{n+k}(S^k \wedge X, *).$$

Для $S_n(X)$, как правило, применяется обозначение $\pi_n^S(X)$. Соответствующая теория когомологий S^{0*} называется *теорией стабильных когомотопий* и обозначается через π_*^S . Согласно упражнению 7.72, теории $\pi_n^S(-) = \operatorname{dir} \lim \pi_{n+q}(S^q \wedge -)$ и $S_*^0(-)$ эквивалентны на всей категории $\mathcal{P}\mathcal{T}'$.

Для любого $n \geq 2$ имеет место естественное отображение

$$i_0: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \operatorname{dir} \lim \pi_{n+k}(S^k X, *) = \pi_n^S(X),$$

переводящее элемент $x \in \pi_n(X, x_0)$ в $\{x\} \in \operatorname{dir} \lim \pi_{n+k}(S^k X, *)$. Это отображение можно определить и иначе. В самом деле, любое отображение $f: (S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$ индуцирует функцию $E(f)$:

$E(S^n) \rightarrow E(X)$. Поскольку $E(S^1)$ — кофинальный подспектр спектра $\Sigma^n S^0$, мы получаем отображение спектров $\{E(f)\}: \Sigma^n S^0 \rightarrow E(X)$. Тогда

$$i_0[f] = \{[E(f)]\} \in [\Sigma^n S^0, E(X)] = \pi_n^S(X).$$

Это описание отображения i_0 годится даже для $n=0$ или 1. Если $n \geq 1$, то i_0 — гомоморфизм.

Группы коэффициентов $\pi_n^S(S^0) = \text{dir lim } \pi_{n+k}^S(S^k, s_0)$ суть не что иное, как стабильные гомотопические группы сфер π_n^S , о которых мы уже упоминали после теоремы 6.28. Эти группы известны лишь для нескольких первых значений $n > 0$ (заметим, что $\pi_n^S = 0$, $n < 0$, $\pi_0^S \cong \mathbb{Z}$). Поиски методов вычисления групп π_n^S представляют собой одну из важных областей исследований в современной алгебраической топологии.

Замечание. Описанная в конце предыдущей главы конструкция позволяет нам определить для любого спектра E приведенную теорию гомологий $E_*(-)$ и приведенную теорию когомологий $E^*(-)$ на категории $\mathcal{P}\mathcal{T}'$. Примем некоторое соглашение об обозначениях, которых мы будем придерживаться во всех дальнейших главах. Для любого пространства $X \in \mathcal{P}\mathcal{T}'$ обозначим через $\tilde{E}_*(X)$ приведенные гомологии $E_*(X') = \pi_*(E \wedge X')$, где X' — произвольный клеточный эквивалент для X . Для любой пары (X, A) обозначим через $E_*(X, A)$ неприведенные гомологии $\tilde{E}_*(X \cup \cup SA^+)$. Для любого (не обязательно пунктированного) пространства X будем использовать для группы $E_*(X, \emptyset)$ сокращенное обозначение $E_*(X)$. Эти обозначения имеют по меньшей мере то достоинство, что в классических ситуациях они совпадают с общепринятыми.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

После того как эта книга уже была написана, я получил экземпляр лекций Адамса «Стабильные гомотопии и обобщенные гомологии», прочитанных им в Чикагском университете. Под влиянием этих лекций я решил переписать заново часть главы 13, но оставил главу 8 такой, как она есть. Тем не менее, я настоятельно рекомендую читателю заглянуть в лекции Адамса и сравнить его подход к теории спектров с изложенным в настоящей книге.

ССЫЛКИ НА ЛИТЕРАТУРУ

1. Адамс [8].
2. Бордман [21].
3. Уайтхед [81].

В предыдущей главе мы показали, что с каждым спектром E можно связать теории гомологий и когомологий (удовлетворяющие аксиоме суммы). Теперь мы займемся обратной задачей: по данной теории когомологий k^* , удовлетворяющей на $\mathcal{FW}'$ аксиоме суммы, будут построены спектр E и естественная эквивалентность теорий когомологий $T: \tilde{E}^* \rightarrow k^*$ на $\mathcal{FW}'$. В действительности мы сделаем несколько больше. Именно, для любого кофунктора ¹⁾ $F^*: \mathcal{FW}' \rightarrow \mathcal{FS}$, удовлетворяющего аксиоме суммы и некоторому условию точности, мы построим клеточное пространство (Y, y_0) и естественную эквивалентность $T: [-; Y, y_0] \rightarrow F^*$. Кроме того, мы докажем аналогичную теорему для кофункторов F^* , определенных на категории $\mathcal{FW}'_f$ конечных клеточных пространств и принимающих значения в категории групп $\mathcal{G}$. Фигурирующее в этих теоремах клеточное пространство Y называется *представляющим*, или *классифицирующим*, *пространством* кофунктора F^* .

Идея, на которой основаны все результаты настоящей главы, состоит в следующем. Для $(Y, y_0) \in \mathcal{FW}'$ и $u \in F^*(Y)$ мы имеем естественное преобразование $T_u: [-; Y, y_0] \rightarrow F^*$, задаваемое для любого $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ формулой $T_u(f) = f^*(u) \in F^*(X)$. Поэтому проблема заключается в построении таких (Y, y_0) и $u \in F^*(Y)$, для которых T_u — эквивалентность кофункторов.

Всюду в этой главе мы будем придерживаться следующих соглашений. Поскольку мы рассматриваем здесь лишь кофункторы, то нет необходимости отмечать их звездочкой. Таким образом, кофункторы будут обозначаться просто через F и т. д. Если $A \subset X$ — вложение $i: A \rightarrow X$ и $u \in F(X)$, то, как правило, мы будем обозначать элемент $i^*(u) \in F(A)$ символом $u|A$.

Сформулируем теперь те аксиомы, которым будут удовлетворять на категории $\mathcal{FW}'$ наши кофункторы F .

С) Аксиома суммы. Для произвольного семейства $\{X_\alpha: \alpha \in A\}$ клеточных пространств из $\mathcal{FW}'$ индуцированный вложениями $i_\beta: X_\beta \rightarrow \bigvee_\alpha X_\alpha$ морфизм

$$\{i_\alpha^*\}: F\left(\bigvee_\alpha X_\alpha\right) \rightarrow \prod_\alpha F(X_\alpha)$$

является биекцией.

¹⁾ На самом деле это построение осуществляется лишь для кофункторов $F: \mathcal{FEW}' \rightarrow \mathcal{FS}$, где $\mathcal{FEW}'$ — категория *связных* пунктированных клеточных пространств. В общем случае не верна лемма 9.11. — Прим. ред.

МВ) Аксиома Майера—Вьеториса. Для любой клеточной триады $(X; A_1, A_2)$ (т. е. клеточного пространства X и двух таких его клеточных подпространств A_1 и A_2 , что $A_1 \cup A_2 = X$) и для любых элементов $x_1 \in F(A_1)$, $x_2 \in F(A_2)$ с $x_1|_{A_1 \cap A_2} = x_2|_{A_1 \cap A_2}$ найдется $y \in F(X)$ с $y|_{A_1} = x_1$, $y|_{A_2} = x_2$.

9.1. Предложение. Для любого $(Y, y_0) \in \mathcal{F}\mathcal{U}$ кофунктор $F = [-; Y, y_0]$ удовлетворяет аксиомам суммы и Майера—Вьеториса.

Доказательство.

С) Каждый элемент из $\prod_{\alpha} F(X_{\alpha})$ индексирован семейством $\{[f_{\alpha}]\}$ гомотопических классов отображений $f_{\alpha}: (X_{\alpha}, x_{\alpha}) \rightarrow (Y, y_0)$. Отображения f_{α} определяют отображение $f: \bigvee_{\alpha} X_{\alpha} \rightarrow Y$ с $f \cdot i_{\alpha} = f_{\alpha}$;

следовательно, $\{i_{\alpha}^* [f]\} = \{[f_{\alpha}]\}$. Таким образом, $\{i_{\alpha}^*\}$ сюръективно.

Если два элемента $[f], [g] \in \left[\bigvee_{\alpha} X_{\alpha}, *, Y, y_0 \right]$ имеют один и тот же образ при отображении $\{i_{\alpha}^*\}$, то существует индексированное семейство гомотопий $H^{\alpha}: X_{\alpha} \wedge I^+ \rightarrow Y$ с $H_0^{\alpha} = f \cdot i_{\alpha}$, $H_1^{\alpha} = g \cdot i_{\alpha}$. Поскольку $\bigvee (X_{\alpha} \wedge I^+) \cong \left(\bigvee_{\alpha} X_{\alpha} \right) \wedge I^+$, мы получаем гомотопию $H: \left(\bigvee_{\alpha} X_{\alpha} \right) \wedge I^+ \rightarrow Y$ с $H \cdot (i_{\alpha} \wedge 1) = H^{\alpha}$ и $H_0 = f$, $H_1 = g$. Таким образом, $[f] = [g]$, т. е. отображение $\{i_{\alpha}^*\}$ инъективно.

МВ) Пусть A_1, A_2 — такие клеточные подпространства клеточного пространства X , что $X = A_1 \cup A_2$. Рассмотрим элементы $[f_1] \in [A_1, x_0; Y, y_0]$, $[f_2] \in [A_2, x_0; Y, y_0]$, удовлетворяющие условию $[f_1]|_{A_1 \cap A_2} = [f_2]|_{A_1 \cap A_2}$; другими словами, $f_1|_{A_1 \cap A_2} \simeq f_2|_{A_1 \cap A_2}$. Вложение $A_1 \cap A_2 \rightarrow A_1$ является корасслоением, так что если $H: (A_1 \cap A_2) \times I \rightarrow Y$ — гомотопия, связывающая отображения $f_1|_{A_1 \cap A_2}$ и $f_2|_{A_1 \cap A_2}$, то найдется ее продолжение $\bar{H}: A_1 \times I \rightarrow Y$ с $\bar{H}_0 = f_1$. Но тогда $\bar{f}_1 = \bar{H}_1$ является еще одним представителем элемента $[f_1] \in [A_1, x_0; Y, y_0]$ и $\bar{f}_1|_{A_1 \cap A_2} = f_2|_{A_1 \cap A_2}$. Следовательно, мы имеем отображение $g: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ с $g|_{A_1} = \bar{f}_1$, $g|_{A_2} = f_2$. Другими словами, элемент $[g] \in [X, x_0; Y, y_0]$ обладает тем свойством, что $[g]|_{A_1} = [f_1]$, $[g]|_{A_2} = [f_2]$. □

Нашей целью является доказательство утверждения, обратного предложению 9.1. Начиная с этого места будем считать, что кофунктор $F: \mathcal{F}\mathcal{U}' \rightarrow \mathcal{F}\mathcal{S}$ удовлетворяет аксиомам суммы и Майера—Вьеториса.

9.2. Лемма. Для любого одноточечного пространства $\{x_0\}$ множество $F(\{x_0\})$ состоит из единственного элемента.

Доказательство. Имеет место биекция

$$F(\{x_0\}) = F(\{x_0\} \vee \{x_0\}) \cong F(\{x_0\}) \times F(\{x_0\}),$$

задаваемая формулой $a \mapsto (a, a)$. Но это возможно лишь в случае, когда $F(\{x_0\})$ состоит из одного элемента. □

9.3. Лемма. Если $(X, x_0) \in \mathcal{FW}'$ и $\{x_0\} = X_{-1} \subset X_0 \subset \dots \subset X_n \subset \dots \subset X$ — такая последовательность клеточных подпространств X , что $X = \bigcup_n X_n$, то отображение

$$\{i_n^*\}: F(X) \rightarrow \operatorname{inv} \lim F(X_n)$$

сюръективно.

Замечание. Обратный предел обратной системы множеств определяется очевидным образом.

Доказательство. Доказательство данной леммы во многом сходно с доказательством предложения 7.66. Рассмотрим бесконечный телескоп $X' = \bigcup_{n \geq -1} [n-1, n]^+ \wedge X_n$ и положим

$$A_1 = \bigcup_{\substack{k \geq -1 \\ k \text{ нечетно}}} [k-1, k]^+ \wedge X_k \subset X',$$

$$A_2 = \bigcup_{\substack{k \geq 0 \\ k \text{ четно}}} [k-1, k]^+ \wedge X_k \subset X'.$$

Тогда

$$X' = A_1 \cup A_2, \quad A_1 \cap A_2 = \bigvee_k X_k,$$

$$A_1 \simeq \bigvee_{k \text{ нечетно}} X_k \quad \text{и} \quad A_2 \simeq \bigvee_{k \text{ четно}} X_k.$$

Как следует из аксиомы суммы, для любого элемента $\{x_n\} \in \operatorname{inv} \lim F(X_n)$ найдутся такие $y_1 \in F(A_1)$ и $y_2 \in F(A_2)$, что $y_1|X_k = x_k$, k нечетно, и $y_2|X_k = x_k$, k четно. Рассмотрим теперь элемент $y_1|A_1 \cap A_2$. Если k нечетно, то, как отмечалось выше, $y_1|X_k = x_k$. Если же k четно, то $y_1|X_k = j_k^*(y_1|X_{k+1}) = j_k^*(x_{k+1}) = x_k$, где $j_k: X_k \rightarrow X_{k+1}$ — естественное вложение. Аналогичное свойство верно и для элемента $y_2|A_1 \cap A_2$. Следовательно, $y_1|A_1 \cap A_2 = y_2|A_1 \cap A_2$. Поэтому, используя аксиому Майера — Вьеториса, мы получаем элемент $y' \in F(X')$ с $y'|A_1 = y_1$, $y'|A_2 = y_2$. Тогда $y'|X_k = x_k$, $k \geq -1$. Но $X' \simeq X$; поэтому существует такой элемент $y \in F(X)$, что $y|X_k = x_k$, $k \geq -1$. $\square$

9.4. Предложение. Для любого отображения $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ из категории $\mathcal{FW}'$ последовательность

$$F(X) \xrightarrow{f^*} F(Y) \xrightarrow{f^*} F(Y \cup_f CX)$$

точна.

Доказательство. Очевидно, что $f^* \circ j^* = (j \circ f)^* = 0$. Пусть $y \in F(Y)$ — такой элемент, что $f^*(y) = 0$. Рассмотрим в $Y \cup_f CX$ подпространства $A_1 = [0, 1/2] \wedge X$ и $A_2 = [1/2, 1]^+ \wedge X \cup Y$. Тогда $A_1 \cap A_2 = \{1/2\}^+ \wedge X \cong X$, $A_2 \simeq Y$ и вложение $A_1 \cap A_2 \rightarrow A_2$ гомотопно отображению f . Пусть $y_1 \in F(A_1)$ равен нулю, а $y_2 \in F(A_2)$

равен элементу y . Тогда $y_2 | A_1 \cap A_2 = y_1 | A_1 \cap A_2$. Следовательно, существует такой элемент $z \in F(Y \cup_f CX)$, что $z | Y = y$. $\square$

9.5. Замечание. Из аксиомы суммы без труда выводится следующее утверждение: для любой H -когруппы K множество $F(K)$ может быть наделено групповой структурой.

9.6. Определение. Элемент $u \in F(Y)$ называется n -универсальным, если

$$T_u: [S^q, s_0; Y, y_0] \rightarrow F(S^q)$$

— изоморфизм для $q < n$ и эпиморфизм для $q = n$. Элемент u называется универсальным, если он n -универсален для всех $n \geq 0$.

9.7. Лемма. Пусть $f: (Y, y_0) \rightarrow (Y', y'_0)$ — клеточное отображение и $u \in F(Y)$, $u' \in F(Y')$ — такие универсальные элементы, что $f^*u' = u$. Тогда f индуцирует изоморфизм

$$f_*: \pi_q(Y, y_0) \rightarrow \pi_q(Y', y'_0), \quad q \geq 0.$$

Доказательство. Для любого $q \geq 0$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi_q(Y, y_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_q(Y', y'_0) \\ T_u \searrow \cong & & \cong \swarrow T_{u'} \\ & F(S^q) & \end{array}$$

из которой следует требуемое утверждение. $\square$

Будем называть произвольный элемент $u \in F(Y)$ (-1) -универсальным.

9.8. Лемма. Пусть $(Y, y_0) \in \mathcal{FW}$ и $u_n \in F(Y)$ — некоторый n -универсальный элемент. Тогда существуют клеточное пространство Y' , получающееся из Y приклеиванием $(n+1)$ -мерных клеток, и такой $(n+1)$ -универсальный элемент $u_{n+1} \in F(Y')$, что $u_{n+1} | Y = u_n$.

Доказательство. Для каждого $\lambda \in F(S^{n+1})$ возьмем экземпляр S_λ^{n+1} сферы S^{n+1} и образуем клеточное пространство $Y \vee \left(\bigvee_\lambda S_\lambda^{n+1} \right)$. Если $n \geq 0$, то для каждого класса $\alpha \in \pi_n(Y, y_0)$ с $T_{u_n}(\alpha) = 0$ выберем представляющее его отображение $f: (S^n, s_0) \rightarrow (Y, y_0)$ и приклеим к $Y \vee \bigvee_\lambda S_\lambda^{n+1}$ по этому отображению $(n+1)$ -мерную клетку e_α^{n+1} . В результате мы получим клеточное пространство Y' . Согласно аксиоме суммы существует такой элемент $v \in F\left(Y \vee \bigvee_\lambda S_\lambda^{n+1}\right)$, что $v | Y = u_n$, $v | S_\lambda^{n+1} = \lambda$. Если

$$g: \bigvee_\alpha S_\alpha^n \rightarrow Y \vee \bigvee_\lambda S_\lambda^{n+1}$$

— «большое приклеивающее отображение» для $(n+1)$ -мерных клеток e_{α}^{n+1} , то имеет место точная последовательность

$$F\left(\bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n\right) \xrightarrow{g^*} F\left(Y \vee \bigvee_{\lambda} S_{\lambda}^{n+1}\right) \xrightarrow{j^*} F(Y').$$

Нетрудно видеть, что $g^*(v) | S_{\alpha}^n = T_{u_n}(\alpha) = 0$ для всех α . Поскольку отображение

$$\{i_{\alpha}^*\}: F\left(\bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n\right) \rightarrow \prod_{\alpha} F(S_{\alpha}^n)$$

биективно, то отсюда следует, что $g^*(v) = 0$. Таким образом, найдется такой элемент $u_{n+1} \in F(Y')$, что $u_{n+1} | \left(Y \vee \bigvee_{\lambda} S_{\lambda}^{n+1}\right) = v$.

В частности, $u_{n+1} | Y = u_n$ и $u_{n+1} | S_{\lambda}^{n+1} = \lambda$.

Теперь мы должны показать, что элемент u_{n+1} является $(n+1)$ -универсальным. С этой целью рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \pi_q(Y, y_0) & \xrightarrow{i_*} & \pi_q(Y', y_0) \\ & \searrow T_{u_n} & \swarrow T_{u_{n+1}} \\ & F(S^q) & \end{array}$$

Так как пространство Y' получается из Y приклеиванием $(n+1)$ -мерных клеток, то i_* — изоморфизм для $q < n$ и эпиморфизм для $q = n$. Следовательно, $T_{u_{n+1}}$ также является изоморфизмом для $q < n$ и эпиморфизмом для $q = n$. Предположим, что $T_{u_{n+1}}(\beta) = 0$ для некоторого $\beta \in \pi_n(Y', y_0)$. Поскольку i_* — эпиморфизм для $q = n$, то найдется такой элемент $\alpha \in \pi_n(Y, y_0)$, что $i_*(\alpha) = \beta$. Но тогда $T_{u_n}(\alpha) = T_{u_{n+1}}i_*(\alpha) = T_{u_{n+1}}(\beta) = 0$. Следовательно, в Y' существует клетка e_{α}^{n+1} , заклеивающая элемент $i_*(\alpha)$, т. е. $i_*(\alpha) = \beta = 0$. Значит, $T_{u_{n+1}}$ — мономорфизм для $q = n$. Наконец, для каждого $\lambda \in F(S^{n+1})$ мы имеем $T_{u_{n+1}}([i_{\lambda}]) = i_{\lambda}^*(u_{n+1}) = \lambda$, где $i_{\lambda}: S_{\lambda}^{n+1} \rightarrow Y'$ — вложение. Таким образом, $T_{u_{n+1}}$ — эпиморфизм для $q = n+1$. $\square$

9.9. Следствие. Для любых $(Y, y_0) \in \mathcal{PW}$ и $v \in F(Y)$ можно найти клеточное пространство Y' , содержащее Y в качестве клеточного подпространства и универсальный элемент $u \in F(Y')$ с $u | Y = v$.

Доказательство. Полагая $Y_{-1} = Y$, $u_{-1} = v$ и применяя предыдущую лемму, мы найдем по индукции последовательность $Y = Y_{-1} \subset Y_0 \subset Y_1 \subset \dots \subset Y_n \subset \dots$ клеточных пространств, в которой Y_n получается из Y_{n-1} приклеиванием n -мерных клеток, а также последовательность n -универсальных элементов $u_n \in F(Y_n)$,

удовлетворяющих условию $u_n | Y_{n-1} = u_{n-1}$. Положим теперь $Y' = \bigcup_{n \geq -1} Y_n$ и наделим Y' слабой топологией. Тогда в силу леммы 9.3 найдется такой $u \in F(Y')$, что $u | Y_n = u_n$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \pi_q(Y_n, y_0) & \xrightarrow{i_{n*}} & \pi_q(Y', y_0) \\ T_{u_n} \searrow & & \swarrow T_u \\ & F(S^q) & \end{array}$$

Так как пространство Y' получается из Y_n приклеиванием клеток размерностей, больших n , то i_{n*} — изоморфизм для $q < n$. Следовательно, $T_u: \pi_q(Y', y_0) \rightarrow F(S^q)$ — изоморфизм для всех q , т. е. u — универсальный элемент. $\square$

9.10. Следствие. *Существуют клеточное пространство $(Y, y_0) \in \mathcal{F}\mathcal{W}$ и универсальный элемент $u \in F(Y)$.*

Доказательство. Положим в предыдущем следствии $Y = \{y_0\}$, и пусть v — отмеченный элемент в $F(Y)$. Тогда Y' из указанного следствия есть требуемое клеточное пространство, а $u \in F(Y')$ — универсальный элемент. $\square$

Доказательство теоремы о представимости напоминает одно из доказательств теоремы Уайтхеда 6.32.

9.11. Лемма¹⁾. Пусть Y — пространство с универсальным элементом $u \in F(Y)$, (X, A, x_0) — клеточная пара, $g: (A, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ — клеточное отображение и $v \in F(X)$ — элемент, удовлетворяющий условию $v | A = g^*(u)$. Тогда существует такое клеточное отображение $h: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$, что $h | A = g$ и $v = h^*(u)$.

Доказательство. Обозначим через T клеточное пространство, полученное из $(I^+ \wedge A) \vee X \vee Y$ отождествлением $[0, a] \in I^+ \wedge A$ с $a \in X$ и $[1, a] \in I^+ \wedge A$ с $g(a) \in Y$. Пусть $A_1, A_2 \subset T$ — клеточные пространства, задаваемые как $A_1 = ([0, 1/2]^+ \wedge A) \cup X$, $A_2 = ([1/2, 1]^+ \wedge A) \cup Y$. Тогда $A_1 \cup A_2 = T$, $A_1 \cap A_2 = \{1/2\} \times A \cong A$. Кроме того, существует сильная деформационная ретракция $f: A_1 \rightarrow X$ и, аналогично, сильная деформационная ретракция $A_2 \rightarrow Y$. Следовательно, найдутся такие элементы $\bar{v} \in F(A_1)$, $\bar{u} \in F(A_2)$, что $\bar{v} | X = v$, $\bar{u} | Y = u$. Очевидно, что $\bar{v} | A_1 \cap A_2 = f^*(v | A) = f^*g^*(u) = \bar{u} | A_1 \cap A_2$. Поэтому, согласно аксиоме Майера — Вьеториса, существует элемент $w \in F(T)$ с $w | X = v$, $w | Y = u$.

На основании леммы 9.8 мы можем вложить T в некоторое клеточное пространство Y' и найти универсальный элемент $u' \in F(Y')$ с $u' | T = w$. Пусть $j: Y \rightarrow Y'$ — вложение; тогда $j^*(u') = u' | Y = w | Y = u$. Следовательно, по лемме 9.7 индуцированный

¹⁾ Здесь все пространства X, A, Y надо считать связными. Заметим также, что в лемме 9.9 можно, считая Y связным, а F — заданным на категории связных пространств, найти связное Y' . — Прим. ред.

гомоморфизм гомотопических групп

$$j_*: \pi_*(Y, y_0) \rightarrow \pi_*(Y', y'_0)$$

является изоморфизмом.

Пусть теперь $g: X \rightarrow Y'$ — вложение X в Y' . Тогда $\bar{g}|A \simeq j \cdot g$, причем гомотопией, связывающей эти отображения, служит композиция $I^+ \wedge A \subset T \rightarrow Y'$. Так как $A \subset X$ является кораслоением, то найдется отображение $\bar{g}: X \rightarrow Y'$ с $\bar{g}|A = j \cdot g$ и $\bar{g} \simeq g$.

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{j} & Y' \\ \uparrow g & & \uparrow \bar{g} \\ A & \subset & X. \end{array}$$

Из доказательств утверждений 6.29 — 6.30 вытекает существование такого отображения $h: X \rightarrow Y$, что $h|A = g$, $j \cdot h \simeq \bar{g} \simeq g$. Следовательно,

$$h^*(u) = h^*j^*(u') = \bar{g}^*(u') = v. \quad \square$$

9.12. Теорема (Браун)¹⁾. Если $F: \mathcal{F}\mathcal{W}' \rightarrow \mathcal{F}\mathcal{S}$ — кофунктор, удовлетворяющий аксиомам суммы и Майера — Вьеториса, то существуют такое представляющее пространство $(Y, y_0) \in \mathcal{F}\mathcal{W}'$ и такой универсальный элемент $u \in F(Y)$, что $T_u: [-; Y, y_0] \rightarrow F$ — естественная эквивалентность.

Доказательство. В силу 9.10 существуют клеточное пространство $(Y, y_0) \in \mathcal{F}\mathcal{W}'$ и универсальный элемент $u \in F(Y)$. Поэтому все, что осталось сделать, — это доказать, что

$$T_u: [X, x_0; Y, y_0] \rightarrow F(X)$$

— биекция для всех $(X, x_0) \in \mathcal{F}\mathcal{W}'$.

а) Пусть $v \in F(X)$. Положим в лемме 9.11 $A = \{x_0\}$ и возьмем в качестве $g: (A, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ единственное отображение, переводящее A в отмеченную точку y_0 . Тогда найдется отображение $h: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ с $v = h^*(u) = T_u([h])$. Следовательно, T_u сюръективно.

б) Предположим теперь, что $T_u[g_0] = T_u[g_1]$ для двух отображений $g_0, g_1: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$. Без ограничения общности можно считать, что g_0 и g_1 — клеточные отображения. Пусть $X' = X \wedge I^+$ и $A' = X \wedge \{0, 1\}^+$. Зададим отображение $g: (A', *) \rightarrow (Y, y_0)$, полагая $g[x, 0] = g_0(x)$, $g[x, 1] = g_1(x)$, $x \in X$. Кроме того, пусть

¹⁾ Как уже говорилось в примечании на с. 184, эта теорема здесь доказана лишь для кофункторов $F: \mathcal{F}\mathcal{W}' \rightarrow \mathcal{F}\mathcal{S}$. — Прим. ред.

$p: X' \rightarrow X$ — отображение, определенное равенством $p[x, t] = x$ для всех $[x, t] \in X'$ и $v = p^* g_0^* u \in F(X')$. Тогда

$$v | X \wedge \{0\}^+ = g_0^* u = g^* u | X \wedge \{0\}^+$$

и

$$v | X \wedge \{1\}^+ = g_0^* u = T_u[g_0] = T_u[g_1] = g^* u = g^* u | X \wedge \{1\}^+.$$

Следовательно, $g^* u = v | A$, так что по лемме 9.11 найдется отображение $h: X' \rightarrow Y$ с $h | A = g$. Легко видеть, что h является гомотопией, связывающей g_0 и g_1 . Значит, T_u инъективно. $\square$

9.13. Теорема. Пусть $F, F': \mathcal{F}\mathcal{W}' \rightarrow \mathcal{F}\mathcal{S}$ — два кофунктора с представляющими пространствами (Y, y_0) , (Y', y'_0) и универсальными элементами u, u' соответственно. Если $T: F \rightarrow F'$ — естественное преобразование, то существует единственное с точностью до гомотопии отображение $f: (Y, y_0) \rightarrow (Y', y'_0)$, такое, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} [X, x_0; Y, y_0] & \xrightarrow{f_*} & [X, x_0; Y', y'_0] \\ \downarrow T_u(X) & & \downarrow T_{u'}(X) \\ F(X) & \xrightarrow{T(X)} & F'(X) \end{array}$$

коммутативна для всех $(X, x_0) \in \mathcal{F}\mathcal{W}'$.

Доказательство. Выберем такой гомотопический класс $[f] \in [Y, y_0; Y', y'_0]$, что

$$T(Y) \cdot T_u(Y)([1_Y]) = T_{u'}(Y)([f]). \quad \square$$

В частности, отсюда следует, что представляющее пространство (Y, y_0) определено однозначно с точностью до гомотопической эквивалентности.

9.14. Упражнение. Показать, что если $[-; Y, y_0]$ — кофунктор из $\mathcal{F}\mathcal{W}'$ в $\mathcal{S}$, то можно так снабдить (Y, y_0) структурой H -группы, что умножение в $[-; Y, y_0]$ индуцируется гомотопическим умножением в (Y, y_0) .

А теперь обратимся к ситуации, когда кофунктор F определен лишь на категории $\mathcal{F}\mathcal{W}'_F$ конечных клеточных пространств и удовлетворяет там аксиоме Майера — Вьеториса и слабой аксиоме суммы:

$$(C_{cl}) \text{ отображение } (i_1^*, i_2^*): F(X_1 \vee X_2) \rightarrow F(X_1) \times F(X_2) \text{ биективно для всех } (X_1, x_1), (X_2, x_2) \in \mathcal{F}\mathcal{W}'_F.$$

Кроме того, будем считать, что F принимает значения в категории групп, т. е. $F: \mathcal{F}\mathcal{W}'_F \rightarrow \mathcal{S}$.

Легко понять, что доказательство теоремы о представимости для кофункторов F на $\mathcal{F}\mathcal{W}'_F$ должно использовать иные средства, нежели доказательство теоремы 9.12. Дело в том, что представ-

ляющие пространства Y , как правило, являются бесконечными клеточными пространствами, и мы не можем уже рассматривать $F(Y)$. Поэтому мы выберем другой путь. Продолжим функтор F на категорию $\mathcal{W}'$, полагая

$$\hat{F}(X) = \operatorname{inv} \lim F(X_\alpha),$$

где $(X, x_0) \in \mathcal{W}'$ и X_α пробегает множество всех конечных клеточных подпространств пространства X , содержащих отмеченную точку x_0 . Очевидно, что $\hat{F}(X) = F(X)$ для $(X, x_0) \in \mathcal{W}'_F$. Если бы функтор $\hat{F}$ удовлетворял сильной аксиоме суммы и аксиоме Майера—Вьеториса, мы могли бы применить теорему 9.12 и получить представляющее пространство Y . К сожалению, для $\hat{F}$ эти аксиомы не выполняются. Мы увидим, что для $\hat{F}$ справедлив более сильный результат, чем лемма 9.3, однако вместо аксиомы Майера—Вьеториса выполняется лишь некоторый ее ослабленный вариант. Тем не менее этих свойств окажется достаточно, чтобы построить для функтора F представляющее пространство Y .

9.15. Лемма. *Функтор $\hat{F}$ удовлетворяет аксиоме суммы.*

Доказательство получается несложными, но скучными манипуляциями с элементами $\{x_\alpha\} \in \operatorname{inv} \lim F(X_\alpha)$. $\square$

9.16. Лемма. *Для любого пространства $(X, x_0) \in \mathcal{W}'$ и любой направленной системы $\{X_\alpha\}$ клеточных подпространств X_α с $X = \bigcup X_\alpha$ гомоморфизм*

$$\{i_\alpha^*\}: \hat{F}(X) \rightarrow \operatorname{inv} \lim \hat{F}(X_\alpha)$$

является изоморфизмом.

Утомительное, однако совершенно прозрачное доказательство этой леммы мы опускаем. $\square$

Теперь мы собираемся показать, что функтор $\hat{F}$ удовлетворяет аксиоме Майера—Вьеториса для любой клеточной триады $(X; A_1, A_2)$, в которой $A_1 \cap A_2$ —конечное клеточное пространство. Доказательство этого факта требует некоторой подготовки.

Пусть $\mathcal{C}$ —некоторая категория, обладающая следующими свойствами:

- i) объектами категории $\mathcal{C}$ являются только непустые множества;
- ii) морфизмами категории $\mathcal{C}$ являются только сюръективные отображения;
- iii) для любых $X, Y \in \mathcal{C}$ существует не более одного морфизма $\alpha: X \rightarrow Y$ в $\mathcal{C}$;
- iv) для любых $X, Y \in \mathcal{C}$ существуют объект $Z \in \mathcal{C}$ и морфизмы $\alpha: Z \rightarrow X$, $\beta: Z \rightarrow Y$.

В этой ситуации можно определить $\operatorname{inv} \lim \mathcal{C}$. Действительно, зададим на множестве объектов из $\mathcal{C}$ «отношение частичного порядка», полагая $X \leq Y$ в том и только в том случае, когда в $\mathcal{C}$ существует морфизм $\alpha: Y \rightarrow X$ (из $X \leq Y$ и $Y \leq X$, вообще

говоря, не следует, что $X=Y$). Тогда $\mathcal{E}$ превращается в «обратную систему» множеств и сюръекций. Неясно, однако, будет ли множество $\text{inv lim } \mathcal{E}$ непустым. Чтобы гарантировать это, введем некоторое дополнительное предположение.

Пусть $\bar{\mathcal{E}}$ — категория, имеющая те же объекты, что и $\mathcal{E}$, но более широкий класс морфизмов. Именно, отображение $f: X \rightarrow Y$ является морфизмом в $\bar{\mathcal{E}}$ в том и только в том случае, когда в $\mathcal{E}$ существуют такие морфизмы $\alpha: Z \rightarrow X$, $\beta: Z \rightarrow Y$, что $f \cdot \alpha = \beta$. Категория $\bar{\mathcal{E}}$ по-прежнему обладает свойствами i)–iv). Более того, без труда проверяется, что $\bar{\mathcal{E}}$ является наибольшей из категорий, имеющих объекты из $\mathcal{E}$ и обладающих указанными свойствами. Существует очевидная инъекция $i: \text{inv lim } \bar{\mathcal{E}} \rightarrow \text{inv lim } \mathcal{E}$. Тривиальные рассуждения показывают, что в действительности i является биекцией. Таким образом, нам достаточно найти условия, которые гарантируют, что $\text{inv lim } \bar{\mathcal{E}} \neq \emptyset$.

9.17. Предложение. Если категория $\mathcal{E}$ имеет счетное (или конечное) число классов эквивалентности, то

$$\text{inv lim } \mathcal{E} = \text{inv lim } \bar{\mathcal{E}} \neq \emptyset.$$

Доказательство. Пусть $Y_0, Y_1, \dots, Y_n, \dots$ — такое счетное семейство объектов из $\mathcal{E}$, что каждый $Z \in \mathcal{E}$ эквивалентен в $\bar{\mathcal{E}}$ в точности одному из Y_i . По индукции мы можем построить такую последовательность объектов $X_0, X_1, \dots$ в $\mathcal{E}$ и элементов $x_k \in X_k$, что

- a) $X_k \leq X_{k+1}$, $k \geq 0$;
- b) $Y_i \leq X_i$ для всех $i \geq 0$;
- c) если $\alpha: X_{k+1} \rightarrow X_k$ — единственный морфизм, то $\alpha(x_{k+1}) = x_k$.

Определим теперь для каждого объекта $Y \in \mathcal{E}$ элемент $x_Y \in Y$ следующим образом. Вспомним, что имеется такой (единственный) номер i , что Y эквивалентно Y_i в $\mathcal{E}$. Пусть $f: Y_i \rightarrow Y$ — соответствующая эквивалентность. В $\mathcal{E}$ существует морфизм $\alpha: X_i \rightarrow Y_i$ и мы положим $x_Y = f \cdot \alpha(x_i)$. Покажем, что семейство $\{x_Y\}$ является элементом множества $\text{inv lim } \mathcal{E}$.

Пусть $\alpha: Z \rightarrow Y$ — некоторый морфизм в $\mathcal{E}$. Тогда существуют целые числа i, j и эквивалентности $f: Y_i \rightarrow Y$, $g: Y_j \rightarrow Z$ в $\bar{\mathcal{E}}$. В категории $\mathcal{E}$ существуют морфизмы $\alpha_i: X_i \rightarrow Y_i$, $\alpha_j: X_j \rightarrow Y_j$. По определению, $x_Y = f \cdot \alpha_i(x_i)$, $x_Z = g \cdot \alpha_j(x_j)$.

Рассмотрим два возможных случая.

1) $i \leq j$. Тогда в $\mathcal{E}$ существует морфизм $\alpha_{ij}: X_j \rightarrow X_i$, так что $f \cdot \alpha_i \cdot \alpha_{ij}$ и $\alpha \cdot g \cdot \alpha_j$ являются морфизмами в $\bar{\mathcal{E}}$ из X_j в Y . Следовательно, $f \cdot \alpha_i \cdot \alpha_{ij} = \alpha \cdot g \cdot \alpha_j$, т. е.

$$x_Y = f \cdot \alpha_i(x_i) = f \cdot \alpha_i \cdot \alpha_{ij}(x_j) = \alpha \cdot g \cdot \alpha_j(x_j) = \alpha(x_Z).$$

2) $j \leq i$. В этом случае в $\mathcal{E}$ существует морфизм $\alpha_{ji}: X_i \rightarrow X_j$, так что $f \cdot \alpha_i$, $\alpha \cdot g \cdot \alpha_{ji}$ являются морфизмами в $\bar{\mathcal{E}}$ из X_i в Y .

Следовательно, $f \cdot \alpha_i = \alpha \cdot g \cdot \alpha_j \cdot \alpha_{ji}$, откуда

$$x_Y = f \cdot \alpha_i(x_i) = \alpha \cdot g \cdot \alpha_j \cdot \alpha_{ji}(x_i) = \alpha \cdot g \cdot \alpha_j(x_j) = \alpha(x_Z).$$

Таким образом, в любом случае $\alpha(x_Z) = x_Y$. Это показывает, что $\{x_Y\}$ является элементом множества $\text{inv lim } \mathcal{E}$. $\square$

9.18. Лемма. Функтор $\hat{F}$ удовлетворяет следующему варианту аксиомы Майера — Вьеториса

MB_{cl}), для любой клеточной триады $(X; A, B)$, в которой $A \cap B$ — конечное клеточное пространство, и для любых $a \in \hat{F}(A)$, $b \in \hat{F}(B)$ с $a|_{A \cap B} = b|_{A \cap B}$ существует элемент $x \in \hat{F}(X)$ с $x|_A = a$ и $x|_B = b$.

Доказательство. Множество всех конечных клеточных подпространств из A , содержащих $A \cap B$, кофинально в множестве всех конечных клеточных подпространств из A . Другими словами, для каждого конечного клеточного подпространства $C \subset A$ существует такое конечное клеточное подпространство C' , что $A \cap B \subset C'$ и $C \subset C'$. Следовательно,

$$\hat{F}(A) = \text{inv lim } F(A_\alpha),$$

где A_α пробегает множество всех конечных клеточных подпространств A , содержащих $A \cap B$. Аналогично,

$$\hat{F}(B) = \text{inv lim } F(B_\beta),$$

где B_β пробегает множество всех конечных клеточных подпространств B , содержащих $A \cap B$, и

$$\hat{F}(X) = \text{inv lim } F(A_\alpha \cup B_\beta).$$

Разумеется, $\hat{F}(A \cap B) = F(A \cap B)$.

Предположим, что нам заданы элементы $a \in \hat{F}(A)$, $b \in \hat{F}(B)$, удовлетворяющие условию $a|_{A \cap B} = b|_{A \cap B}$. Если $a = \{a_\alpha\}$, $b = \{b_\beta\}$, то $a_\alpha|_{A \cap B} = b_\beta|_{A \cap B}$ для всех α, β . Обозначим через $X_{\alpha\beta} \subset F(A_\alpha \cup B_\beta)$ множество всех таких элементов w , что $w|_{A_\alpha} = a_\alpha$, $w|_{B_\beta} = b_\beta$. Поскольку функтор F удовлетворяет аксиоме Майера — Вьеториса, то $X_{\alpha\beta} \neq \emptyset$ для всех α, β . Если $A_\alpha \subset A_\theta$ и $B_\beta \subset B_\phi$, то мы имеем вложение $A_\alpha \cup B_\beta \subset A_\theta \cup B_\phi$, индуцирующее морфизм $X_{\theta\phi} \rightarrow X_{\alpha\beta}$. Пусть $\mathcal{E}$ — категория, объектами которой являются множества $X_{\alpha\beta}$, а морфизмы индуцированы описанными выше отображениями. Очевидно, что эта категория обладает свойствами i), iii) и iv). Докажем свойство ii), утверждающее, что морфизмы $X_{\theta\phi} \rightarrow X_{\alpha\beta}$ сюръективны.

Аналогично предложению 9.4 доказывается, что последовательность

$$F(X) \xrightarrow{f} F(Y) \xrightarrow{g} F(Y \cup_i CX)$$

точна для любого отображения $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ из $\mathcal{F}\mathcal{W}_F$. Отсюда обычным способом устанавливается точность последовательности

$$F(X) \xrightarrow{f_*} F(X) \xrightarrow{f_*} F(Y \cup CX) \xleftarrow{k^*} F(SX) \xrightarrow{Sf^*} F(SY) \leftarrow \dots$$

и, наконец, выводится точность последовательности Майера — Вьеториса в категории $\mathcal{F}\mathcal{W}'_F$:

$$F(A \cap B) \leftarrow F(A) \times F(B) \leftarrow F(X) \leftarrow F(S(A \cap B)) \leftarrow \\ F(SA) \times F(SB) \cong F(SA \vee SB).$$

Таким образом, для любых $A_\alpha \subset A_\theta$, $A_\gamma \subset A_\theta$, $B_\beta \subset B_\phi$, $B_\delta \subset B_\phi$ имеет место коммутативная диаграмма точных последовательностей

$$\begin{array}{ccccccc} F(A_\alpha) \times F(B_\beta) & \longleftarrow & F(A_\alpha \cup B_\beta) & \xleftarrow{\Delta_1} & F(S(A \cap B)) & \xleftarrow{g_{z\beta}} & F(S(A_\alpha \vee B_\beta)) \\ \uparrow & & \uparrow j_1^* & & \parallel & & \uparrow \\ F(A_\theta) \times F(B_\phi) & \longleftarrow & F(A_\theta \cup B_\phi) & \xleftarrow{\Delta_2} & F(S(A \cap B)) & \xleftarrow{g_{\theta\phi}} & F(S(A_\theta \vee B_\phi)) \\ \downarrow & & \downarrow j_2^* & & \parallel & & \downarrow \\ F(A_\gamma) \times F(B_\delta) & \longleftarrow & F(A_\gamma \cup B_\delta) & \xleftarrow{\Delta_3} & F(S(A \cap B)) & \xleftarrow{g_{\gamma\delta}} & F(S(A_\gamma \vee B_\delta)). \end{array}$$

Пусть $w \in X_{\alpha\beta}$ и w' — произвольный элемент из $X_{\theta\phi}$. Тогда элемент $w - j_1^* w'$ при отображении в $F(A_\alpha) \times F(B_\beta)$ переходит в 0. Следовательно, существует такой $z \in F(S(A \cap B))$, что $\Delta_{1z} = w - j_1^* w'$. Но это означает, что $j_1^* (\Delta_{2z} + w') = w - j_1^* w' + j_1^* w' = w$, т. е. $j_1^* (X_{\theta\phi}) = X_{\alpha\beta}$.

Множество $\text{inv lim } \mathcal{C}$ состоит из тех элементов $x \in \text{inv lim } F(A_\alpha \cup B_\beta) = \hat{F}(X)$, для которых $x|A = a$, $x|B = b$. Таким образом, достаточно показать, что $\text{inv lim } \mathcal{C} \neq \emptyset$. Для того чтобы применить предложение 9.17, нужно убедиться, что категория $\mathcal{C}$ содержит не более, чем счетное число классов эквивалентности. С этой целью мы сейчас докажем следующее утверждение: морфизм $f: X_{\gamma\delta} \rightarrow X_{\alpha\beta}$ в категории $\mathcal{C}$ существует тогда и только тогда, когда $\text{im } g_{\gamma\delta} \subset \text{im } g_{z\beta}$ (см. диаграмму 9.19).

Предположим, что морфизм $f: X_{\gamma\delta} \rightarrow X_{\alpha\beta}$ в $\mathcal{C}$ существует. Это означает, что найдется пара индексов (θ, ϕ) и такие морфизмы $\mu: X_{\theta\phi} \rightarrow X_{\gamma\delta}$, $\nu: X_{\theta\phi} \rightarrow X_{\alpha\beta}$ в $\mathcal{C}$, для которых $f \cdot \mu = \nu$. Для любого $w \in F(S(A_\gamma \vee B_\delta))$ мы имеем $\Delta_{3 \cdot g_{\gamma\delta}}(w) = 0 \in F(A_\gamma \cup B_\delta)$. Пусть $x \in X_{\theta\phi}$ — произвольный элемент. Тогда в $F(A_\alpha \cup B_\beta)$ вы-

полияется цепочка равенств

$$\begin{aligned} v(x) + \Delta_1 g_{\gamma\delta}(w) &= v(x + \Delta_2 g_{\gamma\delta}(w)) = f \cdot \mu(x + \Delta_2 g_{\gamma\delta}(w)) = \\ &= f(\mu(x) + \Delta_3 g_{\gamma\delta}(w)) = f \cdot \mu(x) = v(x). \end{aligned}$$

Следовательно, $\Delta_1 g_{\gamma\delta}(w) = 0$ и, значит, существует такой элемент $w' \in F(S(A_\alpha \vee B_\beta))$, что $g_{\alpha\beta}(w') = g_{\gamma\delta}(w)$. Таким образом, $\text{im } g_{\gamma\delta} \subset \text{im } g_{\alpha\beta}$.

Обратно, пусть $\text{im } g_{\gamma\delta} \subset \text{im } g_{\alpha\beta}$. Построим морфизм $f: X_{\gamma\delta} \rightarrow X_{\alpha\beta}$. С этой целью положим $A_\theta = A_\alpha \cup A_\gamma$, $B_\phi = B_\beta \cup B_\delta$ и для любого $x \in X_{\gamma\delta}$ выберем такой элемент $x' \in X_{\theta\phi}$, что $j_2^*(x') = x$. Зададим морфизм f формулой $f(x) = j_1^*(x')$. Мы должны показать, что f корректно определен. Предположим, что элемент $x'' \in X_{\theta\phi}$ также удовлетворяет условию $j_2^*(x'') = x$. Очевидно, что $j_2^*(x' - x'') = 0$. Кроме того, элемент $x' - x''$ при отображении в $F(A_\theta) \times F(B_\phi)$ переходит в 0. Следовательно, найдется такой $u \in F(S(A \cap B))$, что $\Delta_2 u = x' - x''$. Так как $\Delta_3 u = j_2^*(x' - x'') = 0$, то существует элемент $w \in F(S(A_\gamma \vee B_\delta))$ с $g_{\gamma\delta}(w) = u$. Выберем элемент $w' \in F(S(A_\alpha \vee B_\beta))$ так, что $g_{\alpha\beta}(w') = g_{\gamma\delta}(w) = u$. Тогда

$$0 = \Delta_1 g_{\alpha\beta}(w') = \Delta_1(u) = j_1^*(x' - x'') = j_1^*(x') - j_1^*(x'').$$

Значит, $j_1^*(x') = j_1^*(x'')$, т. е. морфизм f корректно определен. Очевидно, что $f \cdot (j_2^* | X_{\theta\phi}) = j_1^* | X_{\theta\phi}$. В частности, $X_{\alpha\beta} \simeq X_{\gamma\delta}$ в категории $\mathcal{E}$ тогда и только тогда, когда $\text{im } g_{\alpha\beta} = \text{im } g_{\gamma\delta}$. Заметим теперь, что существует лишь счетное число классов гомотопически эквивалентных конечных клеточных пространств. Чтобы убедиться в этом, достаточно, например, взять в каждом гомотопическом типе конечное симплициальное пространство. Далее, существует лишь счетное число гомотопических классов отображений $S(A \cap B)$ в это семейство конечных симплициальных пространств (это можно увидеть, заменив $S(A \cap B)$ конечным симплициальным пространством; тогда каждый гомотопический класс отображений содержит симплициальное отображение). Следовательно, может существовать не более чем счетное число различных множеств $\text{im } g_{\alpha\beta}$. Это показывает, что $\mathcal{E}$ содержит лишь счетное число классов эквивалентности. Таким образом, в силу 9.17 $\text{inv } \lim \mathcal{E} \neq \emptyset$. $\square$

Назовем элемент $u \in \hat{F}(Y)$ n -универсальным, если $T_u: [S^q, s_0; Y, y_0] \rightarrow F(S^q)$ является изоморфизмом при $q < n$ и эпиморфизмом при $q = n$. Элемент u называется универсальным, если он n -универсален для всех $n \geq 0$.

9.20. Лемма. Для любого клеточного пространства $(Y, y_0) \in \mathcal{F}\mathcal{U}$ с n -универсальным элементом $u_n \in \hat{F}(Y)$ найдутся клеточное пространство Y' , получающееся из Y приклеиванием к нему $(n+1)$ -мерных клеток, и такой $(n+1)$ -универсальный элемент $u_{n+1} \in \hat{F}(Y')$, что $u_{n+1} | Y = u_n$.

Доказательство. Построим пространство Y' как в доказательстве леммы 9.8, приклеивая $(n+1)$ -мерные клетки e_α^{n+1} для каждого $\alpha \in \pi_n(Y, y_0)$ с $T_{u_n}(\alpha) = 0$ и $(n+1)$ -мерные сферы S_λ^{n+1} для каждого $\lambda \in F(S^{n+1})$. Обозначим через S множество всех таких пар (Y'', u) , что Y'' — клеточное подпространство в Y' , содержащее Y , а $u \in \hat{F}(Y'')$ удовлетворяет условию $u|_Y = u_n$. На S имеется очевидное отношение частичного порядка: $(Y''_1, u_1) \leq (Y''_2, u_2)$ тогда и только тогда, когда Y''_1 — клеточное подпространство в Y''_2 и $u_2|_{Y''_1} = u_1$.

Из леммы 9.16 вытекает, что множество S индуктивно, т. е. удовлетворяет условиям леммы Цорна. Следовательно, S содержит максимальный элемент (Y''_0, u_0) . Покажем теперь, что $Y''_0 = Y'$.

Предположим, что Y''_0 не содержит какой-либо $(n+1)$ -мерной клетки e_α^{n+1} из $Y' - Y$. Если $g: (S^n, s_0) \rightarrow Y \subset Y''_0$ — приклеивающее отображение клетки e_α^{n+1} , то по лемме 9.18 имеет место точная последовательность $\hat{F}(S^n) \xrightarrow{g^*} \hat{F}(Y''_0) \xrightarrow{i^*} \hat{F}(Y''_0 \cup e_\alpha^{n+1})$. Но $g^*(u_0) = g^*(u_n) = T_{u_n}(\alpha) = 0$ и, стало быть, существует элемент $u_1 \in \hat{F}(Y''_0 \cup e_\alpha^{n+1})$ с $u_1|_{Y''_0} = u_0$, что противоречит максимальной паре (Y''_0, u_0) . Аналогично, если Y''_0 не содержит какую-нибудь сферу S_λ^{n+1} , то по аксиоме суммы найдется элемент $u_1 \in \hat{F}(Y''_0 \vee S_\lambda^{n+1})$ с $u_1|_{Y''_0} = u_0$, что снова противоречит максимальной паре (Y''_0, u_0) . Следовательно, $Y''_0 = Y'$.

Теперь положим $u_{n+1} = u_0 \in \hat{F}(Y')$. Тот факт, что элемент u_{n+1} является $(n+1)$ -универсальным, доказывается точно так же, как в лемме 9.8. $\square$

После всего сказанного, теорема о представимости функтора F доказывается точно так же, как теорема 9.12. Итак, мы получаем следующее утверждение.

9.21. Теорема (Адамс)¹⁾. Пусть $F: \mathcal{FW}'_F \rightarrow \mathcal{E}$ — кофунктор, удовлетворяющий слабой аксиоме суммы и слабой аксиоме Майера — Вьеториса. Тогда существуют представляющее пространство $(Y, y_0) \in \mathcal{FW}$ и естественная эквивалентность $T: [-; Y, y_0] \rightarrow F$ на $\mathcal{FW}'_F$. $\square$

В действительности существует универсальный элемент $u \in \hat{F}(Y)$, и эквивалентность T имеет вид

$$T = T_u: [X, x_0; Y, y_0] \rightarrow \hat{F}(X) = F(X)$$

для $(X, x_0) \in \mathcal{FW}'_F$.

Кроме того, имеет место теорема о представимости естественных преобразований в категории $\mathcal{FW}'_F$. Для того чтобы сформулировать эту теорему, нам понадобится следующее определение.

¹⁾ Здесь опять-таки надо считать F заданным на категории *связанных* конечных клеточных пространств. — *Прим. ред.*

9.22. Два отображения $f, g: X \rightarrow Y$ называются *слабо гомотопными*, если для любого конечного клеточного пространства Z и любого отображения $h: Z \rightarrow X$ мы имеем $f \cdot h \simeq g \cdot h$. Будем обозначать слабо гомотопные отображения символом $f \simeq_w g$. Без труда проверяется, что $\simeq_w$ есть отношение эквивалентности. Обозначим через $[X, Y]_w$ (соответственно, $[X, x_0; Y, y_0]_w$) множество всех классов слабой гомотопности отображений $f: X \rightarrow Y$ (соответственно, $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)^1$).

9.23. Предложение. *Существуют естественные эквивалентности*

$$\hat{F}(X) \cong \text{Nat}_{\mathcal{F}\mathcal{W}'_F}([--; X, x_0], F) \cong \text{Nat}_{\mathcal{F}\mathcal{W}'_F}([--; X, x_0]_w, \hat{F}), \quad (X, x_0) \in \mathcal{F}\mathcal{W}'$$

(для любых кофункторов $G, H: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ символом $\text{Nat}_{\mathcal{C}}(G, H)$ обозначается множество всех естественных преобразований $T: G \rightarrow H$ в категории $\mathcal{C}$).

Доказательство. Если задан элемент $u \in \hat{F}(X)$, положим

$$T_u: [--; X, x_0] \rightarrow F$$

в $\text{Nat}_{\mathcal{F}\mathcal{W}'_F}([--; X, x_0], F)$. Наоборот, для данного преобразования $T \in \text{Nat}_{\mathcal{F}\mathcal{W}'_F}([--; X, x_0], F)$ возьмем элемент

$$\{T[i_\alpha]\} \in \text{inv lim } F(X_\alpha) = \hat{F}(X),$$

где $i_\alpha: X_\alpha \rightarrow X$ — вложение. Если элемент $u \in \hat{F}(X) = \text{inv lim } F(X_\alpha)$ имеет вид $u = \{u_\alpha\}$, то $\{T_u[i_\alpha]\} = \{i_\alpha^*(u)\} = \{u_\alpha\} = u$. Следовательно, композиция $u \mapsto T_u \mapsto \{T_u[i_\alpha]\}$ является тождественным отображением на $\hat{F}(X)$. Пусть теперь $T \in \text{Nat}_{\mathcal{F}\mathcal{W}'_F}([--; X, x_0], F)$ и $u = \{T[i_\alpha]\}$. Для любого $[f] \in [K, k_0; X, x_0]$ (K — конечное клеточное пространство) можно найти такой номер β , что $f(K) \subset X_\beta$. Другими словами, $f = i_\beta \cdot f'$ для некоторого $f': (K, k_0) \rightarrow (X_\beta, x_0)$. Следовательно,

$$T_u[f] = f^*(u) = f'^* i_\beta^*(u) = f'^*(T[i_\beta]) = T(f'^*[i_\beta]) = T[i_\beta \cdot f'] = T[f],$$

т. е. $T_u = T$. Итак, композиция $T \mapsto \{T[i_\alpha]\} \mapsto T_u$ является тождественным отображением множества $\text{Nat}_{\mathcal{F}\mathcal{W}'_F}([--; X, x_0], F)$.

Эквивалентность

$$\hat{F}(X) \cong \text{Nat}_{\mathcal{F}\mathcal{W}'_F}([--; X, x_0]_w, \hat{F})$$

доказывается аналогично. $\square$

¹⁾ Конечно, здесь надо очевидным образом изменить определение слабой гомотопности так, чтобы учесть отмеченные точки. — *Прим. ред.*

Это предложение показывает, почему $\hat{F}$ играет такую решающую роль в теореме о представимости.

Очевидно, что $[X, x_0; Y, y_0]_w = [X, x_0; Y, y_0]$ для конечного клеточного пространства X . Если $u \in \hat{F}(Y)$ — универсальный элемент из теоремы 9.21, то естественное преобразование $T_u: [-; Y, y_0] \rightarrow F$ в $\mathcal{FW}'_F$ допускает продолжение $\hat{T}_u: [-; Y, y_0]_w \rightarrow \hat{F}$ на категорию $\mathcal{FW}'$. Это продолжение также является естественной эквивалентностью. Действительно, если $f, g: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ таковы, что $\hat{T}_u[f]_w = \hat{T}_u[g]_w$ и $h: (K, k_0) \rightarrow (X, x_0)$ — произвольное отображение клеточного пространства K в X , то $h^*(\hat{T}_u[f]_w) = h^*(\hat{T}_u[g]_w)$, т. е. $T_u[f \cdot h] = T_u[g \cdot h]$. Поскольку T_u — биекция, то $f \cdot h \simeq g \cdot h$, т. е. $f \simeq_w g$. Отсюда следует, что $\hat{T}_u$ инъективно. Точно так же показывается, что $\hat{T}_u$ сюръективно.

9.24. Теорема. Пусть $F, F': \mathcal{FW}'_F \rightarrow \mathcal{S}$ — два кофунктора с представляющими пространствами $(Y, y_0), (Y', y'_0)$ и универсальными элементами u, u' соответственно. Если $T: F \rightarrow F'$ — естественное преобразование, то существует такое единственное с точностью до слабой гомотопности отображение $\hat{f}: (Y, y_0) \rightarrow (Y', y'_0)$, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} [X, x_0; Y, y_0] & \xrightarrow{f_*} & [X, x_0; Y', y'_0] \\ \downarrow T_u(X) & & \downarrow T_{u'}(X) \\ F(X) & \xrightarrow{T(X)} & F'(X) \end{array}$$

коммутативна для всех $(X, x_0) \in \mathcal{FW}'_F$.

Доказательство. Существует очевидное продолжение $\hat{T}: \hat{F} \rightarrow \hat{F}'$ преобразования T на категорию $\mathcal{FW}'$. В самом деле, $\hat{T}(X) = \text{inv} \lim T(X_\alpha)$ для $(X, x_0) \in \mathcal{FW}'$. Выберем класс

$$[f]_w \in [Y, y_0; Y', y'_0]_w$$

таким образом, чтобы

$$\hat{T}(Y) \cdot \hat{T}_u(Y)([1_Y]_w) = \hat{T}_{u'}(Y)([f]_w).$$

Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} [X, x_0; Y, y_0]_w & \xrightarrow{f_*} & [X, x_0; Y', y'_0]_w \\ \downarrow \hat{T}_u(X) & & \downarrow \hat{T}_{u'}(X) \\ \hat{F}(X) & \xrightarrow{\hat{T}(X)} & \hat{F}'(X) \end{array}$$

коммутативна для всех $(X, x_0) \in \mathcal{FW}'$ и сводится к диаграмме, фигурирующей в формулировке теоремы 9.24 в случае, когда X — конечное клеточное пространство¹⁾. $\square$

Естественно, что отображение f определено лишь с точностью до слабой гомотопности.

9.25. У п р а ж н е н и е. Предположим, что $F: \mathcal{FW}' \rightarrow \mathcal{E}$ — ко-функтор, удовлетворяющий аксиомам суммы и Майера — Вьеториса. Пусть $(X, x_0) \in \mathcal{FW}'$ и $\{X_\alpha\}$ — обратная система всех конечных клеточных подпространств X_α , содержащих отмеченную точку x_0 . Показать, что естественный морфизм $F(X) \rightarrow \text{inv lim } F(X_\alpha)$ сюръективен.

9.26. У п р а ж н е н и е. Определить понятие слабой H -группы и показать, что представляющее пространство (Y, y_0) из теоремы 9.21 может быть таким образом снабжено структурой слабой H -группы, что $T_n: [-; Y, y_0] \rightarrow F$ будет естественной эквивалентностью кофункторов из $\mathcal{FW}'_F$ в категорию групп $\mathcal{E}$.

Предположим теперь, что k^* — приведенная теория когомологий, определенная или на $\mathcal{FW}'_F$, или же на $\mathcal{FW}'$, и во втором случае удовлетворяющая аксиоме суммы.

9.27. Т е о р е м а. *Существуют Ω -спектр E и естественная эквивалентность*

$$T: \tilde{E}^* \rightarrow k^*.$$

Доказательство. Пусть

$$F = k^n: \mathcal{FW}' \rightarrow \mathcal{A} \quad (\text{или } \mathcal{FW}'_F \rightarrow \mathcal{A}).$$

В силу теоремы 7.19 кофунктор F удовлетворяет аксиоме Майера — Вьеториса. Если областью определения F является категория $\mathcal{FW}'$, то по предположению он удовлетворяет аксиоме суммы. Если же F определен на $\mathcal{FW}'_F$, то из предложения 7.36 следует, что он удовлетворяет слабой аксиоме суммы. Значит, в любом случае для $F = k^n$ существуют представляющее пространство²⁾ E_n и универсальный элемент $u_n \in k^n(E_n)$ (или же $u_n \in \hat{F}(E_n)$).

Теперь мы имеем естественные эквивалентности³⁾

$$[X, x_0; \Omega E_{n+1}, \omega_0] \xrightarrow{A^{-1}} [SX, *; E_{n+1}, *] \xrightarrow{T_{n+1}} k^{n+1}(SX) \xrightarrow{\sigma} k^n(X).$$

¹⁾ Единственность отображения f (с точностью до слабой гомотопности) легко следует из единственности отображения f_* . — *Прим. ред.*

²⁾ Чтобы доказать представимость функтора $F = k^n$ на всей категории $\mathcal{FW}'$, воспользуемся следующим рассуждением. Представим k^n в виде композиции $\mathcal{FW}' \xrightarrow{S} \mathcal{FW}'_C \xrightarrow{k^{n+1}} A$, где S — функтор надстройки. Функтор k^{n+1} представим, так что $k^{n+1}(SX) = [SX, *; Y_{n+1}, *]$. Теперь имеем $k^n(X) \cong k^{n+1}(SX) = [SX, *; Y_{n+1}, *] = [X, *; \Omega Y_{n+1}, *]$ и можно положить $E_n = \Omega Y_{n+1}$. — *Прим. ред.*

³⁾ Если k^* определена на $\mathcal{FW}'_F$, а $X \in \mathcal{FW}'$, то в последних двух группах вместо k должно стоять $\hat{k}$. — *Прим. ред.*

Следовательно, существуют отображения $\phi_n: E_n \rightarrow \Omega E_{n+1}$ и $\psi_n: \Omega E_{n+1} \rightarrow E_n$, представляющие $A \cdot T_{u_{n+1}}^{-1} \cdot \sigma^{-1}$ и $\sigma \cdot T_{u_{n+1}} \cdot A^{-1}$. Но тогда $\psi_n \cdot \phi_n$ и $\phi_n \cdot \psi_n$ представляют тождественные преобразования и, значит, $\psi_n \cdot \phi_n \simeq 1$, $\phi_n \cdot \psi_n \simeq 1$, или, по крайней мере, $\psi_n \cdot \phi_n \simeq_w 1$, $\phi_n \cdot \psi_n \simeq_w 1$. В последнем случае ϕ_n, ψ_n являются слабыми гомотопическими эквивалентностями. Таким образом, семейство $\{E_n, \phi_n\}$ определяет Ω -спектр.

Рассмотрим следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccc}
 k^{n+1}(SX) & \xrightarrow{\sigma} & k^n(X) \\
 T_{u_{n+1}} \uparrow & [SX, *; SE_n, *] & \uparrow T_{u_n} \\
 [SX, *; E_{n+1}, *] & \xleftarrow{\varepsilon_n * \Sigma} & [X, x_0; E_n, *] \\
 A \searrow & & \swarrow \phi_n * \\
 & [X, x_0; \Omega E_{n+1}, \omega_0] &
 \end{array}$$

Если взять в качестве $\varepsilon_n: SE_n \rightarrow E_{n+1}$ отображение, сопряженное к ϕ_n , то данная диаграмма станет коммутативной. Это означает, что естественные преобразования T_{u_n} определяют естественную эквивалентность теорий когомологий. $\square$

Разумеется, аналогичная теорема о представимости имеет место также и для естественных преобразований теорий когомологий на $\mathcal{FW}'$.

9.28. Теорема. Если E, E' — некоторые Ω -спектры и $T: \tilde{E}^* \rightarrow \tilde{E}'^*$ — естественное преобразование теорий когомологий на $\mathcal{FW}'$, то существует такое отображение спектров $f: E \rightarrow E'$, что $T = T_f$. $\square$

К сожалению, очевидная попытка доказать соответствующий результат для естественных преобразований на категории $\mathcal{FW}'_F$ терпит неудачу. В самом деле, мы по-прежнему можем найти отображения $f_n: E_n \rightarrow E'_n$, индуцирующие гомоморфизмы $T_n: \tilde{E}^n(-) \rightarrow \tilde{E}'^n(-)$. Однако диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
 E_n & \xrightarrow{f_n} & E'_n \\
 \phi_n \downarrow & & \downarrow \phi'_n \\
 \Omega E_{n+1} & \xrightarrow{\Omega f_{n+1}} & \Omega E'_{n+1}
 \end{array}$$

будут теперь коммутативны лишь с точностью до слабой гомотопности, а не с точностью до гомотопности, как требуется для того, чтобы получить отображение спектров.

Поэтому мы выберем несколько иной подход. Будем рассматривать теории когомологий k^* , определенные на категории $\mathcal{SP}_F$

конечных спектров. Если $X \in \mathcal{SP}_F$, положим

$$\hat{k}^*(X) = \operatorname{inv} \lim k^*(X_\alpha),$$

где X_α пробегает множество всех конечных подспектров X . Тогда имеют место естественные эквивалентности

$$\hat{k}^*(E) \cong \operatorname{Nat}_{\mathcal{SP}_F}(E^*, k^*) \cong \operatorname{Nat}_{\mathcal{SP}}([—; E]_w^*, \hat{k}^*),$$

где слабая гомотопность отображений спектров определяется очевидным образом и через $[—; E]_w^*$ обозначено семейство кофункторов $[—; E]_w^* = [—; \sum_{\mathbb{Z}} E]_w$, $n \in \mathbb{Z}$.

Функтор $\hat{k}^*$ не является теорией когомологий, однако он удовлетворяет аналогам слабой аксиомы суммы и аксиомы Майера — Вьеториса. Элемент $u \in \hat{k}^0(E)$ называется n -универсальным, если $T_u: \pi_q(E) = E^0(S^q) \rightarrow k^0(S^q)$ — изоморфизм для $q < n$ и эпиморфизм для $q = n$.

9.29. Лемма. *Предположим, что $k^q(S^0) = 0$ для всех $q > 0$. Для любых спектра F и n -универсального элемента $u \in \hat{k}^0(F)$, $n \geq 0$, найдутся спектр E , содержащий F в качестве подспектра, и такой $(n+1)$ -универсальный элемент $u \in \hat{k}^0(E)$, что $u|_F = v$.*

Доказательство. Для любого $\alpha \in F^0(S^n)$ с $T_u(\alpha) = 0$ выберем представляющее отображение $f_\alpha: \Sigma^n S^0 \rightarrow F$ и приклеим к F по этому отображению клетку e_α^{n+1} . Обозначим через F' спектр, получающийся из F в результате такой приклейки, и положим $E = F' \vee (\bigvee_\lambda \Sigma^{n+1} S^0)$, где λ пробегает группу $\hat{k}^0(S^{n+1}) = k^0(S^{n+1})$.

Построение элемента u и доказательство его $(n+1)$ -универсальности производится так же, как в лемме 9.20. $\square$

Теперь мы в состоянии доказать аналог леммы 9.11 и, следовательно, существование естественной эквивалентности

$$\hat{T}_u: [—; E]_w^* \rightarrow \hat{k}^*$$

в предположении, что $k^q(S^0) = 0$, $q > 0$.

9.30. Теорема. *Пусть k^* , k'^* — определенные на $\mathcal{SP}_F$ теории когомологий с представляющими спектрами E , E' и универсальными элементами u , u' соответственно. Предположим, что $k^q(S^0) = k'^q(S^0) = 0$, $q > 0$. Если $T: k^* \rightarrow k'^*$ — естественное преобразование, то существует единственное с точностью до слабой гомотопности отображение спектров $f: E \rightarrow E'$, для которого коммутативна диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} E^* & \xrightarrow{T_f} & E'^* \\ T_u \downarrow & & \downarrow T_{u'} \\ k^* & \xrightarrow{T} & k'^* \end{array} \quad \square$$

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Теорема Брауна о представимости явилась поворотным моментом в развитии алгебраической топологии. После появления этой теоремы стало ясно, что многие наиболее важные функторы в алгебраической топологии являются, по существу, гомотопическими функторами, и следовательно, к ним применимы методы гомотопической топологии. Теорема 9.27 показывает, что значительная часть теории когомологий является ветвью стабильной гомотопической теории. В главах 10, 11 и 12 мы рассмотрим различные конкретные примеры представляющих пространств и спектров, а в главе 14 будет доказана теорема о представимости для теорий гомологий.

ССЫЛКИ НА ЛИТЕРАТУРУ

1. Адамс [9].	3. Спеньер [72].
2. Браун [27].	4. Уайтхед [81].

Под *классической* теорией гомологий мы будем понимать такую теорию k_* , что $k_n(S^0) = 0$ для всех $n \neq 0$. Если $k_0(S^0) = G$, то k_* называется (классической) теорией гомологий с коэффициентами в группе G . Приведенные сингулярные гомологии $\tilde{H}_*(-; G)$ представляют собой пример классической теории гомологий с коэффициентами в G , определенной на категории $\mathcal{FT}'$.

В этой главе мы покажем, что любые две классические теории гомологий с коэффициентами в G , удовлетворяющие аксиомам суммы и слабой гомотопической эквивалентности, естественно эквивалентны. Кроме того, мы построим спектр Эйленберга — Маклейна $H(G)$ с

$$\pi_n(H(G)) = \begin{cases} G, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

Отвечающая этому спектру теория гомологий $H(G)_*(-)$ есть не что иное, как классическая теория гомологий с коэффициентами в G . Таким образом, на категории $\mathcal{FT}'$ имеет место естественная эквивалентность $H(G)_*(-) \cong \tilde{H}_*(-; G)$. И в завершение главы мы найдем условия, при выполнении которых гомоморфизм Гуревича

$$h: \pi_n(Y, y_0) \rightarrow H_n(Y; \mathbb{Z})$$

(см. определение 7.39) будет изоморфизмом.

10.1. Пусть $n \geq 0$ — некоторое целое число. *Стандартным n -мерным симплексом* $\Delta_n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ называется симплекс с вершинами $e_0 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_1 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $e_n = (0, \dots, 0, 1)$. Для любого i , $0 \leq i \leq n$, определим отображение $\partial_i: \Delta_{n-1} \rightarrow \Delta_n$, задавая его на вершинах формулой

$$\partial_i(e_k) = \begin{cases} e_k, & k < i, \\ e_{k+1}, & k \geq i, \end{cases}$$

и распространяя на весь симплекс Δ_{n-1} по линейности, т. е. полагая

$$\partial_i \left(\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j e_j \right) = \sum \lambda_j \partial_i(e_j)$$

для всех $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$, таких, что $\lambda_j \geq 0$, $0 \leq j \leq n-1$, и $\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j = 1$.

Сингулярным n -мерным симплексом в топологическом пространстве X называется любое (непрерывное) отображение $u: \Delta_n \rightarrow X$. Определим i -ю грань $\partial_i u$ сингулярного симплекса $u: \Delta_n \rightarrow X$ как сингулярный $(n-1)$ -мерный симплекс $u \cdot \partial_i: \Delta_{n-1} \rightarrow X$.

Обозначим через $S_n(X)$ свободную абелеву группу, порожденную сингулярными n -мерными симплексами в X . Группа $S_n(X)$ называется группой *n -мерных цепей* пространства X . Пусть

$$d: S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X).$$

— гомоморфизм абелевых групп, задаваемый на базисных элементах формулой $du = \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i u$ и называемый *дифференциалом*.

Легко видеть, что $d \cdot d = 0$; следовательно, $\{S_n(X), d\}$ является *цепным комплексом*. Положим

$$Z_n(X) = \ker \{d: S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)\} \subset S_n(X),$$

$$B_n(X) = \operatorname{im} \{d: S_{n+1}(X) \rightarrow S_n(X)\} \subset S_n(X).$$

При этом $Z_n(X)$ называется *группой циклов*, а $B_n(X)$ — *группой границ*. Так как $d \cdot d = 0$, то $B_n(X) \subset Z_n(X)$. По определению *группой сингулярных гомологий* топологического пространства X называется группа

$$H_n(X) = \begin{cases} Z_n(X)/B_n(X), & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

Для любого отображения $f: X \rightarrow Y$ определен гомоморфизм

$$f_\#: S_n(X) \rightarrow S_n(Y), \quad n \geq 0,$$

задаваемый на базисных элементах формулой $f_\#(u) = f \cdot u: \Delta_n \rightarrow Y$. Тогда для любого сингулярного симплекса u имеют место равенства

$$d \cdot f_\#(u) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (f \cdot u) \cdot \partial_i = \sum_{i=0}^n (-1)^i f_\#(\partial_i u) =$$

$$f_\# \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i u \right) = f_\#(du),$$

откуда следует, что $d \cdot f_\# = f_\# \cdot d$, т. е. что

$$f_\#: \{S_*(X), d\} \rightarrow \{S_*(Y), d\}$$

— *цепное отображение*. Поскольку

$$f_\#(Z_n(X)) \subset Z_n(Y),$$

$$f_\#(B_n(X)) \subset B_n(Y),$$

то $f_\#$ индуцирует гомоморфизм

$$f_*: H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$$

для любого $n \in \mathbb{Z}$.

Если $(X, A) \in \mathcal{T}^2$, определим $S_n(X, A)$ как факторгруппу $S_n(X)/S_n(A)$. Дифференциал $d: S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$ индуцирует дифференциал d на группе $S_*(X, A)$, и мы полагаем

$$H_n(X, A) = \ker d / \operatorname{im} d = \begin{cases} Z_n(X, A) / B_n(X, A), & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

Отображение $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ определяет гомоморфизм пар

$$f_*: (S_n(X), S_n(A)) \rightarrow (S_n(Y), S_n(B)),$$

который, в свою очередь, задает гомоморфизм

$$f_*: S_n(X, A) \rightarrow S_n(Y, B).$$

Как и прежде, f_* индуцирует гомоморфизм групп гомологий

$$f_*: H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Пусть

$$0 \rightarrow A_* \xrightarrow{f_*} B_* \xrightarrow{g_*} C_* \rightarrow 0$$

— точная последовательность цепных комплексов и цепных отображений. Для каждого $n \in \mathbb{Z}$ построим гомоморфизм $\partial_n: H_n(C_*) \rightarrow H_{n-1}(A_*)$ следующим образом. Если $z \in Z_n(C_*)$, то найдется $x \in B_n$ с $g_n(x) = z$. Тогда $g_{n-1}(d_B x) = d_C g_n(x) = d_C z = 0$, и в силу точности существует такой элемент $y \in A_{n-1}$, что $f_{n-1}(y) = d_B x$. Следовательно, $f_{n-2}(d_A y) = d_B f_{n-1}(y) = d_B \cdot d_B x = 0$. Но поскольку f_* — мономорфизм, то отсюда вытекает, что $d_A y = 0$, т. е. что $y \in Z_{n-1}(A)$. Положим $\partial_n\{z\} = \{y\}$. Без труда проверяется, что отображение ∂_n корректно определено и является гомоморфизмом. Если

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A_* & \xrightarrow{f_*} & B_* & \xrightarrow{g_*} & C_* \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha_* & & \downarrow \beta_* & & \downarrow \gamma_* \\ 0 & \longrightarrow & A'_* & \xrightarrow{f'_*} & B'_* & \xrightarrow{g'_*} & C'_* \longrightarrow 0 \end{array}$$

— морфизм точных последовательностей, т. е. вышеприведенная диаграмма коммутативна, то

$$\alpha_* \cdot \partial = \partial \cdot \gamma_*: H_n(C_*) \rightarrow H_{n-1}(A'_*).$$

Кроме того, последовательность

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A_*) \xrightarrow{f_*} H_n(B_*) \xrightarrow{g_*} H_n(C_*) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A_*) \rightarrow \dots$$

точна.

Применяя эти общие результаты к точной последовательности цепных комплексов и цепных отображений

$$0 \rightarrow S_*(A, \Phi) \xrightarrow{i_*} S_*(X, \Phi) \xrightarrow{j_*} S_*(X, A) \rightarrow 0,$$

мы получим естественное преобразование

$$\partial_n(X, A): H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A, \Phi),$$

делающее точной последовательность

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A, \Phi) \xrightarrow{i_*} H_n(X, \Phi) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A, \Phi) \rightarrow \dots$$

Для любой пары $(X, A) \in \mathcal{F}^2$ и абелевой группы G образуем новый цепной комплекс $S_*(X, A; G) = \{S_n(X, A) \otimes G, d \otimes 1\}$. Определим теперь группы гомологий $H_n(X, A; G)$, полагая

$$H_n(X, A; G) = \begin{cases} H_n(S_*(X, A; G)), & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

Так как $S_n(X, A)$ — свободная абелева группа (она порождена такими сингулярными n -мерными симплексами $u: \Delta_n \rightarrow X$, что $u(\Delta_n) \not\subset A$), то последовательность

$$0 \rightarrow S_n(A, \Phi) \otimes G \xrightarrow{i \otimes 1} S_n(X, \Phi) \otimes G \xrightarrow{j \otimes 1} S_n(X, A) \otimes G \rightarrow 0$$

по-прежнему точна, и мы получаем длинную точную последовательность

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A, \Phi; G) \xrightarrow{i_*} H_n(X, \Phi; G) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A; G) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A, \Phi; G) \rightarrow \dots,$$

в которой ∂_n — естественное преобразование.

Таким образом, если мы докажем, что из $f \simeq f': (X, A) \rightarrow (Y, B)$ следует равенство

$$f_* = f'_*: H_*(X, A; G) \rightarrow H_*(Y, B; G)$$

и что $H_*(-; G)$ удовлетворяет аксиоме вырезания, то тем самым мы построим на $\mathcal{F}^2$ неприведенную теорию гомологий — так называемую теорию сингулярных гомологий с коэффициентами в G .

Рассмотрим $\Delta_n \times I$ как подпространство произведения $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}$. Для точек $v_0, v_1, \dots, v_m$ из $\mathbb{R}^{n+2}$ обозначим символом $[v_0, v_1, \dots, v_m]$ линейный сингулярный симплекс с вершинами $v_0, v_1, \dots, v_m$, т. е. такое линейное отображение $u: \Delta_m \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$, что $u(e_i) = v_i$, $0 \leq i \leq m$. Пусть $\delta_n \in S_n(\Delta_n)$ — сингулярный симплекс $l: \Delta_n \rightarrow \Delta_n$. В этих обозначениях определим $(n+1)$ -мерную цепь $P\delta_n$ в $S_{n+1}(\Delta_n \times I)$ равенством

$$P\delta_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i [(e_0, 0), \dots, (e_i, 0), (e_i, 1), \dots, (e_n, 1)].$$

Зададим теперь отображение $P: S_n(X) \rightarrow S_{n+1}(X \times I)$, полагая $Pu = (u \times 1)_\# (P\delta_n)$

для любого $u: \Delta_n \rightarrow X$ и продолжая его на всю группу $S_n(X)$ по линейности. Легко видеть, что P естественно. Непосредственно проверяется, что

$$dP\delta_n + Pd\delta_n = i_{1\#}\delta_n - i_{0\#}\delta_n,$$

где $i_0, i_1: X \rightarrow X \times I$ определяются формулами $i_0(x) = (x, 0)$, $i_1(x) = (x, 1)$, $x \in X$. Применяя к последнему равенству гомоморфизм $(u \times 1)_\#$, мы найдем, что

$$dPu + Fdu = i_{1\#}(u) - i_{0\#}(u),$$

т. е. что

$$dP + Pd = i_{1\#} - i_{0\#}.$$

Пусть теперь $F: X \times I \rightarrow Y$ — гомотопия, связывающая отображения f_0 и f_1 . Тогда $F \cdot i_0 = f_0$, $F \cdot i_1 = f_1$, так что если определить $H: S_n(X) \rightarrow S_{n+1}(Y)$ как композицию $H = F_\# \cdot P$, то

$$\begin{aligned} dH + Hd &= d \cdot F_\# \cdot P + F_\# \cdot P \cdot d = F_\# \cdot (dP + Pd) = \\ &= F_\# \cdot (i_{1\#} - i_{0\#}) = f_{1\#} - f_{0\#}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $f_{0\#}$ и $f_{1\#}$ *цепно гомотопны* и, значит,

$$f_{0*} = f_{1*}: H_*(X; G) \rightarrow H_*(Y; G).$$

Таким образом, из условия $f_0 \simeq f_1$ вытекает, что $f_{0*} = f_{1*}$.

Мы не станем вдаваться в подробности доказательства аксиомы вырезания и ограничимся лишь его наброском. Пусть $\mathcal{E} = \{U_\alpha: \alpha \in A\}$ — открытое покрытие пространства X . Обозначим через $S_*^\mathcal{E}(X)$ цепной комплекс, порожденный «маленькими» сингулярными симплексами, т. е. теми отображениями $u: \Delta_n \rightarrow X$, для которых $u(\Delta_n) \subset U_\alpha$ при некотором α . Ясно, что дифференциал d отображает $S_*^\mathcal{E}(X)$ в себя. Решающую роль в проверке аксиомы вырезания играет тот факт, что вложение $i: S_*^\mathcal{E}(X) \rightarrow S_*(X)$ является цепной гомотопической эквивалентностью. Для того чтобы доказать это утверждение, возьмем некоторый сингулярный симплекс $u: \Delta_n \rightarrow X$ и рассмотрим открытое покрытие $\{u^{-1}(U_\alpha): \alpha \in A\}$ множества Δ_n . Обозначим через λ лебегово число этого покрытия, существующее в силу компактности метрического пространства Δ_n . Применяя последовательные барицентрические подразделения, разобьем Δ_n настолько мелко, чтобы диаметры всех полученных симплексов не превышали λ . В терминах этого подразделения определим цепную гомотопию $D: S_*(X) \rightarrow S_*^\mathcal{E}(X)$ так, чтобы $dD + Dd = 1 - \tau$, где $\tau: S_*(X) \rightarrow S_*^\mathcal{E}(X)$ и $\tau|_{S_*^\mathcal{E}(X)} = 1$.

Этот результат используется следующим образом: пусть $(X; A, B)$ — триада с $X = \dot{A} \cup \dot{B}$. Положим $\mathcal{E} = \{\dot{A}, \dot{B}\}$. Тогда $S_*(X)$

цепно эквивалентен комплексу $S_*^{\mathcal{G}}(X) \cong S_*(A) + S_*(B)$. Следовательно, $S_*(X, B) = S_*(X)/S_*(B)$ цепно эквивалентен комплексу

$$(S_*(A) + S_*(B))/S_*(B) \cong S_*(A)/S_*(A) \cap S_*(B) \cong S_*(A)/S_*(A \cap B) = S_*(A, A \cap B).$$

Таким образом, гомоморфизм

$$j_*: H_*(A, A \cap B; G) \rightarrow H_*(X, B; G)$$

является изоморфизмом. Читатель, не знакомый с этим доказательством, сможет найти его в монографии Стинрода и Эйленберга [72] или же в обстоятельном учебнике Спеньера [74].

Для каждой пары (X, A) и абелевой группы G определен коцепный комплекс

$$S^*(X, A; G) = \{\text{Hom}(S_n(X, A); G), \text{Hom}(d, 1)\}.$$

Группы когомологий

$$H^n(S^*(X, A; G)) = Z^n(X, A; G)/B^n(X, A; G) = \ker \text{Hom}(d, 1) / \text{im Hom}(d, 1)$$

этого коцепного комплекса называются *группами сингулярных когомологий с коэффициентами в G пары (X, A)* .

Разумеется, можно определить и группы приведенных гомологий и когомологий на категории $\mathcal{PT}'$. Для этого достаточно положить

$$\check{H}_n(X; G) = H_n(X, \{x_0\}; G),$$

$$\check{H}^n(X; G) = H^n(X, \{x_0\}; G).$$

Так как группа сингулярных цепей $S_n(\{+\})$ одноточечного пространства $\{+\}$ в любой размерности $n \geq 0$ изоморфна группе целых чисел $\mathbb{Z}$, а дифференциал $d: S_n(\{+\}) \rightarrow S_{n-1}(\{+\})$ имеет

$$\text{вид } d(m) = m \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i, \quad m \in \mathbb{Z}, \text{ то}$$

$$H_n(\{+\}, \Phi; G) = \begin{cases} G, & n=0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

Аналогично

$$H^n(\{+\}, \Phi; G) = \begin{cases} G, & n=0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

Следовательно, $\check{H}_n$ и $\check{H}^n$ являются классическими теориями гомологий и когомологий в смысле данного выше определения.

10.2. Напомним, что в главе 6 мы построили пространства Эйленберга — Маклейна $H(G, n)$, которые характеризуются тем свойством, что

$$\pi_r(H(G, n), *) = \begin{cases} G, & r=n, \\ 0, & r \neq n. \end{cases}$$

По теореме 6.39, ii) любой гомоморфизм $\phi: G \rightarrow G'$ порождает отображение

$$H(\phi, n): H(G, n) \rightarrow H(G', n),$$

единственное с точностью до гомотопии.

Так как

$$\pi_r(\Omega H(G, n), \omega_0) \cong \pi_{r+1}(H(G, n), *) = \begin{cases} G, & r = n-1, \\ 0, & r \neq n-1, \end{cases}$$

то мы имеем отображение

$$e'_{n-1}: H(G, n-1) \rightarrow \Omega H(G, n)$$

и сопряженное к нему отображение

$$e_{n-1}: SH(G, n-1) \rightarrow H(G, n), \quad n \geq 2.$$

10.3. Лемма. Для любого гомоморфизма $\phi: G \rightarrow G'$ и любого целого числа $n \geq 2$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} SH(G, n-1) & \xrightarrow{e_{n-1}} & H(G, n) \\ \downarrow SH(\phi, n-1) & & \downarrow H(\phi, n) \\ SH(G', n-1) & \xrightarrow{e_{n-1}} & H(G', n) \end{array}$$

гомотопически коммутативна.

Доказательство. Тот факт, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H(G, n-1) & \xrightarrow{e'_{n-1}} & \Omega H(G, n) \\ \downarrow H(\phi, n-1) & & \downarrow \Omega H(\phi, n) \\ H(G', n-1) & \xrightarrow{e'_{n-1}} & \Omega H(G', n) \end{array}$$

гомотопически коммутативна, вытекает из единственности отображения f в теореме 6.39, ii). Действительно, оба отображения $\Omega H(\phi, n) \cdot e'_{n-1}$ и $e'_{n-1} \cdot H(\phi, n-1)$ индуцируют один и тот же гомоморфизм ϕ на $\pi_{n-1}(-)$ и, значит,

$$\Omega H(\phi, n) \cdot e'_{n-1} \simeq e'_{n-1} \cdot H(\phi, n-1).$$

В силу естественности экспоненциального соответствия отсюда следует, что

$$H(\phi, n) \cdot e_{n-1} \simeq e_{n-1} \cdot SH(\phi, n-1). \quad \square$$

Согласно предложению 6.35 мы можем считать, что все отображения $e_n: SH(G, n) \rightarrow H(G, n+1)$ являются клеточными отображениями. Поэтому в силу предложения 8.3 существует такой

спектр $H(G)$, что $H(G)_n \simeq H(G, n)$, $n \geq 1$, $H(G)_n = *$, $n \leq 0$. Другими словами, для всех $n \geq 1$ компоненты $H(G)_n$ спектра представляют собой пространства Эйленберга — Маклейна типа (G, n) . Из сказанного выше очевидно, что $H(G)$ является Ω -спектром. Значит,

$$\pi_n(H(G)) = \operatorname{dir} \lim \pi_{n+k}(H(G)_k, *) = \begin{cases} G, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

Следовательно, теории $H(G)_*$ и $H(G)^*$ суть классические теории гомологий и когомологий с коэффициентами в G .

Согласно лемме 10.3 любой гомоморфизм $\phi: G \rightarrow G'$ определяет такую последовательность отображений

$$H(\phi)_n: H(G)_n \rightarrow H(G')_n,$$

что $H(\phi)_n | SH(G)_{n-1} \simeq SH(\phi)_{n-1}$.

10.4. Лемма. а) Пусть E, F — два спектра с $E_n = *$ при $n < N$ для некоторого N и $f_n: E_n \rightarrow F_n$ — такое семейство отображений, что $f | SE_{n-1} \simeq Sf_{n-1}$. Тогда найдется такая функция $f': E \rightarrow F$, что $f'_n \simeq f_n$ для всех $n \in \mathbb{Z}$.

б) Пусть $g_n: E_n \rightarrow F_n$ — еще одно такое семейство отображений и $g': E \rightarrow F$ — ассоциированная с ним функция. Если $g_n \simeq f_n$ для всех $n \geq N$ и

$$\lim^1 F^{n-1}(E_n) = 0, \text{ то } g' \simeq f'.$$

Доказательство. Для $n \leq N$ возьмем $f'_n = f_n$. Предположим, что для всех $m < n$ отображения f'_m уже построены, причем $f'_m | SE_{m-1} = Sf'_{m-1}$ и $f'_m \simeq f_m$. Так как $f_n | SE_{n-1} \simeq Sf_{n-1} \simeq Sf'_{n-1}$, то можно продолжить эту гомотопию до гомотопии $E_n \wedge I^+$, которую мы обозначим через H . Ясно, что $H_0 = f_n$. Пусть $f'_n = H_1$. Тогда $f'_n | SE_{n-1} = H_1 | SE_{n-1} = Sf'_{n-1}$, и очевидно, что $f'_n \simeq f_n$. Значит, по индукции можно построить f'_n для всех n . Тогда $f' = \{f'_n\}$ будет функцией $f': E \rightarrow F$.

А теперь сделаем следующее общее замечание. Пусть

$$E^0 \subset E^1 \subset \dots \subset E^n \subset \dots \subset E$$

— некоторая фильтрация спектра E . Тогда для спектра E можно проимитировать конструкцию телескопа 7.52 и повторить доказательство предложения 7.66. В результате для произвольного спектра F мы получим точную последовательность

$$0 \rightarrow \lim_n^1 F^{q-1}(E^n) \rightarrow F^q(E) \rightarrow \lim_n^0 F^q(E^n) \rightarrow 0.$$

В нашей ситуации это замечание используется следующим образом. Спектр E имеет фильтрацию $\{E^n\}$ с

$$E_m^n = \begin{cases} E_m, & m \leq n \\ S^{m-n} E_n, & m \geq n \end{cases}, \quad n \geq 0.$$

Таким образом, мы получаем точную последовательность

$$0 \rightarrow \lim^1 F^{-1}(E^n) \rightarrow F^0(E) \rightarrow \lim^0 F^0(E^n) \rightarrow 0.$$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ [E, F] \end{array}$$

Единственность с точностью до гомотопии функции $f': E \rightarrow F$ гарантируется условием $\lim^1 F^{-1}(E^n) = 0$. Наконец, поскольку $\Sigma^{-n}E(E_n)$ является кофинальным подспектром в E^n , то $F^{-1}(E^n) \cong F^{-1}(\Sigma^{-n}E(E_n)) \cong \tilde{F}^{n-1}(E_n)$. $\square$

Замечание. Пусть $\hat{E}^n$ — подспектр в E , заданный правилом

$$\hat{E}_m^n = \begin{cases} (E_m)^{2m}, & m \leq n, \\ S^{m-n}(E_n)^{2n}, & m \geq n \end{cases}$$

($(E_m)^{2m}$ есть $2m$ -мерный остов пространства E_m). Тогда $\hat{E} = \bigcup_n \hat{E}^n$ является кофинальным подспектром в E , и очевидно, что достаточно доказать равенство

$$\lim^1 F^{-1}(\hat{E}^n) \cong \lim^1 \tilde{F}^{n-1}(E_n^{2n}) = 0.$$

Согласно результатам главы 7 (приложение), для этого достаточно, чтобы группы $H^*(E_n)$ имели конечный тип для всех n и группы $\pi_q(F)$ были конечны в случае, когда $\tilde{H}^{n+q-1}(E_n^{2n}) \neq 0$.

Итак, в этом случае мы можем считать $H(\phi) = \{H(\phi)_n\}$ функцией, задающей, следовательно, отображение спектров $H(\phi): H(G) \rightarrow H(G')$. Очевидно, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi_0(H(G)) & \xrightarrow{H(\phi)_*} & \pi_0(H(G')) \\ \parallel & \phi_* & \parallel \\ G & \xrightarrow{\quad} & G' \end{array}$$

коммутативна.

Точно так же, как в п. 8.39, отображение спектров $H(\phi): H(G) \rightarrow H(G')$ индуцирует естественное преобразование $T_*(\phi) = T_*(H(\phi)): H(G)_* \rightarrow H(G')_*$ теорий гомологий (и теорий когомологий). Преобразование $T_*(\phi)$ является естественной эквивалентностью тогда и только тогда, когда ϕ — изоморфизм.

10.5. Соответствующая конструкция для сингулярных гомологий выглядит следующим образом. Пусть задан гомоморфизм $\phi: G \rightarrow G'$. Тогда для любой пары $(X, A) \in \mathcal{S}^2$ тензорное произведение $\phi_* = 1 \otimes \phi: S_n(X, A) \otimes G \rightarrow S_n(X, A) \otimes G'$ определяет цепное отображение $\phi_*: S_*(X, A; G) \rightarrow S_*(X, A; G')$. Оно, в свою очередь, индуцирует гомоморфизм групп гомологий $\phi_*: H_*(X, A; G) \rightarrow H_*(X, A; G')$, естественный по отношению к отображениям $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$. Короткая точная последовательность $0 \rightarrow G \rightarrow$

$H \rightarrow K \rightarrow 0$ индуцирует длинную точную последовательность групп гомологий

$$\dots \rightarrow H_n(X, A; G) \rightarrow H_n(X, A; H) \rightarrow$$

$$H_n(X, A; K) \xrightarrow{\beta} H_{n-1}(X, A; G) \rightarrow \dots$$

Связывающий гомоморфизм $\beta: H_n(X, A; K) \rightarrow H_{n-1}(X, A; G)$ называется *гомоморфизмом Бокиштейна*, ассоциированным с последовательностью $0 \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow K \rightarrow 0$.

10.6. Теперь мы намереваемся разработать средства для вычисления групп классических гомологий произвольного клеточного пространства. В тех случаях, когда нам известны все приклеивающие отображения клеточного пространства, эти средства оказываются эффективными и позволяют довести вычисления до конца. Пусть $\{e_\alpha^n: \alpha \in J_n\}$ — семейство n -мерных клеток клеточного пространства X с характеристическими отображениями $f_\alpha^n: (D^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X^n, X^{n-1}, x_0)$. Обозначим через $C_n(X)$ свободную абелеву группу, порожденную множеством J_n , $n \in \mathbb{Z}$. Будем считать, что k_* — произвольная классическая теория гомологий с коэффициентами в G , удовлетворяющая аксиоме суммы.

10.7. Лемма. Для каждого $n \in \mathbb{Z}$ имеет место естественная эквивалентность

$$\kappa_n(X): k_n(X^n/X^{n-1}) \rightarrow C_n(X) \otimes G,$$

и $k_m(X^n/X^{n-1}) = 0$, если $m \neq n$.

(Напомним, что $X^k = \{x_0\}$ для $k < 0$; кроме того, $C_k(X) = 0$ для $k < 0$, поскольку $J_k = \emptyset$.)

Доказательство. Согласно следствию 5.17 мы имеем естественный изоморфизм

$$\lambda_m: k_m(X^n/X^{n-1}) \rightarrow k_m\left(\bigvee_{\alpha \in J_n} S_\alpha^n\right).$$

На основании аксиомы суммы гомоморфизм

$$\{i_{\alpha*}\}: \bigoplus_{\alpha \in J_n} k_m(S_\alpha^n) \rightarrow k_m\left(\bigvee_{\alpha \in J_n} S_\alpha^n\right)$$

является изоморфизмом. Так как

$$k_m(S^n) \xrightarrow{\sigma^{-n}} k_{m-n}(S^0) = \begin{cases} G, & m = n, \\ 0, & m \neq n, \end{cases}$$

то отсюда немедленно следует, что $k_m(X^n/X^{n-1}) = 0$ для $m \neq n$. Определим теперь гомоморфизм $\mu: C_n(X) \otimes G \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in J_n} k_0(S^0)$, задав

его на образующих формулой

$$\mu(\alpha \otimes g)_\beta = \begin{cases} g, & \beta = \alpha, \\ 0, & \beta \neq \alpha \end{cases}$$

и распространив на всю группу $C_n(X) \otimes G$ по линейности. Тогда требуемая эквивалентность $\kappa_n(X)$ определяется как композиция

$$\kappa_n(X^n/X^{n-1}) \xrightarrow{\lambda_n} k_n \left(\bigvee_{\alpha \in J_n} S_\alpha^n \right) \xrightarrow{\{i_{n*}\}} \bigoplus_{\alpha \in J_n} k_n(S^n) \xrightarrow{\oplus \sigma^{-n}} \bigoplus_{\alpha \in J_n} k_0(S^0) \xrightarrow{\mu} C_n(X) \otimes G. \quad \square$$

10.8. Следствие.

i) Если $m > n$, то $k_m(X^n) = 0$;

ii) $k_n(X^n) \rightarrow k_n(X^{n+1})$ — эпиморфизм;

iii) $k_m(X^n) \xrightarrow{i_{n*}} k_m(X)$ — изоморфизм при $m < n$.

Доказательство. Рассмотрим точную последовательность пары (X^{n+1}, X^n) :

$$\dots \rightarrow k_{m+1}(X^{n+1}/X^n) \rightarrow k_m(X^n) \xrightarrow{i_{n*}} k_m(X^{n+1}) \rightarrow k_m(X^{n+1}/X^n) \rightarrow \dots$$

Из леммы 10.7 вытекает, что гомоморфизм i_{n*} является

a) изоморфизмом для $m \neq n, n+1$;

b) эпиморфизмом для $m = n$;

c) мономорфизмом для $m = n+1$.

Таким образом, если $m > n$, то в силу предложения 7.32 мы имеем

$$k_m(X^n) \cong k_m(X^{n-1}) \cong \dots \cong k_m(X^{-1}) = k_m(\{x_0\}) = 0.$$

Утверждение ii) следует из b). Если же $m < n$, то из a) вытекает, что

$$k_m(X^n) \cong k_m(X^{n+1}) \cong \dots \cong k_m(X^r)$$

для всех $r \geq n$. Воспользуемся теперь коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} & j_n & \text{dir lim } k_m(X^r) \\ k_m(X^n) & \nearrow & \downarrow \cong \{i_{r*}\} \\ & i_{n*} & k_m(X) \end{array}$$

где j_n определяется формулой $j_n(x) = \{x\}$. В силу предложения 7.53 гомоморфизм $\{i_{r*}\}$ является изоморфизмом. Гомоморфизм j_n также изоморфизм, поскольку таковыми являются все морфизмы $j_{s*}: k_m(X^s) \rightarrow k_m(X^r)$ для $n \leq s \leq r$. Следовательно, i_{n*} — изоморфизм. $\square$

Пусть $\Delta: k_n(X^n/X^{n-1}) \rightarrow k_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2})$ — граничное отображение тройки (X^n, X^{n-1}, X^{n-2}) . Для каждого $n > 0$ определим $d: C_n(X) \otimes G \rightarrow C_{n-1}(X) \otimes G$ как гомоморфизм, превращающий

диаграмму

$$\begin{array}{ccc} k_n(X^n/X^{n-1}) & \xrightarrow[\cong]{\kappa_n(X)} & C_n(X) \otimes G \\ \downarrow \Delta & & \downarrow d \\ k_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}) & \xrightarrow[\cong]{\kappa_{n-1}(X)} & C_{n-1}(X) \otimes G \end{array}$$

в коммутативную. Ясно, что это требование определяет d однозначно. Поскольку Δ является композицией

$$k_n(X^n/X^{n-1}) \xrightarrow{\hat{\partial}} k_{n-1}(X^{n-1}) \xrightarrow{p_*} k_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}),$$

то $\Delta \cdot \Delta = p_* \cdot \hat{\partial} \cdot p_* \cdot \hat{\partial} = 0$ (здесь мы воспользовались равенством $\hat{\partial} \cdot p_* = 0$ предложения 7.33). Таким образом, $\{k_n(X^n/X^{n-1}), \Delta\}$ и $\{C_n(X) \otimes G, d\}$ — цепные комплексы и κ_n — естественная цепная эквивалентность.

10.9. Теорема. *Имеет место естественный изоморфизм*

$$H_n(\{C_*(X) \otimes G, d\}) \cong k_n(X), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Построим естественную эквивалентность $H_n(\{k_n(X^n/X^{n-1}), \Delta\}) \cong k_n(X)$. Тогда устанавливаемый теоремой изоморфизм будет композицией этой эквивалентности и естественной эквивалентности κ_* . Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} 0 = k_n(X^{n-1}) & & & & k_n(X) \\ & \downarrow & \nearrow i_{n*} & & \uparrow \cong (i_{n+1})_* \\ k_{n+1}(X^{n+1}/X^n) & \xrightarrow{\hat{\partial}} & k_n(X^n) & \xrightarrow{j_{n+1}^*} & k_n(X^{n+1}) \\ & \searrow & \downarrow p_* & & \\ & & k_n(X^n/X^{n-1}) & & \\ & & \downarrow \hat{\partial} & \searrow \Delta & \\ 0 = k_{n-1}(X^{n-2}) & \longrightarrow & k_{n-1}(X^{n-1}) & \xrightarrow{p_*} & k_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}). \end{array}$$

Элемент $z \in k_n(X^n/X^{n-1})$ является циклом тогда и только тогда, когда $\Delta z = 0$. Но

$$0 = \Delta z = p_* \hat{\partial} z \Leftrightarrow \hat{\partial} z = 0 \Leftrightarrow z \in \text{im } p_*.$$

Таким образом, p_* определяет изоморфизм

$$p_*: k_n(X^n) \rightarrow Z_n.$$

Далее, $z \in k_n(X^n/X^{n-1})$ является границей тогда и только тогда, когда $z = \Delta z'$ для некоторого $z' \in k_{n+1}(X^{n+1}/X^n)$. Но $z = p_* \hat{\partial} z' \Leftrightarrow z \in p_*(\text{im } \hat{\partial}) \Leftrightarrow z \in p_*(\ker j_{n*}^{n+1}) \Leftrightarrow z \in p_*(\ker i_{n*})$. Следовательно, p_* определяет изоморфизм $p_*: \ker i_{n*} \rightarrow B_n$. Таким образом, мы имеем коммутативную диаграмму точных последовательностей

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker i_{n*} & \longrightarrow & k_n(X^n) & \xrightarrow{i_{n*}} & k_n(X) \longrightarrow 0 \\ & & p_* \downarrow \cong & & \cong \downarrow p_* & & \\ 0 & \longrightarrow & B_n & \longrightarrow & Z_n & \longrightarrow & H_n(\{k_n(X^n/X^{n-1}), \Delta\}) \longrightarrow 0, \end{array}$$

из которой вытекает существование естественного изоморфизма

$$k_n(X) \cong H_n(\{k_n(X^n/X^{n-1}), \Delta\}). \square$$

Данное выше определение дифференциала $d: C_n(X) \otimes G \rightarrow C_{n-1}(X) \otimes G$ было неконструктивно и поэтому мало пригодно для вычислений. К счастью, как мы сейчас увидим, дифференциал d можно описать в более элементарных терминах.

10.10. Определение. Для любого $n \geq 1$ имеет место изоморфизм $\pi_n(S^n, s_0) \cong \mathbb{Z}$. Обозначим через $[1_{S^n}]$ образующую группы $\pi_n(S^n, s_0)$, соответствующую $1 \in \mathbb{Z}$. Степенью $\deg(f)$ произвольного отображения $f: (S^n, s_0) \rightarrow (S^n, s_0)$ называется целое число $m \in \mathbb{Z}$, соответствующее классу $[f]$ при указанном изоморфизме. Другими словами, если $\deg(f) = m$, то $[f] = m \cdot [1_{S^n}]$. Случай $n = 0$ особый: $\pi_0(S^0, s_0)$ — это двухэлементное множество $\{[1], [s_0]\}$. Положим $\deg(1) = 1$, $\deg(s_0) = 0$.

Для любой n -мерной клетки e_α^n в X с приклеивающим отображением $g_\alpha^n: (S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X^{n-1}, x_0)$ и любой $(n-1)$ -мерной клетки e_β^{n-1} обозначим через X_β^{n-1} клеточное пространство $X^{n-1} - \dot{e}_\beta^{n-1}$, т. е. пространство

$$X^{n-1} \cup \{\text{все } (n-1)\text{-мерные клетки, кроме } e_\beta^{n-1}\},$$

и определим $h_\beta^\alpha: (S^{n-1}, s_0) \rightarrow (S^{n-1}, s_0)$ как композицию

$$(S^{n-1}, s_0) \xrightarrow{g_\alpha^n} (X^{n-1}, x_0) \xrightarrow{p_\beta} (X^{n-1}/X_\beta^{n-1}, *) \xrightarrow{f_\beta^{n-1}} (D^{n-1}/S^{n-2}, *) \cong (S^{n-1}, s_0).$$

Интуитивно, h_β^α указывает ту часть границы клетки e_α^n , которая приклеивается к e_β^{n-1} .

10.11. Предложение. Дифференциал

$$d: C_n(X) \otimes G \rightarrow C_{n-1}(X) \otimes G$$

имеет вид $d = d' \otimes 1$, где гомоморфизм $d': C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ задается формулой

$$d'(\alpha) = \sum_{\beta \in J_{n-1}} \deg(h_{\beta}^{\alpha}) \beta, \quad \alpha \in J_n.$$

Доказательство. Для любых $\alpha \in J_n$, $g \in G$ имеем $d(\alpha \otimes g) = \sum_{\gamma \in J_{n-1}} \gamma \otimes r_{\gamma}^{\alpha}$, $r_{\gamma}^{\alpha} \in G$. Дифференциал d представляет собой композицию $d = \kappa_{n-1}(X) \cdot \Delta \cdot \kappa_n(X)^{-1}$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} k_n(S^n) & \xrightarrow{i_{\alpha*}} & k_n(\bigvee_{\beta} S_{\beta}^n) & & & & \\ \sigma^n \nearrow & \uparrow \cong & \uparrow \lambda_n \cong & & & & \\ k_0(S^0) & & & & & & \\ \downarrow k_n(D^n/S^{n-1}) & \xrightarrow{\tilde{f}_{\alpha*}} & k_n(X^n/X^{n-1}) & \searrow \Delta & & & \\ \sigma^{n-1} \searrow & \downarrow \hat{\partial} \cong & \downarrow \hat{\partial} & & & & \\ k_{n-1}(S^{n-1}) & \xrightarrow{\tilde{g}_{\alpha*}} & k_{n-1}(X^{n-1}) & \xrightarrow{p_*} & k_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}) & \xrightarrow{\lambda_{n-1}} & k_{n-1}(\bigvee_{\gamma} S_{\gamma}^{n-1}) \xleftarrow{\{i_{\gamma*}\} \circ \sigma^{n-1}} \bigoplus_{\gamma \in J_{n-1}} k_0(S^0) \\ & \searrow p_{\beta*} & \downarrow p'_{\beta*} & & \downarrow p'_{\beta*} & & \downarrow p_{\beta} \\ & & k_{n-1}(X^{n-1}/X_{\beta}^{n-1}) & \xrightarrow{\cong} & k_{n-1}(S^{n-1}) & \xleftarrow[\cong]{\sigma^{n-1}} & k_0(S^0) \end{array}$$

где $p_{\beta}^*: \bigvee_{\gamma \in J_{n-1}} S_{\gamma}^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ и $\pi_{\beta}: \bigoplus_{\gamma \in J_{n-1}} k_0(S^0) \rightarrow k_0(S^0)$ — проекции на β -й множитель. Таким образом,

$$\begin{aligned} r_{\gamma}^{\alpha} &= \pi_{\beta}(\mu(\Sigma \gamma \otimes r_{\gamma}^{\alpha})) = \pi_{\beta} \cdot \mu(d(\alpha \otimes g)) \\ &= \pi_{\beta} \cdot \mu \cdot \kappa_{n-1}(X) \cdot \Delta \cdot \kappa_{n-1}(X)^{-1}(\alpha \otimes g) \\ &= \pi_{\beta} \cdot \bigoplus_{\gamma} (\sigma^{n-1})^{-1} \cdot \{i_{\gamma*}\}^{-1} \cdot \lambda_{n-1} \cdot \Delta \cdot \lambda_n^{-1} \cdot i_{\alpha*} \cdot \sigma^n(g) \\ &= (\sigma^{n-1})^{-1} \cdot h_{\beta}^{\alpha} \cdot \sigma^{n-1}(g). \end{aligned}$$

Далее, для любого элемента $x \in k_{n-1}(S^{n-1})$ мы имеем $h_{\beta}^{\alpha}(x) = (\deg(h_{\beta}^{\alpha}) 1_{S^{n-1}})_*(x) = \deg(h_{\beta}^{\alpha}) x$ (см. предложение 7.38). Следовательно,

$$\begin{aligned} r_{\beta}^{\alpha} &= (\sigma^{n-1})^{-1}(\deg(h_{\beta}^{\alpha}) \sigma^{n-1}(g)) = \\ &= \deg(h_{\beta}^{\alpha}) (\sigma^{n-1})^{-1}(\sigma^{n-1}(g)) = \deg(h_{\beta}^{\alpha}) g. \end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали, что

$$d(\alpha \otimes g) = \sum_{\gamma \in J_{n-1}} \deg(h_\gamma^\alpha) \gamma \otimes g = \left(\sum_{\gamma \in J_{n-1}} \deg(h_\gamma^\alpha) \gamma \right) \otimes g = d'(\alpha) \otimes g = (d' \otimes 1)(\alpha \otimes g).$$

Так как элементы $\alpha \otimes g$ порождают группу $C_n(X) \otimes G$, то отсюда следует требуемое утверждение. $\square$

10.12. Мы можем даже описать гомоморфизм $f_*: k_n(X) \rightarrow k_n(Y)$, индуцированный клеточным отображением $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$. Прежде всего f определяет отображение $\bar{f}: X^n/X^{n-1} \rightarrow Y^n/Y^{n-1}$. Пусть e_α^n — некоторая n -мерная клетка X и e_β^n — клетка Y той же размерности. Обозначим через $f_\beta^\alpha: (S^n, s_0) \rightarrow (S^n, s_0)$ композицию

$$(S^n, s_0) \cong (D^n/S^{n-1}, *) \xrightarrow{f_\alpha^n} (X^n/X^{n-1}, *) \xrightarrow{\bar{f}} (Y^n/Y^{n-1}, *) \xrightarrow{f_\beta^n} (D^n/S^{n-1}, *) \cong (S^n, s_0).$$

10.13. Предложение. Гомоморфизм

$$f_*: C_n(X) \otimes G \rightarrow C_n(Y) \otimes G$$

имеет вид $f_* = f'_* \otimes 1$, где $f'_*: C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ задается формулой

$$f'_*(\alpha) = \sum_{\gamma \in J'_n} \deg(f_\gamma^\alpha) \gamma, \quad \alpha \in J_n.$$

Доказательство. Снова рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} k_0(S^0) & \xrightarrow{\sigma^n} & k_n(S^n) & \xrightarrow{f_{\alpha*}^n} & k_n(\vee_\alpha S_\alpha^n) \\ \uparrow \cong & & \uparrow \cong & & \uparrow \lambda_n \\ k_n(D^n/S^{n-1}) & \xrightarrow{f_{\alpha*}^n} & k_n(X^n/X^{n-1}) & \xrightarrow{f_*} & k_n(Y^n/Y^{n-1}) & \xrightarrow{\lambda_n} & k_n(\vee_\gamma S_\gamma^n) \\ & & & & \downarrow p'_{\beta*} & & \downarrow p''_{\beta*} \\ & & & & k_n(Y^n/Y_\beta^n) & \xleftarrow[\cong]{f_{\beta*}^n} & k_n(S^n) \xleftarrow{\sigma^n} k_0(S^0). \end{array}$$

Ранее мы установили, что $f_*(\alpha \otimes g) = \sum_{\gamma \in J'_n} \gamma \otimes r_\gamma^\alpha$ для некоторых $r_\gamma^\alpha \in G$. Из диаграммы видно, что $r_\gamma^\alpha = \sigma^{-n} \cdot f_{\beta*}^\alpha \cdot \sigma^n(g) = \deg(f_\beta^\alpha) g$. Следовательно,

$$f_*(\alpha \otimes g) = \sum_\gamma \deg(f_\gamma^\alpha) \gamma \otimes g = (f'_* \otimes 1)(\alpha \otimes g). \quad \square$$

10.14. Отметим, что конструкции цепного комплекса $C_*(X)$, дифференциала d' и цепного отображения $f'_\#$ зависят лишь от геометрии клеточных пространств и не зависят от выбора теории гомологий k_* . Это наводит на мысль, что любые две классические теории гомологий с коэффициентами в G естественно эквивалентны.

10.15. Теорема. Пусть k_* , k'_* — классические теории гомологий с коэффициентами в G и G' соответственно, удовлетворяющие на категории $\mathcal{F}\mathcal{U}'$ аксиоме суммы и на категории $\mathcal{F}\mathcal{T}'$ аксиоме слабой гомотопической эквивалентности. Для любого гомоморфизма $\phi: G \rightarrow G'$ существует такое естественное преобразование $T_*(\phi): k_* \rightarrow k'_*$ теорий гомологий на $\mathcal{F}\mathcal{T}'$, что $T_0(\phi)(S^0): k_0(S^0) \rightarrow k'_0(S^0)$ совпадает с ϕ . Если k'_* — классическая теория гомологий с коэффициентами в G'' , то $T_*(\phi' \cdot \phi) = T_*(\phi') \cdot T_*(\phi)$ для любого гомоморфизма $\phi': G' \rightarrow G''$. Если $1_G: G \rightarrow G$ — тождественный изоморфизм, то $T_*(1_G)$ — тождественное преобразование. В частности, если ϕ — изоморфизм, то $T_*(\phi)$ — естественная эквивалентность.

Доказательство. Согласно предложениям 10.11 и 10.13 гомоморфизм

$$1 \otimes \phi: C(X) \otimes G \rightarrow C(X) \otimes G'$$

является цепным отображением, естественным по отношению к отображениям $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$. Следовательно, если X — клеточное пространство, то можно определить $T_n(\phi)(X)$ как композицию

$$k_n(X) \cong H_n(\{C_*(X) \otimes G, d\}) \xrightarrow{(1 \otimes \phi)_*} H_n(\{C_*(X) \otimes G', d\}) \cong k'_n(X).$$

Для произвольного топологического пространства воспользуемся клеточными эквивалентами. Все остальные утверждения очевидны. $\square$

Результаты, доказанные в пп. 10.6—10.15, имеют аналоги для классических теорий когомологий.

10.16. Предложение. Функтор $\tilde{H}_*(-; G)$ удовлетворяет аксиоме суммы на категории $\mathcal{F}\mathcal{T}'_0$ пунктированных пространств с невырожденными отмеченными точками.

Доказательство. Прежде всего покажем, что аналогом аксиомы суммы для неприведенной теории гомологии h_* является следующее утверждение:

для любого семейства $\{X_\alpha: \alpha \in A\}$ топологических пространств вложения $i_\alpha: X_\alpha \rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ в несвязное объединение индуцируют изоморфизм

$$\{i_{\alpha*}\}: \bigoplus_{\alpha \in A} h_n(X_\alpha) \rightarrow h_n\left(\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha\right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Действительно, если приведенная теория гомологий $\tilde{h}_*$ удовлетворяет аксиоме суммы, то

$$h_n\left(\bigcup_{\alpha} X_\alpha\right) \cong \tilde{h}_n\left(\left(\bigcup_{\alpha} X_\alpha\right)^+\right) \cong \tilde{h}_n\left(\bigvee_{\alpha} X_\alpha^+\right) \cong \bigoplus_{\alpha} \tilde{h}_n(X_\alpha^+) \cong \bigoplus_{\alpha} h_n(X_\alpha).$$

С другой стороны, пусть h_* удовлетворяет сформулированной выше аксиоме и пусть $\{(X_\alpha, x_\alpha): \alpha \in A\}$ — семейство пунктированных пространств, $(X_\alpha, x_\alpha) \in \mathcal{PSO}$. Положим $Y = \{x_\alpha: \alpha \in A\} \subset \bigcup_\alpha X_\alpha$. Тогда

$$p: ((\bigcup_\alpha X_\alpha)^+ \cup CY^+, CY^+) \rightarrow ((\bigcup_\alpha X_\alpha)^+ \cup CY^+/CY^+, \{*\}) \cong (\bigvee_\alpha X_\alpha, \{*\})$$

является гомотопической эквивалентностью ($Y \subset \bigcup_\alpha X_\alpha$ — корасслоение) и поэтому триада $((\bigcup_\alpha X_\alpha)^+ \cup CY^+; (\bigcup_\alpha X_\alpha)^+, CY^+)$ обладает свойством вырезания. Следовательно, из коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_\alpha \tilde{h}_n(X_\alpha) = \bigoplus_\alpha h_n(X_\alpha, \{x_\alpha\}) & \xrightarrow[\{i_{\alpha*}\}]{\cong} & h_n(\bigcup_\alpha X_\alpha, Y) \\ \downarrow \{i_{\alpha*}\} & & \downarrow \cong \\ \tilde{h}_n(\bigvee_\alpha X_\alpha) = h_n(\bigvee_\alpha X_\alpha, \{*\}) & \xleftarrow[p_*]{\cong} & h_n((\bigcup_\alpha X_\alpha)^+ \cup CY^+, CY^+) \end{array}$$

вытекает, что $\{i_{\alpha*}\}: \bigoplus_\alpha \tilde{h}_n(X_\alpha) \rightarrow \tilde{h}_n(\bigvee_\alpha X_\alpha)$ — изоморфизм.

Если $\bigcup_\alpha X_\alpha$ — несвязная сумма топологических пространств, то очевидно, что $S_*(\bigcup_\alpha X_\alpha; G) = \bigoplus_\alpha S_*(X_\alpha; G)$. С другой стороны, для любого семейства $\{C_\alpha^*: \alpha \in A\}$ цепных комплексов C_α^* мы имеем $H_*(\bigoplus_\alpha C_\alpha^*) \cong \bigoplus_\alpha H_*(C_\alpha^*)$. Следовательно, функтор $H_*(-; G)$ удовлетворяет сформулированному выше аналогу аксиомы суммы для неприведенных теорий. $\square$

Таким образом, теории гомологий $\tilde{H}_*(-; G)$ и $H(G)_*(-)$ естественно эквивалентны на категории $\mathcal{PSO}'$.

10.17. Предложение. Для любой абелевой группы G функтор $\tilde{H}^*(-; G)$ удовлетворяет аксиоме суммы.

Доказательство. Как и прежде, достаточно показать, что

$$H^*(\bigcup_\alpha X_\alpha; G) \cong \prod_\alpha H^*(X_\alpha; G)$$

для любого несвязного объединения $\bigcup_\alpha X_\alpha$. С одной стороны,

$$\begin{aligned} S^*(\bigcup_\alpha X_\alpha; G) &= \text{Hom}(S_*(\bigcup_\alpha X_\alpha); G) \cong \\ &\text{Hom}(\bigoplus_\alpha S_*(X_\alpha); G) \cong \prod_\alpha \text{Hom}(S_*(X_\alpha); G) = \prod_\alpha S^*(X_\alpha; G). \end{aligned}$$

С другой стороны, $H^*(\prod_\alpha C_\alpha^*) \cong \prod_\alpha H^*(C_\alpha^*)$ для любого семейства $\{C_\alpha^*: \alpha \in A\}$ коцепных комплексов. $\square$

Таким образом, теории когомологий $\tilde{H}^*(-; G)$ и $H(G)^*(-)$ также естественно эквивалентны на категории $\mathcal{S}\mathcal{W}'$.

Покажем теперь, что теории $H_*(-; G)$, $H^*(-; G)$ удовлетворяют аксиоме слабой гомотопической эквивалентности.

10.18. Определение. Для любого $n \geq 0$ и любой пары (X, A) обозначим через $S_*^{(n, A)}(X)$ подкомплекс комплекса $S_*(X)$, порожденный такими сингулярными симплексами $u: \Delta_m \rightarrow X$, которые отображают $(n-1)$ -мерный остов симплекса Δ_m в подпространство A . Комплексом Эйленберга пары (X, A) называется подкомплекс $S_*^{(n)}(X, A) = S_*^{(n, A)}(X)/S_*(A)$ комплекса $S_*(X, A)$. Заметим, что $S_m^{(n)}(X, A) = 0$ для $0 \leq m < n$.

10.19. Лемма. Пусть (X, A) — некоторая $(n-1)$ -связная пара. Тогда вложение

$$i: S_*^{(n)}(X, A) \rightarrow S_*(X, A)$$

является цепной гомотопической эквивалентностью и, следовательно, индуцирует изоморфизмы

$$i_*: H_*(S_*^{(n)}(X, A) \otimes G) \rightarrow H_*(S_*(X, A; G))$$

и

$$i^*: H^*(S^*(X, A; G)) \rightarrow H^*(\text{Hom}(S_*^{(n)}(X, A), G)).$$

Доказательство. Мы хотим построить для каждого сингулярного симплекса $u: \Delta_m \rightarrow X$ отображение $ku: \Delta_m \times I \rightarrow X$ со следующими свойствами:

- i) $ku \cdot i_0 = u$, $ku \cdot i_1 \in S_*^{(n, A)}(X)$;
- ii) $ku \cdot (\partial_i \times 1) = k\partial_i u$, $0 \leq i \leq m$;
- iii) если $u \in S_m^{(n, A)}(X)$, то $ku(x, t) = u(x)$ для всех $x \in \Delta_m$, $t \in I$.

Здесь $i_j: \Delta_m \rightarrow \Delta_m \times I$, $j=0, 1$, задается формулой $i_j(x) = (x, j)$. Будем вести построение индукцией по размерности m . Для $m=0$ в качестве отображения $ku: \Delta_0 \times I \rightarrow X$ возьмем любой путь, начинающийся в $u(\Delta_0)$ и кончающийся в A (если $u(\Delta_0) \in A$, то будем считать, что ku — постоянный путь в точке $u(\Delta_0)$). Предположим теперь, что отображение ku определено для всех сингулярных симплексов $u: \Delta_k \rightarrow X$, $k < m$. Для $u: \Delta_m \rightarrow X$ уже определено на $\Delta_m \times \{0\} \cup \dot{\Delta}_m \times I$, причем $ku|_{\dot{\Delta}_m \times I} \in S_m^{(n, A)}(X)$. Так как $(\Delta_m \times \{0\} \cup \dot{\Delta}_m \times I, \Delta_m \times \{1\}) \cong (D^m, S^{m-1})$ и пара (X, A) является $(n-1)$ -связной, то в случае, когда $m < n$, можно найти гомотопию $ku: \Delta_m \times I \rightarrow X$, совпадающую на $\Delta_m \times \{0\} \cup \dot{\Delta}_m \times I$ с уже построенной гомотопией и такую, что $ku|_{\Delta_m \times \{1\}} \in S_m^{(n, A)}(X)$. Если $u \in S_m^{(n, A)}(X)$, то в качестве ku мы берем постоянную гомотопию. Пусть теперь $m \geq n$. Тогда ku есть произвольное продолжение уже построенной гомотопии (существующее в силу того, что

$\Delta_m \times \{0\} \cup \dot{\Delta}_m \times I$ является ретрактом $\Delta_m \times I$, причем если $u \in S_m^{(n, A)}(X)$, то ku — опять постоянная гомотопия.

Обратимся теперь к построенной в п. 10.1 цепной гомотопии $P: S_*(\Delta_m) \rightarrow S_*(\Delta_m \times I)$. Пусть $\delta_m \in S_m(\Delta_m)$ — сингулярная цепь $1: \Delta_m \rightarrow \Delta_m$. Определим цепную гомотопию $\bar{P}: S_*(X) \rightarrow S_*(X)$, полагая на образующих $\bar{P}u = (ku)_\#(P\delta_m)$ и продолжая ее на всю группу $S_*(X)$ по линейности. Из свойств гомотопии P следует, что

$$\begin{aligned} d\bar{P}u + \bar{P}du &= ku_\#(dP\delta_m) + \sum (-1)^i (k\partial_i u)_\#(P\delta_{m-1}) = \\ &= ku_\#(i_{0\#}(\delta_m) - i_{1\#}(\delta_m) - P d\delta_m) + \sum (-1)^i ku_\#(\partial_i \times 1)_\#(P\delta_{m-1}) = \\ &= u_\#(\delta_m) - (ku \cdot i_1)_\#(\delta_m) + ku_\#[\sum (-1)^i (\partial_i \times 1)_\#(P\delta_{m-1}) - P d\delta_m] = \\ &= u - \tau(u) + ku_\#[P(\sum (-1)^i \partial_i \times 1)_\#(\delta_{m-1}) - d\delta_m] = u - \tau(u), \end{aligned}$$

где $\tau(u) = ku \cdot i_1$ — сингулярный симплекс в $S_m^{(n, A)}(X)$. Тогда τ представляет собой цепное отображение $S_*(X) \rightarrow S_*^{(n, A)}(X)$, цепно гомотопное в $S_*(X)$ тождественному отображению. В силу условия iii) $\tau|_{S_*^{(n, A)}(X)} = 1$. Так как $\tau(S_*(A)) \subset S_*(A)$, то отображение τ определяет цепную гомотопию $\bar{\tau}: S_*(X, A) \rightarrow S_*^{(n)}(X, A)$, обратную к вложению i . Все остальные утверждения очевидны. $\square$

10.20. Следствие. *Функторы $H_*(-; G)$ и $H^*(-; G)$ удовлетворяют аксиоме слабой гомотопической эквивалентности.*

Доказательство. Согласно 7.70 достаточно показать, что если пара (X, A) является n -связной для всех n , то $H_*(X, A; G) = 0$. Но по предыдущей лемме

$$H_q(X, A; G) \cong H_q(S_*^{(q+1)}(X, A) \otimes G) = 0,$$

поскольку $S_q^{(q+1)}(X, A) = 0$ для всех q . Для когомологий доказательство аналогично. $\square$

10.21. Теорема. *Имеют место естественные эквивалентности*

$$\hat{H}_*(-; G) = H(G)_*(-)$$

и

$$\hat{H}^*(-; G) = H(G)^*(-).$$

10.22. Примеры. i) Снабдим сферу S^n структурой клеточного пространства с двумя p -мерными клетками e_p^p, e_p^p для каждого p , $0 \leq p \leq n$, подобно тому, как это делалось в примере 5.4, 2b), с той лишь разницей, что теперь будем считать $e_+^p = s_0(-\infty)$ -мерной клеткой. Тогда $C_p(S^n) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $1 \leq p \leq n$, $C_0(S^n) \cong \mathbb{Z}$. Приклеивающие отображения для клеток e_+^p, e_-^p суть не что иное как тождественные отображения $1: S^{p-1} \rightarrow S^{p-1}$. Очевидно, что стягивающее отображение $S^{p-1} \rightarrow S^{p-1}/e_-^{p-1} \cong S^{p-1}$ гомотопно тождественному отображению 1, в то время как $S^{p-1} \rightarrow S^{p-1}/e_+^{p-1} \cong S^{p-1}$

гомотопно v' ¹⁾. Таким образом, $d(e_+^p) = e_+^{p-1} - e_-^{p-1}$, $d(e_-^p) = e_+^{p-1} - e_-^{p-1}$ и, значит, дифференциал d задается матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Так как ранг этой матрицы равен единице, то $B_p = Z_p \cong \mathbb{Z}$, $0 < p \leq n-1$, $Z_n \cong \mathbb{Z}$, $B_n = 0$. Кроме того, в нулевой размерности дифференциал $d: C_0(S^n) \rightarrow C_{-1}(S^n)$ равен нулю и $e_+^0 - e_-^0 = d(e_+^1)$.

Таким образом, мы получаем

$$\tilde{H}_p(S^n; G) = \begin{cases} G, & p = n, \\ 0, & p \neq n, \end{cases}$$

как и следовало ожидать.

ii) Комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^n$ имеет одну $2p$ -мерную клетку для каждого p , $1 \leq p \leq n$, и одну $(-\infty)$ -мерную клетку. Таким образом, $C_{2p}(\mathbb{C}P^n) \cong \mathbb{Z}$, $1 \leq p \leq n$, и $C_m(\mathbb{C}P^n) = 0$ для остальных значений m . Очевидно, что все дифференциалы

$$d: C_m(\mathbb{C}P^n) \rightarrow C_{m-1}(\mathbb{C}P^n)$$

равны нулю по размерностным соображениям. Следовательно,

$$\tilde{H}_m(\mathbb{C}P^n; G) \cong \begin{cases} G, & m = 2p, 1 \leq p \leq n, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Переходя к прямому пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем

$$\tilde{H}_m(\mathbb{C}P^\infty; G) \cong \begin{cases} G, & m = 2k, k \geq 1, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

iii) Совершенно аналогично

$$\tilde{H}_m(\mathbb{H}P^n; G) \cong \begin{cases} G, & m = 4k, 1 \leq k \leq n, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\tilde{H}_m(\mathbb{H}P^\infty; G) \cong \begin{cases} G, & m = 4k, k \geq 1, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

iv) Вычисления для вещественного проективного пространства $\mathbb{R}P^n$ более интересны. Мы имеем $C_p(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}$, $1 \leq p \leq n$. Далее можно было бы рассмотреть композицию h^m , равную

$$S^{m-1} \xrightarrow{q^{m-1}} \mathbb{R}P^{m-1} \xrightarrow{p} \mathbb{R}P^{m-1}/\mathbb{R}P^{m-2} \xrightarrow{\cong} D^{m-1}/S^{m-2} \cong S^{m-1},$$

¹⁾ Здесь через v' обозначена симметрия относительно экваториальной сферы: $v' = -1$. Сформулированное в тексте утверждение вытекает из того, что степень гомеоморфизма $S^{p-1}/e_+^{p-1} \cong S^{p-1}$ равна -1 . Последнее вытекает из того, что приклеивающее отображение для e_-^{p-1} есть 1 . — Прим. ред.

и показать, что $\deg h^m = 1 + (-1)^m$. Вместо этого мы поступим следующим образом: если снабдить сферу S^n структурой клеточного пространства как в примере i), то $q^n: S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ будет клеточным отображением. Рассмотрим цепное отображение $q^n_*: C_p(S^n) \rightarrow C_p(\mathbb{R}P^n)$. Очевидно, что композиция

$$D^{p-1}/S^{p-1} \xrightarrow{\bar{p}_+} S^p/S^{p-1} \xrightarrow{\bar{q}^p} \mathbb{R}P^p/\mathbb{R}P^{p-1} \xrightarrow{\hat{q}^p} H^p_+/S^{p-1} \xrightarrow{\bar{p}_+} D^p/S^{p-1}$$

представляет собой тождественное отображение. Поэтому, если заменить слева $\bar{p}_+$ на $\bar{p}_-$, то данная композиция превратится в отображение $\{x_1, x_2, \dots, x_p\} \mapsto \{-x_1, -x_2, \dots, -x_p\}$. Легко видеть, что оно имеет степень $(-1)^p$. Таким образом,

$$q^n_*: C_p(S^n) \rightarrow C_p(\mathbb{R}P^n)$$

задается формулами $q^n_*(e^p_+) = e^p$, $q^n_*(e^p_-) = (-1)^p e^p$. Следовательно,

$$de^p = dq^n_*(e^p_+) = q^n_*(de^p_+) = q^n_*(e^{p-1}_+ - e^{p-1}_-) = e^{p-1} + (-1)^p e^{p-1} = [1 + (-1)^p] e^p,$$

откуда находим, что

$$\tilde{H}_m(\mathbb{R}P^n; G) = \begin{cases} G_2, & m \text{ нечетно, } 1 \leq m < n, \\ G^2, & m \text{ четно, } 2 \leq m \leq n, \\ G, & m = n, n \text{ нечетно,} \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Здесь $G_2 = G/2G$ и G^2 — подгруппа элементов порядка 2 в группе G .

Так как $\pi_0(H(\mathbb{Z})) = [S^0, \tilde{H}(\mathbb{Z})] = \mathbb{Z}$, то можно выбрать отображение спектров $\iota: S^0 \rightarrow \tilde{H}(\mathbb{Z})$, представляющее $1 \in \mathbb{Z}$. Это отображение индуцирует естественное преобразование

$$T_*(\iota): \pi_*^S \rightarrow H(\mathbb{Z})_* = \tilde{H}_*(-; \mathbb{Z})$$

(см. п. 8.39). Обозначим $T_*(\iota)$ через h^S и назовем его *стабильным гомоморфизмом Гуревича*. Поскольку $\pi_n^S(S^0) = 0 = \pi_n^S(H(\mathbb{Z}))$ для $n < 0$, $\iota_*: \pi_0^S(S^0) \rightarrow \pi_0(H(\mathbb{Z}))$ — изоморфизм (группа $\pi_0^S(S^0)$ порождается элементом $[1_{S^0}]$ и $\iota_*[1_{S^0}] = [\iota]$), а $\iota_*: \pi_1^S(S^0) \rightarrow \pi_1(H(\mathbb{Z}))$ — эпиморфизм, то положив в теореме 7.55 $N = 1$, мы получим следующее утверждение.

10.23. Теорема. Если X — какое-либо $(n-1)$ -связное пространство, то

$$h^S: \pi_q^S(X) \rightarrow \tilde{H}_q(X; \mathbb{Z})$$

является изоморфизмом для $q \leq n$ и эпиморфизмом для $q = n+1$.

Так как $\tilde{H}_0(S^0; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ (см. определение 7.39), то мы имеем также *нестабильный гомоморфизм Гуревича*

$$h: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \tilde{H}_n(X; \mathbb{Z}).$$

В самом деле, $\tilde{H}(\mathbb{Z})_0(S^0) = \pi_0(H(\mathbb{Z}) \wedge S^0) = \pi_0(H(\mathbb{Z}))$, так что мы можем взять в качестве образующей элемент $\iota \in \tilde{H}_0(S^0; \mathbb{Z})$. Для всех $n \geq 0$ положим $\iota_n = \sigma^n(\iota) \in \tilde{H}_n(S^n; \mathbb{Z})$. Тогда гомоморфизм h определяется формулой

$$h[f] = f_*(\iota_n) \in \tilde{H}_n(X; \mathbb{Z}),$$

где $f: (S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$ — представитель гомотопического класса $[f] \in \pi_n(X, x_0)$.

10.24. Предложение. Для любых (X, x_0) и $n \geq 0$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & \pi_n^S(X) & \\ \nearrow i_0 & \downarrow h^S & \\ \pi_n(X, x_0) & & \tilde{H}_n(X; \mathbb{Z}) \\ \searrow h & & \end{array}$$

коммутативна. Здесь

$$i_0: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n^S(X) \cong \operatorname{dir} \lim \pi_{n+k}(S^k X, *)$$

— естественный гомоморфизм.

Доказательство. Напомним, что по теореме 8.26 для любого спектра E существует эквивалентность

$$k(E): \Sigma E \rightarrow E \wedge S^1,$$

естественная на категории $\mathcal{S}\mathcal{F}'$. Итерируя $k(E)$, мы получим естественную эквивалентность

$$k_n(E): \Sigma^n E \rightarrow E \wedge S^n.$$

Тогда $\iota_n \in \tilde{H}_n(S^n; \mathbb{Z}) = [\Sigma^n S^0; H(\mathbb{Z}) \wedge S^n]$ представляется отображением

$$\Sigma^n S^0 \xrightarrow{[\Sigma^n \iota]} \Sigma^n H(\mathbb{Z}) \xrightarrow{[k_n(H(\mathbb{Z}))]} H(\mathbb{Z}) \wedge S^n.$$

Следующая диаграмма коммутативна в категории $\mathcal{S}\mathcal{F}'$:

$$\begin{array}{ccccc} [\Sigma^n \iota] & \rightarrow & \Sigma^n H(\mathbb{Z}) & \xrightarrow{[k_n(H(\mathbb{Z}))]} & H(\mathbb{Z}) \wedge S^n \\ \downarrow [k_n(S^0)] & & \downarrow [i \wedge 1] & & \downarrow [1 \wedge f] \\ \Sigma^n S^0 & \xrightarrow{[k_n(S^0)]} & S^0 \wedge S^n & \xrightarrow{[i \wedge 1]} & H(\mathbb{Z}) \wedge S^n \\ \downarrow i_0[f] & & \downarrow [1 \wedge f] & & \downarrow [1 \wedge f] \\ E(X) & = & S^0 \wedge X & \xrightarrow{[i \wedge 1]} & H(\mathbb{Z}) \wedge X. \end{array}$$

Таким образом,

$$h[f] = f_* (\iota_n) = [1 \wedge f] \cdot [k_n(H(\mathbb{Z}))] \cdot [\Sigma^n \iota] = \\ [\iota \wedge 1] \cdot i_0[f] = h^S(i_0[f]). \quad \square$$

10.25. Теорема (Гуревича об изоморфизме). Если X — некоторое $(n-1)$ -связное пространство, $n \geq 2$, то $h: \pi_q(X, x_0) \rightarrow \tilde{H}_q(X; \mathbb{Z})$ — изоморфизм при $q \leq n$ и эпиморфизм при $q = n+1$. В случае $n=1$ гомоморфизм h является эпиморфизмом при $q=n$.

Доказательство. Комбинируя теорему 10.23 и предложение 10.24, мы видим, что достаточно доказать следующее утверждение: гомоморфизм i_0 является изоморфизмом при $q \leq n$ и эпиморфизмом при $q = n+1$ (или что i_0 — эпиморфизм при $q = n$ в случае $n=1$). По определению $\pi_q^S(X) = \text{dir lim } \pi_{q+k}(S^k X, *)$, причем предел берется по индуктивной системе

$$\pi_q(X, x_0) \xrightarrow{\Sigma} \pi_{q+1}(SX, *) \xrightarrow{\Sigma} \pi_{q+2}(S^2X, *) \xrightarrow{\Sigma} \dots$$

Так как пространство X является $(n-1)$ -связным, то из упражнения 6.53 следует, что $S^k X$ $(n+k-1)$ -связно и, значит,

$$\Sigma: \pi_{q+k}(S^k X, *) \rightarrow \pi_{q+k+1}(S^{k+1} X, *)$$

— изоморфизм при $q < 2n+k-1$ и эпиморфизм при $q = 2n+k-1$. Если $q \leq n$, то все Σ являются эпиморфизмами — на самом деле все они изоморфизмы, за исключением первого в случае $n=1$. Если же $n \geq 2$ и $q = n+1$, то все Σ — эпиморфизмы. $\square$

Замечание. В случае $n=1$ мы имеем

$$\ker h = \ker \{\Sigma: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_2(SX, *)\}.$$

Так как группа $\pi_2(SX, *)$ абелева, то очевидно, что ядро $\ker \Sigma$ содержит коммутант $[\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)]$ — подгруппу, порожденную всеми элементами вида $xux^{-1}y^{-1}$, $x, y \in \pi_1(X, x_0)$. Более детальный анализ гомоморфизма Σ показывает, что в действительности $\ker \Sigma = [\pi_1, \pi_1]$. Альтернативно, можно показать прямыми вычислениями, что $\ker h$ есть в точности коммутант $[\pi_1, \pi_1]$.

Для всех $n \geq 0$ и всех пунктированных пар (X, A, x_0) существует *относительный гомоморфизм Гуревича*

$$h: \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow H_n(X, A; \mathbb{Z}).$$

В самом деле, поскольку

$$p_*: H_n(D^n, S^{n-1}; \mathbb{Z}) \cong H_n(S^n, \{*\}; \mathbb{Z}) = \tilde{H}_n(S^n; \mathbb{Z})$$

— изоморфизм, то положим $\kappa_n = p_*^{-1}(\iota_n) \in H_n(D^n, S^{n-1}; \mathbb{Z})$. Тогда для любого отображения $f: (D^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$

$$h[f] = f_* (\kappa_n) \in H_n(X, A; \mathbb{Z}).$$

10.26. Лемма. *Имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(X, A, x_0) & \xrightarrow{p_*} & \pi_n(X/A, \{*\}, *) \cong \pi_n(X/A, *) \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ H_n(X, A; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{p_*} & H_n(X/A, \{*\}; \mathbb{Z}) = \tilde{H}_n(X/A; \mathbb{Z}). \end{array}$$

Доказательство. Пусть $f: (D^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$ — некоторое отображение пунктированных пар. Тогда f индуцирует такое отображение $\tilde{f}: S^n = D^n/S^{n-1} \rightarrow X/A$, что $\tilde{f} \circ p = p \circ f$. Легко видеть, что гомоморфизм

$$p_*: \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \pi_n(X/A, \{*\}, *) \cong \pi_n(X/A, *)$$

переводит гомотопический класс $[f]$ в класс $[\tilde{f}]$. Следовательно,

$$\begin{aligned} h \circ p_*[f] &= h[\tilde{f}] = \tilde{f}_*(\iota_n) = \tilde{f}_*(p_*(\kappa_n)) = \\ &= (\tilde{f} \circ p)_*(\kappa_n) = (p_* \circ f_*)(\kappa_n) = (p_* \circ h)([f]). \quad \square \end{aligned}$$

10.27. Теорема (относительная теорема Гуревича об изоморфизме). Пусть (X, A) — такая $(n-1)$ -связная пара ($n \geq 2$), что подпространство A односвязно. Тогда

$$h: \pi_q(X, A, x_0) \rightarrow H_q(X, A; \mathbb{Z})$$

является изоморфизмом при $q \leq n$ и эпиморфизмом при $q = n+1$. Гомоморфизм h будет эпиморфизмом при $q = n$ даже тогда, когда подпространство A всего лишь линейно связно.

Доказательство. Согласно следствию 6.22 гомоморфизм

$$p_*: \pi_q(X, A, x_0) \rightarrow \pi_q(X/A, *)$$

является изоморфизмом при $q \leq n$ и эпиморфизмом для $q = n+1$. Следовательно, пространство $(X/A, *)$ $(n-1)$ -связно и по теореме 10.25

$$h: \pi_q(X/A, *) \rightarrow \tilde{H}_q(X/A)$$

— изоморфизм при $q \leq n$ и эпиморфизм при $q = n+1$. Если (X, A) — произвольная клеточная пара, то

$$p_*: H_q(X, A) \rightarrow \tilde{H}_q(X/A)$$

— изоморфизм для любого q . Тем самым мы доказали теорему для всех клеточных пар. Общий случай получается переходом к клеточным эквивалентам. $\square$

Замечание. Предположим, что пространство A не односвязно. Напомним, что существует естественное действие фундаментальной группы $\pi_1(A, x_0)$ на $\pi_n(X, A, x_0)$. Если $\alpha \in \pi_1(A, x_0)$ и $x \in \pi_n(X, A, x_0)$, то $p_*(\alpha x) = p_*(\alpha) \cdot p_*(x)$, где $p_*(\alpha) \in \pi_1(\{*\}, *) = 1$. Следовательно, $p_*(\alpha) = 1$ и $p_*(\alpha x) = p_*(x)$. Поэтому группа

$\ker h = \ker \{p_*: \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \pi_n(X/A, \{*\}, *)\}$ обязательно содержит наименьшую нормальную подгруппу $H \subset \pi_n(X, A, x_0)$, содержащую все элементы вида $\alpha x - x$ для $\alpha \in \pi_1(A, x_0)$, $x \in \pi_n(X, A, x_0)$. Можно показать, что в действительности $\ker h = \ker p_* = H$.

10.28. Теорема (Уайтхед). Пусть $f: X \rightarrow Y$ — отображение линейно связных пространств.

i) Если f является n -эквивалентностью (случай $n = \infty$ не исключается), то

$$f_*: \tilde{H}_q(X; \mathbb{Z}) \rightarrow \tilde{H}_q(Y; \mathbb{Z})$$

— изоморфизм при $q < n$ и эпиморфизм при $q = n$.

ii) Если пространства X, Y односвязны и

$$f_*: \tilde{H}_q(X; \mathbb{Z}) \rightarrow \tilde{H}_q(Y; \mathbb{Z})$$

— изоморфизм при $q < n$ и эпиморфизм при $q = n$, то f является n -эквивалентностью (случай $n = \infty$ не исключается).

Доказательство. Пусть M_f — цилиндр отображения f . Тогда f является n -эквивалентностью в том и только в том случае, когда пара (M_f, X) n -связна (см. предложение 3.18 и лемму 8.32). Так как последовательность группы гомологий

$$\dots \rightarrow \tilde{H}_n(X; \mathbb{Z}) \xrightarrow{f_*} \tilde{H}_n(Y; \mathbb{Z}) \rightarrow \tilde{H}_n(M_f, X; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{n-1}(X; \mathbb{Z}) \xrightarrow{f_*} \dots$$

точна, то $f_*: \tilde{H}_q(X; \mathbb{Z}) \rightarrow \tilde{H}_q(Y; \mathbb{Z})$ будет изоморфизмом при $q < n$ и эпиморфизмом при $q = n$ тогда и только тогда, когда $H_q(M_f, X; \mathbb{Z}) = 0$ при $q \leq n$.

Пусть теперь f является n -эквивалентностью. Тогда $\pi_q(M_f, X, *) = 0$ при $q \leq n$ и, следовательно, по теореме 10.27 $H_q(M_f, X; \mathbb{Z}) = 0$ при $q \leq n$. Обратно, если $H_q(M_f, X; \mathbb{Z}) = 0$ при $q \leq n$ и пространства X, Y односвязны, то пара (M_f, X) также односвязна, и, значит, по теореме 10.27 гомоморфизм $h: \pi_2(M_f, X, *) \rightarrow H_2(M_f, X; \mathbb{Z})$ является изоморфизмом. Если $n \geq 2$, то пара (M_f, X) оказывается 2-связной. Повторяя это рассуждение, мы получим, что пара (M_f, X) n -связна, т. е. что отображение f является n -эквивалентностью. $\square$

10.29. Следствие. Пусть X и Y — односвязные клеточные пространства. Отображение $f: X \rightarrow Y$ является гомотопической эквивалентностью тогда и только тогда, когда

$$f_*: \tilde{H}_n(X; \mathbb{Z}) \rightarrow \tilde{H}_n(Y; \mathbb{Z})$$

— изоморфизм для любого $n \geq 0$.

Утверждения 10.23 — 10.25 имеют аналоги для когомологий. Отображение спектров $\iota: S^0 \rightarrow H(\mathbb{Z})$ индуцирует естественное преобразование

$$T^*(\iota): \pi_*^s \rightarrow H(\mathbb{Z})^*$$

из стабильных когомотопий в целочисленные когомологии. Обозначим $T^*(\iota)$ через ψ_s и назовем его *стабильным гомоморфизмом*.

Хопфа. Так как

$$\psi_S: \pi_S^n(S^0) \rightarrow H(\mathbb{Z})^n(S^0)$$

совпадает с гомоморфизмом

$$\iota_*: \pi_{-n}(S^0) \rightarrow \pi_{-n}(H(\mathbb{Z})),$$

то ψ_S — изоморфизм для $n > -1$ и эпиморфизм для $n = -1$. Поэтому мы можем применить к данной ситуации теорему 7.67 с $N = -1$. В результате получается следующее утверждение.

10.30. Теорема. Пусть (X, x_0) — клеточное пространство с $\dim X \leq n$. Тогда стабильный гомоморфизм Хопфа

$$\psi_S: \pi_S^q(X) \rightarrow \tilde{H}^q(X; \mathbb{Z})$$

является изоморфизмом при $q \geq n$ и эпиморфизмом при $q = n - 1$.

Пусть (X, x_0) — произвольное пунктированное пространство. Тогда n -мерным коомотопическим множеством $\pi^n(X, x_0)$ называется множество гомотопических классов $[X, x_0; S^n, s_0]$. Очевидно, что π^n является кофунктором из $\mathcal{PS}$ в категорию пунктированных множеств $\mathcal{PS}$.

10.31. Лемма. Пусть (X, x_0) — клеточное пространство с $\dim X \leq n$ ($n \geq 2$). Тогда

$$i_0: [X, x_0; S^q, s_0] \rightarrow [E(X), \Sigma^q S^0] \cong \pi_S^q(X)$$

является биекцией для $q \geq n$ и сюръекцией для $q = n - 1$.

Доказательство. Пусть $f: (X, x_0) \rightarrow (S^q, s_0)$ — некоторое отображение. Тогда i_0 задается формулой

$$i_0[f] = [E(f)].$$

Очевидно, что i_0 представляет собой естественное преобразование функторов, удовлетворяющих аксиомам суммы и Майера — Вьеториса. Поскольку

$$i_0: [S^k, s_0; S^q, s_0] \rightarrow \pi_S^q(S^k) \cong \pi_S^{q-k}(S^0) = \pi_{S-q}^S(S^0)$$

— изоморфизм при $0 \leq k \leq q$ и эпиморфизм при $k = q + 1$, то мы можем применить результаты главы 9. $\square$

В частности, если $\dim X \leq n$, то можно так снабдить множество $\pi^n(X, x_0)$ структурой абелевой группы, что отображение i_0 станет изоморфизмом.

У п р а ж н е н и е. Показать, что если $\dim X \leq 2n - 2$, то отображение

$$\Sigma: [X, x_0; S^n, s_0] \rightarrow [SX, *; S^{n+1}, s_0]$$

является биекцией. Следовательно, для всех клеточных пространств X с $\dim X \leq 2n - 2$ на $\pi^n(X, x_0)$ может быть задана групповая структура.

Рассмотрим теперь *нестабильное отображение Хопфа*

$$\psi: \pi^n(X, x_0) \rightarrow \check{H}^n(X; \mathbb{Z}),$$

определяемое как композиция $\psi_S \cdot i_0$. Если $\dim X \leq n$ (или даже $\dim X \leq 2n - 2$), то ψ — гомоморфизм. Легко дать еще одно описание отображения Хопфа ψ . Обозначим через $i^n \in \check{H}^n(S^n; \mathbb{Z})$ элемент, соответствующий при изоморфизме

$$\check{H}^n(S^n; \mathbb{Z}) \cong \check{H}^0(S^0; \mathbb{Z}) = \pi_0(H(\mathbb{Z}))$$
 элементу $\iota \in \pi_0(H(\mathbb{Z}))$.

Тогда

$$\psi[f] = f^* \iota^n \in \check{H}^n(X; \mathbb{Z}).$$

10.32. Теорема (Хопфа об изоморфизме). Пусть (X, x_0) — клеточное пространство с $\dim X \leq n$. Тогда отображение Хопфа

$$\psi: \pi^q(X, x_0) \rightarrow \check{H}^q(X; \mathbb{Z})$$

является изоморфизмом при $q \geq n$ и эпиморфизмом при $q = n - 1$.

10.33. Предыдущая теорема допускает следующее обобщение. Пусть Y — некоторое $(n - 1)$ -связное топологическое пространство. Тогда для любого клеточного эквивалента Y' пространства Y существует отображение

$$f': Y' \rightarrow H(\pi_n(Y, y_0), n),$$

индуцирующее изоморфизм на $\pi_n(-)$ (см. теорему 6.39, ii)). Гомотопический класс $[f'] \in [Y', y'_0; H(\pi_n(Y, y_0), n), *]$ определяет элемент $\iota' \in \check{H}^n(Y'; G)$, где $G = \pi_n(Y, y_0)$. В свою очередь ι' определяет элемент $\iota \in \check{H}^n(Y; G)$, $(n + 1)$ -универсальный в смысле определения 9.6. Это означает, что

$$T_{\iota}: [S^q, s_0; Y, y_0] \rightarrow \check{H}^n(S^q; G)$$

— изоморфизм при $q \leq n$ и эпиморфизм при $q = n + 1$. Применяя к этой ситуации теорему 6.31, мы получаем следующее утверждение.

10.34. Теорема. Пусть (X, x_0) — произвольное клеточное пространство. Тогда

$$T_{\iota}: [X, x_0; Y, y_0] \rightarrow \check{H}^n(X; G)$$

— изоморфизм, если $\dim X \leq n$, и эпиморфизм, если $\dim X = n + 1$.

10.35. Упражнение. Пусть X — клеточное пространство с $X^0 = \{x_0\}$. Согласно пп. 10.9 — 10.11 и упражнению 6.55, d) гомоморфизм Гуревича

$$h: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \check{H}_1(X; \mathbb{Z})$$

индуцирует изоморфизм

$$\pi_1(X, x_0) / [\pi_1, \pi_1] \rightarrow H_1(X; \mathbb{Z}),$$

где $[\pi_1, \pi_1]$ — коммутант группы $\pi_1(X, x_0)$. Показать, что это утверждение остается верным для любого линейно связного топологического пространства (X, x_0) .

10.36. Пусть $\{X^\alpha: \alpha \in A\}$ — такое направленное множество ($\alpha \leq \beta \Rightarrow X^\alpha \subset X^\beta$) подпространств топологического пространства X , что для любого компакта $C \subset X$ найдется $\alpha \in A$ с $C \subset X^\alpha$. Показать, что естественные вложения $i_\alpha: X^\alpha \rightarrow X$ индуцируют изоморфизм

$$\{i_{\alpha*}\}: \operatorname{dir} \lim H_n(X^\alpha; G) \rightarrow H_n(X, G)$$

для любого $n \geq 0$ и любой абелевой группы G .

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Среди всех различных теорий гомологий классические гомологии занимают особое место. Это объясняется в первую очередь тем, что в подавляющем большинстве случаев вычисление групп классических гомологий пространства X гораздо проще, чем вычисление групп $k_*(X)$ для любой другой теории гомологий k_* . В дальнейшем мы увидим (см. главы 15 и 16), что первым шагом в нахождении $k_*(X)$ является вычисление групп $H_*(X)$. Таким образом, с вычислительной точки зрения классические гомологии являются, так сказать, фундаментальной теорией.

Приведенное здесь доказательство теоремы Гуревича об изоморфизме на первый взгляд довольно просто. Однако оно основано на теореме Фрейденшталя о надстройке и, стало быть, на глубоких результатах гомотопической топологии (глава 6). В литературе можно найти элементарные доказательства теоремы Гуревича, которые не используют ничего, кроме определений гомотопических групп и групп сингулярных гомологий. Рекомендуем интересующемуся читателю познакомиться с одним из таких доказательств по книге Спеньера [72].

ССЫЛКИ НА ЛИТЕРАТУРУ

1. Гринберг [29].
2. Дольд [36].
3. Спеньер [72].
4. Стинрод, Эйленберг [74].

В главе 4 мы ввели понятие расслоенного пространства (локально тривиального расслоения). Рассмотрим теперь важный класс таких пространств, а именно, те из них, в каждом слое которых задана структура векторного пространства, «непрерывно зависящая от точки базы». Используя классы некоторой эквивалентности таких векторных расслоений над клеточным пространством X , мы построим абелеву группу $K^*(X)$ и покажем, что функтор K^* определяет теорию когомологий.

11.1. Определение. Символом F будет обозначаться одно из полей $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ вещественных или комплексных чисел или тело кватернионов $\mathbb{H}$. Векторным n -мерным расслоением над F (или n -мерным F -векторным расслоением) называется расслоенное пространство $\xi = (B, p, E, F^n)$, в каждом слое $p^{-1}(b)$, $b \in B$, которого задана структура векторного n -мерного пространства над F , причем:

- (i) существуют такое открытое покрытие $\{U_\alpha: \alpha \in A\}$ базы B и такие гомеоморфизмы $\phi_\alpha: U_\alpha \times F^n \rightarrow p^{-1}U_\alpha$, $\alpha \in A$, что $p \circ \phi_\alpha = p|_{U_\alpha}$;
- (ii) для каждой точки $b \in U_\alpha$ отображение $(\phi_\alpha|_{\{b\} \times F^n}): \{b\} \times F^n \rightarrow p^{-1}(b)$ является изоморфизмом векторных пространств.

В зависимости от того, какой из трех случаев $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или $\mathbb{H}$ рассматривается, мы говорим о вещественных, комплексных или кватернионных векторных расслоениях.

11.2. Примеры. i) Для любого пространства B определено тривиальное n -мерное F -векторное расслоение $(B, p_B, B \times F^n, F^n)$.

ii) Касательным расслоением $\tau(S^n)$ к n -мерной сфере S^n , $n \geq 1$, называется расслоенное пространство $(S^n, p, E, \mathbb{R}^n)$, где

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}: |x| = 1, x \cdot y = 0\}$$

и проекция $p: E \rightarrow S^n$ определена формулой $p(x, y) = x$.

Пусть U_i — открытое подмножество в S^n вида

$$U_i = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}: |x| = 1, x_i \neq 0\}, \quad 1 \leq i \leq n+1.$$

Тогда $\{U_i: 1 \leq i \leq n+1\}$ является открытым покрытием сферы S^n . Определим отображение $\phi_i: U_i \times \mathbb{R}^n \rightarrow p^{-1}U_i$, полагая

$$\phi_i(x, y) = (x, f_i(y) - (x \cdot f_i(y))x),$$

где $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ задано формулой

$$f_i(y_1, \dots, y_n) = (y_1, \dots, y_{i-1}, 0, y_i, \dots, y_n).$$

Легко видеть, что ϕ_i — гомеоморфизмы, удовлетворяющие условиям $p \cdot \phi_i = p_{U_i}$ и линейные на слоях.

iii) *Нормальным расслоением* $\nu(S^n)$ к n -мерной сфере S^n , $n \geq 1$, называется расслоенное пространство $(S^n, p', E', \mathbb{R}^1)$, где

$$E' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}: \|x\| = 1, y = \lambda x, \lambda \in \mathbb{R}^1\}$$

и проекция $p': E' \rightarrow S^n$ определена формулой $p'(x, y) = x$. Определим отображения

$$\phi: S^n \times \mathbb{R}^1 \rightarrow E' \quad \text{и} \quad \psi: E' \rightarrow S^n \times \mathbb{R}^1,$$

полагая $\phi(x, \lambda) = (x, \lambda x)$ для $(x, \lambda) \in S^n \times \mathbb{R}^1$ и $\psi(x, y) = (x, x \cdot y)$ для $(x, y) \in E'$. Тогда ϕ, ψ взаимно обратны, так что $\nu(S^n)$ — тривиальное расслоение.

11.3. Определение. Морфизмом $\phi: \xi \rightarrow \xi'$ F -векторных расслоений $\xi = (B, p, E, F^n)$ и $\xi' = (B', p', E', F^n)$ называется такая пара отображений $\phi: E \rightarrow E', \bar{\phi}: B \rightarrow B'$, что $p' \cdot \phi = \bar{\phi} \cdot p$ и $\phi|_{p^{-1}(b)}: p^{-1}(b) \rightarrow p'^{-1}(\bar{\phi}(b))$ — линейный изоморфизм для каждого $b \in B$. Тожественные отображения $1: E \rightarrow E, 1: B \rightarrow B$ определяют морфизм $1: \xi \rightarrow \xi$. Очевидным образом определяется композиция $\phi' \cdot \phi$ двух морфизмов. Говорят, что два расслоения ξ, ξ' с одной и той же базой B эквивалентны, если существуют такие морфизмы $\phi: \xi \rightarrow \xi', \psi: \xi' \rightarrow \xi$, что $\bar{\phi} = 1 = \bar{\psi}$ и $\phi \cdot \psi = 1, \psi \cdot \phi = 1$. С понятием векторного расслоения тесно связано понятие главного G -расслоения, где G — топологическая группа.

11.4. Определение. Пусть G — топологическая группа. Локально тривиальным *главным G -расслоением* называется расслоенное пространство $\xi = (B, p, E, G)$ с правым действием (ср. с п. 4.19) $E \times G \rightarrow E$ группы G на E , удовлетворяющее следующим условиям:

i) существуют такое открытое покрытие $\{U_\alpha: \alpha \in A\}$ базы B и такие гомеоморфизмы $\phi_\alpha: U_\alpha \times G \rightarrow p^{-1}(U_\alpha)$, $\alpha \in A$, что $p \cdot \phi_\alpha = p_{U_\alpha}$;

$$\text{ii) } \phi_\alpha(b, g) = \phi_\alpha(b, 1) \cdot g, \quad b \in U_\alpha, g \in G.$$

Морфизмом $\phi: \xi \rightarrow \xi'$ *главных G -расслоений* называется такая пара отображений $\phi: E \rightarrow E', \bar{\phi}: B \rightarrow B'$, что $p' \cdot \phi = \bar{\phi} \cdot p$ и $\phi(eg) = \phi(e) \cdot g$ для всех $g \in G, e \in E$. Очевидным образом вводится понятие эквивалентности двух G -расслоений ξ, ξ' над одной и той же базой B .

11.5. Определение. *Картой* (U, ϕ) *главного G -расслоения* $\xi = (B, p, E, G)$ называется пара, состоящая из открытого множества $U \subset B$ и такого гомеоморфизма $\phi: U \times G \rightarrow p^{-1}U$, что $p \cdot \phi = p_U$ и $\phi(b, g) = \phi(b, 1) \cdot g, b \in U, g \in G$. *Атласом* *главного G -расслоения* называется такое семейство карт $\{(U_\alpha, \phi_\alpha): \alpha \in A\}$, что $\{U_\alpha: \alpha \in A\}$ — открытое покрытие B .

По определению каждое главное G -расслоение обладает хотя бы одним атласом.

11.6. Определение. Множество функций перехода ξ для пространства B и топологической группы G — это открытое покрытие $\{U_\alpha: \alpha \in A\}$ пространства B вместе с семейством таких отображений $g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$, $\alpha, \beta \in A$, что

$$11.7. \quad g_{\alpha\gamma}(b) = g_{\alpha\beta}(b) \cdot g_{\beta\gamma}(b), \quad b \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma.$$

Так как, в частности, $g_{\alpha\alpha}(b) = g_{\alpha\alpha}(b) g_{\alpha\alpha}(b)$ для всех $b \in U_\alpha$, то

$$11.8. \quad g_{\alpha\alpha}(b) = 1, \quad b \in U_\alpha.$$

Из условий 11.7 и 11.8 вытекает, что

$$11.9. \quad g_{\beta\alpha}(b) = g_{\alpha\beta}(b)^{-1}, \quad b \in U_\alpha \cap U_\beta.$$

Морфизм $r: \xi \rightarrow \xi'$ между множествами функций перехода $\xi = \{U_\alpha, g_{\alpha\beta}: \alpha, \beta \in A\}$ на B и $\xi' = \{U'_\gamma, g'_{\gamma\delta}: \gamma, \delta \in \Gamma\}$ на B' состоит из отображения $r: B \rightarrow B'$ и семейства $r_{\gamma\alpha}: U_\alpha \cap r^{-1}U'_\gamma \rightarrow G$ непрерывных функций со значениями в группе G , удовлетворяющих условию

$$11.10. \quad r_{\gamma\alpha}(b) g_{\alpha\beta}(b) = g'_{\gamma\delta}(r(b)) r_{\delta\beta}(b),$$

$$b \in U_\alpha \cap U_\beta \cap r^{-1}U'_\gamma \cap r^{-1}U'_\delta.$$

Два множества функций перехода $\{U_\alpha, g_{\alpha\beta}: \alpha, \beta \in A\}$, $\{U'_\gamma, g'_{\gamma\delta}: \gamma, \delta \in \Gamma\}$ на одном и том же пространстве B называются *эквивалентными*, если существуют такие отображения $r_{\gamma\alpha}: U_\alpha \cap U'_\gamma \rightarrow G$, $\alpha \in A$, $\gamma \in \Gamma$, что

$$11.11. \quad g'_{\gamma\delta}(b) = r_{\gamma\alpha}(b) g_{\alpha\beta}(b) r_{\delta\beta}(b)^{-1}, \quad b \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U'_\gamma \cap U'_\delta.$$

Покажем, что классы эквивалентности главных G -расслоений над фиксированным пространством B естественным образом находятся во взаимно однозначном соответствии с классами эквивалентности множеств функций перехода.

11.12. Лемма. i) Пусть ξ — главное G -расслоение над B . Тогда каждому атласу $\{(U_\alpha, \phi_\alpha): \alpha \in A\}$ для ξ можно сопоставить единственное множество функций перехода $\xi = \{U_\alpha, g_{\alpha\beta}: \alpha, \beta \in A\}$, для которого

$$11.13. \quad \phi_\beta(b, g) = \phi_\alpha(b, g_{\alpha\beta}(b) g), \quad b \in U_\alpha \cap U_\beta, \quad g \in G.$$

ii) Если ξ, ξ' — два множества функций перехода, ассоциированные согласно i) с атласами $\{(U_\alpha, \phi_\alpha): \alpha \in A\}$, $\{(U'_\gamma, \phi'_\gamma): \gamma \in \Gamma\}$ расслоений $\xi = (B, p, E, G)$, $\xi' = (B', p', E', G)$, и если $\phi: \xi \rightarrow \xi'$ — морфизм расслоений, то существует и единствен такой морфизм множеств функций перехода $r: \xi \rightarrow \xi'$, что $r = \bar{\phi}$ и

$$11.14. \quad \phi \cdot \phi_\alpha(b, g) = \phi'_\gamma(\bar{\phi}(b), r_{\gamma\alpha}(b) g), \quad b \in U_\alpha \cap \bar{\phi}^{-1}U'_\gamma, \quad g \in G.$$

Доказательство. i) Для любых $\alpha, \beta \in A$ отображение

$$\psi_{\alpha\beta} = \phi_\alpha^{-1} \cdot (\phi_\beta | (U_\alpha \cap U_\beta) \times G): (U_\alpha \cap U_\beta) \times G \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times G$$

удовлетворяет условию $\rho_{U_\alpha \cap U_\beta} \cdot \psi_{\alpha\beta} = \rho_{U_\alpha \cap U_\beta}$ и, следовательно, должно иметь вид $\psi_{\alpha\beta}(b, g) = (b, h_{\alpha\beta}(b, g))$ для некоторого $h_{\alpha\beta}: (U_\alpha \cap U_\beta) \times G \rightarrow G$. Другими словами, $\phi_\beta(b, g) = \phi_\alpha(b, h_{\alpha\beta}(b, g))$, $b \in U_\alpha \cap U_\beta$, $g \in G$. Таким образом, $\phi_\alpha(b, h_{\alpha\beta}(b, g)) = \phi_\beta(b, g) = \phi_\beta(b, 1) \cdot g = \phi_\alpha(b, h_{\alpha\beta}(b, 1)) \cdot g = \phi_\alpha(b, h_{\alpha\beta}(b, 1) \cdot g)$ для всех $b \in U_\alpha \cap U_\beta$, $g \in G$. Отсюда следует, что $h_{\alpha\beta}(b, g) = h_{\alpha\beta}(b, 1) \cdot g$. Поэтому, для того чтобы удовлетворить условию 11.13, достаточно взять $g_{\alpha\beta}(b) = h_{\alpha\beta}(b, 1)$, $b \in U_\alpha \cap U_\beta$, $\alpha, \beta \in A$. Действительно, если $b \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$, то $\phi_\alpha(b, g_{\alpha\gamma}(b)g) = \phi_\gamma(b, g) = \phi_\beta(b, g_{\beta\gamma}(b)g) = \phi_\alpha(b, g_{\alpha\beta}(b)g_{\beta\gamma}(b)g)$, откуда следует, что $g_{\alpha\gamma}(b) = g_{\alpha\beta}(b)g_{\beta\gamma}(b)$. Таким образом, $\xi = \{U_\alpha, g_{\alpha\beta}: \alpha, \beta \in A\}$ является множеством функций перехода.

ii) Для любых $\alpha \in A$, $\gamma \in \Gamma$ отображения

$$\theta_{\gamma\alpha} = \phi_\gamma^{-1} \cdot \phi \cdot (\phi_\alpha | (U_\alpha \cap \bar{\phi}^{-1}U'_\gamma) \times G): (U_\alpha \cap \bar{\phi}^{-1}U'_\gamma) \times G \rightarrow U'_\gamma \times G$$

удовлетворяют условию $\rho_{U'_\gamma} \cdot \theta_{\gamma\alpha} = \bar{\phi} \cdot \rho_{U_\alpha \cap \bar{\phi}^{-1}U'_\gamma}$ и, следовательно, должны иметь вид $\theta_{\gamma\alpha}(b, g) = (\bar{\phi}(b), h_{\gamma\alpha}(b, g))$ для некоторого $h_{\gamma\alpha}: (U_\alpha \cap \bar{\phi}^{-1}U'_\gamma) \times G \rightarrow G$.

Значит,

$$\phi \cdot \phi_\alpha(b, g) = \phi'_\gamma(\bar{\phi}(b), h_{\gamma\alpha}(b, g)), \quad b \in U_\alpha \cap \bar{\phi}^{-1}U'_\gamma, \quad g \in G.$$

Но тогда $\phi'_\gamma(\bar{\phi}(b), h_{\gamma\alpha}(b, g)) = \phi \cdot \phi_\alpha(b, g) = [\phi \cdot \phi_\alpha(b, 1)] \cdot g = \phi'_\gamma(\bar{\phi}(b), h_{\gamma\alpha}(b, 1)) \cdot g = \phi'_\gamma(\bar{\phi}(b), h_{\gamma\alpha}(b, 1)g)$, откуда следует, что $h_{\gamma\alpha}(b, g) = h_{\gamma\alpha}(b, 1) \cdot g$. Таким образом, условие 11.14 будет выполнено, если мы положим $r_{\gamma\alpha}(b) = h_{\gamma\alpha}(b, 1)$ для $b \in U_\alpha \cap \bar{\phi}^{-1}U'_\gamma$, $\alpha \in A$, $\gamma \in \Gamma$. Пусть $\xi = \{U_\alpha, g_{\alpha\beta}: \alpha, \beta \in A\}$, $\xi' = \{U'_\gamma, g'_{\gamma\delta}: \gamma, \delta \in \Gamma\}$. Тогда для всех $b \in U_\alpha \cap U_\beta \cap \bar{\phi}^{-1}U'_\gamma \cap \bar{\phi}^{-1}U'_\delta$ и $g \in G$ имеем

$$\begin{aligned} \phi'_\gamma(\bar{\phi}(b), r_{\gamma\alpha}(b)g_{\alpha\beta}(b)g) &= \phi \cdot \phi_\alpha(b, g_{\alpha\beta}(b)g) = \phi \cdot \phi_\beta(b, g) = \\ &= \phi'_\delta(\bar{\phi}(b), r_{\delta\beta}(b)g) = \phi'_\delta(\bar{\phi}(b), g'_{\gamma\delta}(\bar{\phi}(b))r_{\delta\beta}(b)g), \end{aligned}$$

откуда

$$r_{\gamma\alpha}(b)g_{\alpha\beta}(b) = g'_{\gamma\delta}(\bar{\phi}(b))r_{\delta\beta}(b).$$

Следовательно, $r = \{r_{\gamma\alpha}\}$ является морфизмом множеств функций перехода. $\square$

11.15. Предложение. i) Пусть $\xi = \{U_\alpha, g_{\alpha\beta}\}$ — некоторое множество функций перехода для пространства B и топологической группы G . Тогда существуют такое главное G -расслоение $\xi = (B, p, E, G)$ и такой атлас $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$ для ξ , что ξ есть множество функций перехода, ассоциированное с этим атласом.

ii) Пусть $\xi = (B, p, E, G)$, $\xi' = (B', p', E', G)$ — два главных G -расслоения с атласами $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$, $\{U'_\gamma, \phi'_\gamma\}$ и ассоциированными множествами функций перехода ξ , ξ' . Для любого морфизма $r: \xi \rightarrow \xi'$ множество функций перехода существует морфизм $\phi: \xi \rightarrow \xi'$ главных G -расслоений, индуцирующий r .

Доказательство. i) Пусть задано множество функций перехода $\xi = \{U_\alpha, g_{\alpha\beta}\}$. Положим $E = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \times G \times \{\alpha\}$ и зададим на E отношение $\sim$, считая, что $(b, g, \alpha) \sim (b', g', \beta)$ тогда и только тогда, когда $b = b', g = g_{\alpha\beta}(b)g'$. Из равенств 11.7 — 11.9 вытекает, что $\sim$ является отношением эквивалентности. Положим $E = E/\sim$ и обозначим через $\{b, g, \alpha\}$ класс элемента (b, g, α) в E . Зададим отображение $p: E \rightarrow B$ формулой $p\{b, g, \alpha\} = b$; очевидно, что оно корректно определено и непрерывно. Зададим теперь действие группы G на E , полагая $\{b, g, \alpha\}g' = \{b, gg', \alpha\}$, $g' \in G$. Так как $\{b, (g_{\alpha\beta}(b)g)g', \alpha\} = \{b, g_{\alpha\beta}(b)(gg'), \alpha\} = \{b, gg', \beta\}$, то это действие корректно определено и по очевидным соображениям непрерывно.

Пусть $\phi_\alpha: U_\alpha \times G \rightarrow p^{-1}U_\alpha$ задано формулой $\phi_\alpha(b, g) = \{b, g, \alpha\}$. Тогда оно непрерывно и удовлетворяет условиям $p \circ \phi_\alpha = p|_{U_\alpha}$, $\phi_\alpha(b, g) = \{b, 1 \cdot g, \alpha\} = \{b, 1, \alpha\}g = \phi_\alpha(b, 1)g$, $b \in U_\alpha, g \in G$. Очевидно, что ϕ_α — гомеоморфизм. Кроме того, для любых $b \in U_\alpha \cap U_\beta$, $g \in G$ выполнены равенства $\phi_\alpha(b, g_{\alpha\beta}(b)g) = \{b, g_{\alpha\beta}(b)g, \alpha\} = \{b, g, \beta\} = \phi_\beta(b, g)$, так что $\{U_\alpha, g_{\alpha\beta}\}$ — множество функций перехода, ассоциированное с атласом $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$.

ii) Положим $\phi = p$ и определим отображение $\phi: E \rightarrow E'$ следующим образом: если $e \in E$, $e = \phi_\alpha(b, g)$ и $p(e) \in U_\alpha \cap \bar{\phi}^{-1}(U'_\gamma)$, то $\phi(e) = \phi'_\gamma(\bar{\phi}(b), r_{\gamma\alpha}(b)g)$. Если, кроме того, $p(e) \in U_\beta \cap \bar{\phi}^{-1}(U'_\delta)$, то $e = \phi_\beta(b, g_{\beta\alpha}(b)g)$ и

$$\phi'_\delta(\bar{\phi}(b), r_{\delta\beta}(b)g_{\beta\alpha}(b)g) = \phi'_\delta(\bar{\phi}(b), g'_{\delta\gamma}(\bar{\phi}(b)) \cdot r_{\gamma\alpha}(b) \cdot g) = \phi'_\gamma(\bar{\phi}(b), r_{\gamma\alpha}(b)g),$$

так что $\phi(e)$ корректно определено. Поскольку ограничение $\phi|_{p^{-1}(U_\alpha \cap \bar{\phi}^{-1}(U'_\gamma))}$ представляет собой композицию

$$p^{-1}(U_\alpha \cap \bar{\phi}^{-1}(U'_\gamma)) \xrightarrow{\phi_\alpha^{-1}} (U_\alpha \cap \bar{\phi}^{-1}(U'_\gamma)) \times G \xrightarrow{(\bar{\phi}, r_{\gamma\alpha}) \times 1} (\bar{\phi}(U_\alpha) \cap U'_\gamma) \times G \times G \xrightarrow{1 \times \mu} (\bar{\phi}(U_\alpha) \cap U'_\gamma) \times G \xrightarrow{\phi'_\gamma} p'^{-1}(\bar{\phi}(U_\alpha) \cap U'_\gamma),$$

то ясно, что ϕ непрерывно. Имеем $p' \circ \phi(e) = p' \circ \phi'_\gamma(\bar{\phi}(b), r_{\gamma\alpha}(b)g) = \bar{\phi}(b) = \phi \circ p(e)$. Так как $eh = \phi_\alpha(b, g)h = \phi_\alpha(b, gh)$, то $\phi(eh) = \phi'_\gamma(\bar{\phi}(b), r_{\gamma\alpha}(b)gh) = \phi'_\gamma(\bar{\phi}(b), r_{\gamma\alpha}(b)g)h = \phi(e)h$ для $h \in G$, $e \in E$. Таким образом, ϕ — морфизм главных G -расслоений. И, наконец, так как по определению ϕ имеет место равенство $\phi \circ \phi_\alpha(b, g) = \phi'_\gamma(\bar{\phi}(b), r_{\gamma\alpha}(b)g)$, $b \in U_\alpha \cap \bar{\phi}^{-1}(U'_\gamma)$, $g \in G$, то ϕ индуцирует морфизм $r = \{r_{\gamma\alpha}\}$ множеств функций перехода. $\square$

11.16. Теорема. Существует взаимно однозначное соответствие между классами эквивалентных главных G -расслоений над B и классами эквивалентных множеств функций перехода. Это соответствие может быть описано следующим образом: если ξ — неко-

торое G -расслоение, то с его классом эквивалентности сопоставляется класс эквивалентности $\{\xi\}$ множества функций перехода, ассоциированного с некоторым атласом расслоения ξ согласно лемме 11.12, i).

Доказательство. Если $\phi: \xi \rightarrow \xi'$ — эквивалентность G -расслоений, то лемма 11.12, ii) доставляет нам морфизм $r(\phi): \xi \rightarrow \xi'$. Так как $\bar{\phi} = 1_B$, то очевидно, что этот морфизм является эквивалентностью множеств функций перехода. Следовательно, указанное выше соответствие корректно определено.

Пусть теперь ξ — произвольное множество функций перехода. В силу предложения 11.15 существуют такое G -расслоение ξ и его атлас $\{(U_\alpha, \phi_\alpha): \alpha \in A\}$, что ξ является ассоциированным с этим атласом множеством функций перехода. Таким образом, наше соответствие сюръективно.

Пусть ξ, ξ' — два таких главных G -расслоения, что ξ и ξ' эквивалентны. Обозначим эту эквивалентность через $r: \xi \rightarrow \xi'$. Согласно предложению 11.15, ii) существует морфизм $\phi: \xi \rightarrow \xi'$, индуцирующий r . В частности, $\bar{\phi} = 1_B$. Кроме того, имеет место морфизм $r^{-1}: \xi' \rightarrow \xi$, задаваемый формулой $r^{-1} = \{r_{\gamma\alpha}^{-1}\}$. Ассоциированный с r^{-1} морфизм расслоений $\phi^{-1}: \xi' \rightarrow \xi$ служит обратным к ϕ . В самом деле, для любых $b \in U_\alpha \cap U_\gamma$, $g \in G$, $\alpha \in A$, $\gamma \in \Gamma$ выполнены равенства $\phi^{-1} \cdot \phi \cdot \phi_\alpha(b, g) = \phi^{-1} \cdot \phi'_\gamma(b, r_{\gamma\alpha}(b)g) = \phi_\alpha(b, r_{\gamma\alpha}^{-1}(b)r_{\gamma\alpha}(b)g) = \phi_\alpha(b, g)$, откуда $\phi^{-1} \cdot \phi = 1$. Аналогичным образом доказывается, что $\phi \cdot \phi^{-1} = 1$. Следовательно, $\xi \simeq \xi'$, так что наше соответствие инъективно. $\square$

11.17. Следствие. Пусть $\phi: \xi \rightarrow \xi'$ — такой морфизм главных G -расслоений над B , что $\bar{\phi} = 1_B$. Тогда ϕ является эквивалентностью.

Доказательство. Очевидно, что ассоциированный с ϕ морфизм $r(\phi): \xi \rightarrow \xi'$ множеств функций перехода является эквивалентностью. $\square$

11.18. Пусть $GL(n, F)$ — группа всех невырожденных $(n \times n)$ -матриц с коэффициентами в F . Так как $GL(n, F)$ является подмножеством в F^{n^2} , то она наделяется индуцированной топологией. Относительно этой топологии $GL(n, F)$ — топологическая группа. Покажем, что существует взаимно однозначное соответствие между классами эквивалентных n -мерных F -векторных расслоений с базой B и классами эквивалентных множеств функций перехода для B и $GL(n, F)$, а значит, взаимно однозначное соответствие с классами эквивалентных главных $GL(n, F)$ -расслоений.

11.19. Определение. Пусть $\xi = (B, p, E, F^n)$ — векторное расслоение над B . Карта (U, ϕ) для расслоения ξ состоит из открытого множества $U \subset B$ и такого линейного на слоях гомеоморфизма $\phi: U \times F^n \rightarrow p^{-1}U$, что $p \cdot \phi = p_U$. Атласом называется такая совокупность $\{(U_\alpha, \phi_\alpha): \alpha \in A\}$ карт, что $\{U_\alpha: \alpha \in A\}$ —

открытое покрытие пространства B . Любое векторное расслоение ξ обладает по крайней мере одним атласом.

Если $\{(U_\alpha, \phi_\alpha): \alpha \in A\}$ — некоторый атлас векторного расслоения ξ над B , то можно следующим образом построить множество функций перехода $\{U_\alpha, g_{\alpha\beta}: \alpha, \beta \in A\}$ для B и $GL(n, F)$.

Для любых индексов $\alpha, \beta \in A$ отображения

$$\psi_{\alpha\beta} = \phi_\alpha^{-1} \circ (\phi_\beta | (U_\alpha \cap U_\beta) \times F^n): (U_\alpha \cap U_\beta) \times F^n \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times F^n$$

имеют вид $\psi_{\alpha\beta}(b, v) = (b, h_{\alpha\beta}(b, v))$ при подходящем $h_{\alpha\beta}: (U_\alpha \cap U_\beta) \times F^n \rightarrow F^n$. Если фиксировать точку $b \in U_\alpha \cap U_\beta$, то $h_{\alpha\beta}(b, -): F^n \rightarrow F^n$ — линейный изоморфизм, т. е. $h_{\alpha\beta}(b, -) \in GL(n, F)$. Следовательно, $h_{\alpha\beta}(b, v) = g_{\alpha\beta}(b) \cdot v$, где $g_{\alpha\beta}(b) = h_{\alpha\beta}(b, -)$. Таким образом, мы имеем

$$\phi_\beta(b, v) = \phi_\alpha(b, g_{\alpha\beta}(b) \cdot v), \quad b \in U_\alpha \cap U_\beta, \quad v \in F^n.$$

С помощью рассуждений, аналогичных тем, которые использовались при доказательстве теоремы 11.16, отсюда можно вывести следующий результат.

11.20. Теорема. *Существует взаимно однозначное соответствие между классами эквивалентных n -мерных F -векторных расслоений над B и классами эквивалентных множеств функций перехода для B и $GL(n, F)$.*

Опишем теперь в явном виде соответствие {векторные расслоения} $\leftrightarrow$ { $GL(n, F)$ -расслоения}.

11.21. Пусть $\xi = (B, p, E, G)$ — некоторое главное G -расслоение и Y — топологическое пространство с заданным на нем левым действием группы G .

С ξ можно связать так называемое *ассоциированное расслоенное пространство* $\xi[Y]$ со слоем Y . Оно строится следующим образом. Определим правое действие G на $E \times Y$, полагая $(e, y)g = (eg, g^{-1}y)$, $g \in G$, $e \in E$, $y \in Y$. Пусть $E_Y = E \times Y/G$. Обозначим через $\{e, y\}$ образ точки (e, y) в E_Y , тогда $\{eg, y\} = \{e, gy\}$ для $g \in G$. Зададим отображение $p_Y: E_Y \rightarrow B$ формулой $p_Y\{e, y\} = p(e)$. Так как $p(eg) = p(e)$ для $g \in G$, то p_Y корректно определено. Легко видеть, что оно непрерывно. Если $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ — атлас для ξ , определим атлас $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ для $\xi[Y] = (B, p_Y, E_Y, Y)$, полагая

$$\psi_\alpha(b, y) = \{\phi_\alpha(b, 1), y\}, \quad b \in U_\alpha, \quad y \in Y.$$

Отображение ψ_α непрерывно и удовлетворяет условию $p_Y \circ \psi_\alpha = p_{U_\alpha}$. Композиция

$$p^{-1}(U_\alpha) \times Y \xrightarrow{\phi_\alpha^{-1} \times 1} U_\alpha \times G \times Y \xrightarrow{1 \times \rho} U_\alpha \times Y,$$

где $\rho: G \times Y \rightarrow Y$ — действие группы G на Y , индуцирует отображение $p_Y^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times Y$, обратное к ψ_α .

Если $Y = F^n$, то формула $r\{e, v\} + s\{e', v'\} = \{e, rv + sg^{-1}v'\}$, где $e'g = e$, $g \in GL(n, F)$, $r, s \in F$, задает на слоях из $\xi[F^n]$ струк-

туру векторного пространства. Относительно этой структуры все ψ_x линейны на слоях.

11.22. Предложение. Пусть η — векторное расслоение и ξ — соответствующее ему в силу теорем 11.16 и 11.20 главное $GL(n, F)$ -расслоение. Тогда $\eta \simeq \xi[F^n]$.

Доказательство. Расслоение ξ строится следующим образом: нужно взять атлас для η и построить по множеству функций перехода этого атласа главное расслоение. Но это же множество функций перехода получается и для результирующего атласа на $\xi[F^n]$. $\square$

Функции перехода часто оказываются очень полезным инструментом при доказательстве различных утверждений. Проиллюстрируем это следующим примером.

11.23. Предложение. Пусть $(X; A, B)$ — триада с $X = \dot{A} \cup \dot{B}$, ξ — n -мерное F -векторное расслоение (соответственно, главное G -расслоение) над A , ξ' — n -мерное F -векторное расслоение (соответственно, главное G -расслоение) над B и $\phi: \xi|_{A \cap B} \rightarrow \xi'|_{A \cap B}$ — эквивалентность их ограничений на $A \cap B$ (вообще, если $\eta = (B, p, E, F^n)$ и $A \subset B$, то $\eta|_A = (A, p|_{p^{-1}(A)}, p^{-1}(A), F^n)$). Тогда существует такое n -мерное F -векторное расслоение (соответственно, главное G -расслоение) η над X , что $\eta|_A \simeq \xi$, $\eta|_B \simeq \xi'$.

Доказательство. В обоих случаях мы, по существу, работаем с множествами функций перехода. Пусть $\{U_\alpha, g_{\beta\alpha}: \alpha, \beta \in M\}$, $\{U'_\gamma, g'_{\delta\gamma}: \gamma, \delta \in N\}$ — множества функций перехода для ξ , ξ' . Обозначим через $r_{\gamma\alpha}: U_\alpha \cap U'_\gamma \rightarrow G$ (или $GL(n, F)$) функции, определяющие эквивалентность $\xi|_{A \cap B} \simeq \xi'|_{A \cap B}$; это означает, что

$$r_{\delta\beta}(b) g_{\beta\alpha}(b) = g'_{\delta\gamma}(b) r_{\gamma\alpha}(b)$$

для всех $b \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U'_\gamma \cap U'_\delta$. Тогда без труда проверяется, что $\{\dot{A} \cap U_\alpha, \dot{B} \cap U'_\gamma: \alpha \in M, \gamma \in N\}$ — открытое покрытие для X и

$$g_{\beta\alpha}: \dot{A} \cap U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G,$$

$$g'_{\delta\gamma}: \dot{B} \cap U'_\gamma \cap U'_\delta \rightarrow G,$$

$$r_{\gamma\alpha}: \dot{A} \cap \dot{B} \cap U_\alpha \cap U'_\gamma \rightarrow G$$

образуют множество функций перехода на X . Например, если $b \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U'_\gamma$, то

$$r_{\gamma\beta}(b) g_{\beta\alpha}(b) = r_{\gamma\alpha}(b);$$

чтобы доказать это, нужно положить в написанном выше уравнении $\delta = \gamma$. Таким образом, мы получаем над X главное G -расслоение (или векторное расслоение) η . Ясно, что $\eta|_A \simeq \xi$, $\eta|_B \simeq \xi'$. $\square$

11.24. Пусть $\xi = (B, p, E, G)$ — главное G -расслоение над B и $f: B' \rightarrow B$ — некоторое отображение. Построим над B' главное

G -расслоение $f^*\xi$ следующим образом¹⁾. Пусть $E' = \{(b', e) \in B' \times E: f(b') = p(e)\}$. Определим отображение $p': E' \rightarrow B'$, полагая $p'(b', e) = b'$. Если $f': E' \rightarrow E$ — отображение, заданное формулой $f'(b', e) = e$, то коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{f'} & E \\ p' \downarrow & & \downarrow p \\ B' & \xrightarrow{f} & B. \end{array}$$

Действие группы G на E' определяется правилом $(b', e)h = (b', eh)$, $h \in G$. Пусть $\{(U_\alpha, \phi_\alpha): \alpha \in A\}$ — атлас для ξ . Тогда $\{(f^{-1}U_\alpha, \phi'_\alpha): \alpha \in A\}$ является атласом для $f^*\xi = (B', p', E', G)$, где

$$\phi'_\alpha: f^{-1}U_\alpha \times G \rightarrow p'^{-1}(f^{-1}U_\alpha)$$

имеют вид $\phi'_\alpha(b', g) = (b', \phi_\alpha(f(b'), g))$, $b' \in f^{-1}U_\alpha$, $g \in G$. Ясно, что если $\xi \simeq \xi'$, то $f^*\xi \simeq f^*\xi'$.

В терминах функций перехода расслоение $f^*\xi$ можно описать следующим образом. Если $\{U_\alpha, g_{\beta\alpha}: \alpha, \beta \in A\}$ — множество функций перехода для ξ , то $\{f^{-1}U_\alpha, g_{\beta\alpha} \circ f\}$ — множество функций перехода для $f^*\xi$.

Для $f: B' \rightarrow B$, $g: B'' \rightarrow B'$ очевидно, что $(f \circ g)^*\xi = g^*(f^*\xi)$ и $1_B^*\xi \simeq \xi$.

Аналогичная конструкция индуцированного расслоения $f^*\xi$ имеет место и для векторного расслоения ξ .

11.25. Предложение. Если $\phi: \xi \rightarrow \eta$ — морфизм векторных расслоений, то существует морфизм $\psi: \xi \rightarrow \bar{\phi}^*\eta$ с $\psi = 1_B$. Следовательно, в силу следствия 11.17 имеет место эквивалентность расслоений $\xi \simeq \bar{\phi}^*\eta$.

Доказательство. Напомним, что $\bar{\phi}^*\eta = (B, p', E', G)$, где $E' = \{(b, e) \in B \times E_\eta: \bar{\phi}(b) = p_\eta(e)\}$. Определим отображение $\psi: E_\xi \rightarrow E'$, полагая $\psi(e) = (p_\xi(e), \phi(e))$. Так как $p_\eta \circ \phi(e) = \bar{\phi} \circ p_\xi(e)$ для всех $e \in E_\eta$, то очевидно, что $\psi(e)$ лежит в E' . Легко проверить, что $p' \circ \psi = p_\xi$ и $\psi(eh) = (p_\xi(eh), \phi(eh)) = (p_\xi(e), \phi(e)h) = (p_\xi(e), \phi(e))h = \psi(e)h$, $h \in G$. Таким образом, ψ — морфизм главных G -расслоений с $\psi = 1_B$. $\square$

Теперь дадим критерий существования морфизмов расслоений.

11.26. Определение. Сечением произвольного отображения $p: E \rightarrow B$ называется такое отображение $\lambda: B \rightarrow E$, что $p \circ \lambda = 1_B$.

11.27. Предложение. Пусть ξ, ξ' — два главных G -расслоения. Существует взаимно однозначное соответствие между мор-

¹⁾ При этом говорят, что расслоение $f^*\xi$ индуцировано из расслоения ξ отображением f . — Прим. ред.

физмами $\phi: \xi \rightarrow \xi'$ и сечениями λ расслоенного пространства $\xi[E']$, определяемое правилом $\phi \mapsto \lambda_\phi$, где $\lambda_\phi(b) = \{e, \phi(e)\}$ для любого $e \in p^{-1}(b)$. (Левое действие группы G на E' задается формулой $g \cdot e' = e' \cdot g^{-1}$, $e \in E'$, $g \in G$.)

Доказательство. Покажем прежде всего, что отображение λ_ϕ корректно определено. Действительно, если $\bar{e} \in p^{-1}(b)$ — некоторый элемент в слое над b , отличный от e , то найдется такое $g \in G$, что $\bar{e} = eg$ и $\{\bar{e}, \phi(\bar{e})\} = \{eg, \phi(eg)\} = \{eg, \phi(e)g\} = \{e, \phi(e)\}$. Далее, λ_ϕ непрерывно, поскольку оно является не чем иным, как отображением $E/G \rightarrow E \times E'/G$, индуцированным $(1, \phi)$. Ясно, что $p_{E'} \cdot \lambda_\phi = 1_B$.

Предположим теперь, что $\lambda: B \rightarrow E_{E'} = E \times E'/G$ является сечением проекции $p_{E'}$. Композиция $\lambda \cdot p$ должна иметь вид $e \mapsto \{e, \phi_\lambda(e)\}$ с некоторым отображением $\phi_\lambda: E \rightarrow E'$. Если $g \in G$, то $\{eg, \phi_\lambda(e)g\} = \{e, \phi_\lambda(e)\} = \lambda \cdot p(e) = \lambda \cdot p(eg) = \{eg, \phi_\lambda(eg)\}$, откуда следует, что $\phi_\lambda(eg) = \phi_\lambda(e)g$ для $e \in E$, $g \in G$. Пусть $\phi_\lambda: B \rightarrow B'$ — индуцированное отображение $E/G \rightarrow E'/G$. Если мы докажем непрерывность отображения ϕ_λ , то это будет означать, что $(\phi_\lambda, \phi_\lambda)$ — морфизм G -расслоений.

Пусть $e \in E$ и $U \subset E'$ — открытая окрестность точки $\phi_\lambda(e)$. Так как действие группы G на E' непрерывно, то найдутся открытая окрестность U' точки $\phi_\lambda(e)$ в E' и открытая окрестность V единицы 1 в G такие, что $U' \cdot V \subset U$. Возьмем такую окрестность V' единицы 1 в G , чтобы $(V')^{-1}V' \subset V$. Пусть теперь (W, ψ) — карта для ξ , содержащая $b = p(e)$; предположим, что $e = \psi(b, h)$, $h \in G$. Тогда множество $W' = \psi(W \times hV')$ открыто в E и $\{W' \times U'\}$ открыто в $E \times E'/G$. Таким образом, $O = W' \cap p^{-1} \cdot \lambda^{-1}\{W' \times U'\}$ открыто в E , $e \in O$ и, кроме того,

$$\lambda \cdot p(O) \subset \{W' \times U'\}.$$

Покажем, что $\phi_\lambda(O) \subset U$. Пусть $x \in O$, тогда $\lambda \cdot p(x) \in \{W' \times U'\}$ — для определенности возьмем $\lambda \cdot p(x) = \{x', y'\}$, $x' \in W'$, $y' \in U'$. Так как $x, x' \in W'$, то $x' = x \cdot g^{-1}$ для некоторого $g \in V$. Следовательно, $\{x, \phi_\lambda(x)\} = \lambda \cdot p(x) = \{x', y'\} = \{x \cdot g^{-1}, y'\} = \{x, y' \cdot g\}$. Но из того факта, что $y' \in U'$, $g \in V$, вытекает $y' \cdot g \in U$, т. е. $\phi_\lambda(x) \in U$. $\square$

Замечание. Если $\pi_2: E \times E'/G \rightarrow E'/G = B'$ — отображение, индуцированное проекцией на второй сомножитель, то имеют место равенства $\pi_2 \cdot \lambda_\phi = \bar{\phi}$ и $\pi_2 \cdot \lambda = \bar{\phi}_\lambda$.

Покажем теперь, что если ξ — главное G -расслоение над B и $f_0, f_1: B' \rightarrow B$ — гомотопные отображения, то $f_0^* \xi \simeq f_1^* \xi$. С этой целью для любого главного G -расслоения $\xi = (B, p, E, G)$ определим G -расслоение $\xi \times I$, полагая

$$\xi \times I = (B \times I, p \times 1, E \times I, G),$$

где G -действие задается формулой $(e, t)h = (eh, t)$, $(e, t) \in E \times I$, $h \in G$. Если $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ — атлас для ξ , то

$$\{(U_\alpha \times I, (\phi_\alpha \times 1) \circ (1 \times \tau))\}$$

является атласом для $\xi \times I$.

11.28. Лемма. Пусть $\xi = (D^n, p, E, G)$, $\xi' = (B', p', E', G)$ — главные G -расслоения, $\phi: (p \times 1)^{-1}(D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times I) \rightarrow E'$ — морфизм расслоений и $F: D^n \times I \rightarrow B'$ — некоторое продолжение морфизма $\bar{\phi}$. Тогда существует продолжающий ϕ морфизм $\Phi: \xi \times I \rightarrow \xi'$ с $\bar{\Phi} = F$.

Доказательство. Доказательство этого утверждения аналогично доказательству предложения 4.10. Выберем атласы $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$, $\{(U'_\gamma, \phi'_\gamma)\}$ расслоений ξ , ξ' . Множества $(U_\alpha \times I) \cap F^{-1}(U'_\gamma)$ образуют открытое покрытие пространства $D^n \times I$.

Так как $D^n \times I$ — компактное метрическое пространство, то можно найти такое число $\lambda > 0$, что каждое подмножество $S \subset D^n \times I$ диаметра $< \lambda$ содержится в некотором $(U_\alpha \times I) \cap F^{-1}(U'_\gamma)$. Возьмем такую мелкую триангуляцию для (D^n, S^{n-1}) , чтобы любой симплекс σ из D^n имел диаметр $< \lambda/2$, и затем разобьем отрезок $I = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1\}$ так, чтобы каждое множество $\sigma \times [t_i, t_{i+1}]$ имело диаметр $< \lambda$, $0 \leq i < k$.

Предположим, что отображение Φ уже определено на $E \times [t_0, t_i] \cup p^{-1}(S^{n-1}) \times I$ ($\Phi|_{E \times \{0\} \cup p^{-1}(S^{n-1}) \times I} = \phi$). Продолжим Φ по симплексам на $E \times [t_i, t_{i+1}]$, используя индукцию по $\dim \sigma$. Если $\dim \sigma = 0$ и $\sigma \not\subset S^{n-1}$, то возьмем такие α и γ , чтобы $\sigma \times [t_i, t_{i+1}] \subset (U_\alpha \times I) \cap F^{-1}(U'_\gamma)$. Так как $p' \cdot \Phi(\phi_\alpha(\sigma, g), t_i) = F(\sigma, t_i) \in U'_\gamma$ для каждого $g \in G$, то существует такое отображение $f_\sigma: G \rightarrow G$, что

$$\Phi(\phi_\alpha(\sigma, g), t_i) = \phi'_\gamma(F(\sigma, t_i), f_\sigma(g)).$$

Поскольку $\Phi(\phi_\alpha(\sigma, g), t_i) = \Phi(\phi_\alpha(\sigma, 1), t_i)g$, то $f_\sigma(g) = f_\sigma(1)g$ для всех $g \in G$. Пусть $g_\sigma = f_\sigma(1)$; тогда $\Phi(\phi_\alpha(\sigma, g), t_i) = \phi'_\gamma(F(\sigma, t_i), g_\sigma g)$. Определим Φ на $(p \times 1)^{-1}(\sigma \times [t_i, t_{i+1}])$, полагая

$$\Phi(\phi_\alpha(\sigma, g), t) = \phi'_\gamma(F(\sigma, t), g_\sigma g), \quad t \in [t_i, t_{i+1}].$$

Тогда Φ непрерывно продолжает отображение $\Phi|_{(p \times 1)^{-1}(\sigma \times \{t_i\})}$ и удовлетворяет условиям $p' \cdot \Phi = F \cdot (p \times 1)$, $\Phi((e, t)h) = \Phi(e, t)h$ для всех $(e, t) \in (p \times 1)^{-1}(\sigma \times [t_i, t_{i+1}])$, $h \in G$.

Предположим теперь, что отображение Φ построено на $(p \times 1)^{-1}(\sigma' \times [0, t_{i+1}])$ для всех симплексов σ' с $\dim \sigma' < m$. Пусть $\dim \sigma = m$, $\sigma \not\subset S^{n-1}$. Снова выберем такие α и γ , что $\sigma \times [t_i, t_{i+1}] \subset (U_\alpha \times I) \cap F^{-1}(U'_\gamma)$. На $(p \times 1)^{-1}(\sigma \times \{t_i\}) \cup \dot{\sigma} \times [t_i, t_{i+1}]$ отображение Φ уже определено; продолжим его на $(p \times 1)^{-1}(\sigma \times [t_i, t_{i+1}])$. Как и выше, найдем, что на $(p \times 1)^{-1}(\sigma \times \{t_i\}) \cup \dot{\sigma} \times [t_i, t_{i+1}]$ отображение Φ имеет вид

$$\Phi(\phi_\alpha(x, g), t) = \phi'_\gamma(F(x, t), f_\sigma(x, t)g)$$

для подходящего $f_\sigma: \sigma \times \{t_i\} \cup \dot{\sigma} \times [t_i, t_{i+1}] \rightarrow G$. Так как $\sigma \times \{t_i\} \cup \dot{\sigma} \times [t_i, t_{i+1}]$ является ретрактом для $\sigma \times [t_i, t_{i+1}]$, то существует продолжение $\tilde{f}_\sigma: \sigma \times [t_i, t_{i+1}] \rightarrow G$ отображения f_σ . Определим Φ на $(p \times 1)^{-1}(\sigma \times [t_i, t_{i+1}])$, полагая

$$\Phi(\phi_\alpha(x, g), t) = \phi'_\gamma(F(x, t), \tilde{f}_\sigma(x, t)g),$$

$(x, t) \in \sigma \times [t_i, t_{i+1}]$, $g \in G$. Ясно, что Φ непрерывно, служит продолжением отображения

$$\Phi|_{(p \times 1)^{-1}(\sigma \times \{t_i\} \cup \dot{\sigma} \times [t_i, t_{i+1}])}$$

и удовлетворяет условиям

$$p' \cdot \Phi = F \cdot (p \times 1), \quad \Phi((e, t)h) = \Phi(e, t)h$$

для всех $(e, t) \in (p \times 1)^{-1}(\sigma \times [t_i, t_{i+1}])$, $h \in G$. Это завершает шаг индукции. $\square$

11.29. Лемма. Пусть $\phi: \xi \rightarrow \xi'$ — морфизм расслоений и $F: B \times I \rightarrow B' — гомотопия с $F_0 = \bar{\phi}$. Если B — клеточное пространство, то существует такой морфизм расслоений $\Phi: \xi \times I \rightarrow \xi'$, что $\Phi = F$ и $\Phi|_{E \times \{0\}} = \phi$.$

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по остовам: если Φ задано на $(p \times 1)^{-1}(B^{n-1} \times I)$, то в силу предложения 11.27 определено сечение $\lambda: B^{n-1} \times I \rightarrow E \times I \times E'/G$. Мы хотим продолжить это сечение на $B^n \times I$. (Начальный шаг $n=0$ индукции очевиден: либо $B^{-1} = \emptyset$, либо $B^{-1} = \{b_0\}$ и F — гомотопия $\text{rel } b_0$.) Пусть $f_\alpha^n: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (B^n, B^{n-1})$ — характеристическое отображение клетки e_α^n . Для каждого α формула

$$(y, t) \mapsto (y, \lambda(f_\alpha^n(y), t)), \quad (y, t) \in D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times I$$

задает сечение расслоения $(f_\alpha^{n*} \xi \times I)[E']$. Из предложения 11.27 и леммы 11.28 следует существование такого отображения $\lambda_\alpha: D^n \times I \rightarrow E_{f_\alpha^{n*}} \times I \times E'/G$, что $\pi_2 \cdot \lambda_\alpha = F \cdot (f_\alpha^n \times 1)$. Продолжая λ на $e_\alpha^n \times I$ по формуле

$$\lambda(f_\alpha^n(y), t) = (f_\alpha^{n*} \times 1) \cdot \lambda_\alpha(y, t),$$

$y \in D^n$, $t \in I$, найдем, что λ непрерывно и является сечением. Продолженное таким образом сечение λ определяет, в свою очередь, морфизм $\Phi: (p \times 1)^{-1}(B^n \times I) \rightarrow E'$. $\square$

11.30. Теорема. Пусть $\xi = (B, p, E, G)$ — главное G -расслоение и $f_0, f_1: B' \rightarrow B$ — два гомотопных отображения клеточного пространства B' в клеточное пространство B . Тогда $f_0^* \xi \simeq f_1^* \xi$.

Доказательство. Пусть $F: B' \times I \rightarrow B$ — гомотопия, связывающая f_0 и f_1 . Так как существует морфизм расслоений $\Phi: f_0^* \xi \times I \rightarrow \xi$, накрывающий F , то согласно предложению 11.25 и лемме 11.29 имеет место эквивалентность $f_0^* \xi \times I \simeq F^* \xi$. Если определить отображение $i_1: B' \rightarrow B' \times I$ формулой $i_1(b') = (b', 1)$, $b' \in B'$,

то $f_1 = F \cdot i_1$, так что

$$f_1^* \xi = (F \cdot i_1)^* \xi \simeq i_1^* (F^* \xi) \simeq i_1^* (f_0^* \xi \times I) = (f_0^* \xi \times I) | (B' \times \{1\}) \simeq f_0^* \xi. \square$$

Замечание. В настоящей главе мы пока нигде не обращали внимание на отмеченные точки. Разумеется, можно рассмотреть G -расслоения (B, p, E, G) , где в B и E отмечены точки b_0, e_0 и все отображения эти точки сохраняют. При этом несколько меняется понятие эквивалентности: два расслоения $\xi = (B, p, E, G)$, $\xi' = (B', p', E', G)$ над B эквивалентны тогда и только тогда, когда существует такое отображение $\phi: (E, e_0) \rightarrow (E', e'_0)$, что $\phi(eh) = \phi(e)h$, $h \in G$, $e \in E$ и $p' \circ \phi = p$. Читатель без труда проверит, что все доказанные в этой главе результаты остаются верными и для расслоений (B, p, E, G) , в которых B, E имеют отмеченные точки.

11.31. Для любой топологической группы G можно следующим образом определить кофунктор $k_G: \mathcal{F}\mathcal{U}' \rightarrow \mathcal{F}\mathcal{S}$. Для каждого $(X, x_0) \in \mathcal{F}\mathcal{U}'$ обозначим через $k_G(X)$ множество всех классов (пунктировано) эквивалентных главных G -расслоений над X . Для любого гомотопического класса $[f]$ отображений $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ определим $k_G[f]: k_G(Y) \rightarrow k_G(X)$, полагая $k_G[f](\{\xi\}) = \{f^* \xi\}$. В силу теоремы 11.30 это отображение корректно определено. Отмеченным элементом в $k_G(X)$ является класс эквивалентности тривиального расслоения $(X, p \times 1, X \times G, G)$.

11.32. Предложение. Кофунктор k_G удовлетворяет аксиомам суммы и Майера — Вьеториса.

Доказательство. Пусть $(X; A, B)$ — некоторая клеточная триада. Согласно лемме 7.4, найдутся открытая окрестность A' множества A и деформация $H: X \times I \rightarrow X$ окрестности A' на A , переводящая B в себя. Если $j: (A, A \cap B) \rightarrow (A', A' \cap B)$ — вложение пар, то $j^*: k_G(A') \rightarrow k_G(A)$ и $(j|A \cap B)^*: k_G(A' \cap B) \rightarrow k_G(A \cap B)$ являются биекциями. Предположим, что заданы такие элементы $x_1 \in k_G(A)$, $x_2 \in k_G(B)$, для которых $i_1^*(x_1) = i_2^*(x_2)$ в множестве $k_G(A \cap B)$. Выберем $x'_1 \in k_G(A')$ так, чтобы $j^*(x'_1) = x_1$. Тогда в множестве $k_G(A' \cap B)$ имеем $i_1'^*(x'_1) = i_2'^*(x_2)$ (здесь $i_1': A' \cap B \rightarrow A'$, $i_2': A' \cap B \rightarrow B$ — естественные включения). Следовательно, элементы x'_1, x_2 представляются такими расслоениями ξ_1 на A' , ξ_2 на B , что $\xi_1|A' \cap B \simeq \xi_2|A' \cap B$. Согласно предложению 11.23, над X существует такое расслоение η , что $\eta|A' \simeq \xi_1$, $\eta|B \simeq \xi_2$ (напомним, что $\dot{A} \cup \dot{B} = X$). Если $y = \{\eta\} \in k_G(X)$, то $j_1^* y = x'_1$, $j_2^* y = x_2$, где $j_1: A' \rightarrow X$, $j_2: B \rightarrow X$ — включения. Таким образом, $j^* y = j^* j_1^* y = j^* x'_1 = x_1$ ($j_1: A \rightarrow X$ — включение). Следовательно, k_G удовлетворяет аксиоме Майера — Вьеториса.

Пусть $\{(X_\alpha, x_\alpha): \alpha \in A\}$ — некоторое семейство клеточных пространств с отмеченными точками. Для любого $y \in k_G(X_\alpha)$, $\alpha \in A$, обозначим через $\xi_\alpha = (X_\alpha, p_\alpha, E_\alpha, G)$ главное G -расслоение, пред-

ставляющее y_α . Определим над $\bigvee_\alpha X_\alpha$ расслоение $\xi = \left(\bigvee_\alpha X_\alpha, p, E, G\right)$, отождествляя в $\bigvee_\alpha E_\alpha$ те точки $e \in E_\alpha$, $e' \in E_\beta$, для которых найдется такой элемент $g \in G$, что $e = e_\alpha g$, $e' = e_\beta g$ ($e_\alpha \in E_\alpha$, $e_\beta \in E_\beta$ — отмеченные точки). Пусть E — результат этого отождествления и $p: E \rightarrow \bigvee_\alpha X_\alpha$ — очевидная проекция. Зададим на E действие группы G , полагая $\{e\}h = \{eh\}$, $e \in E_\alpha$, $h \in G$. Нетрудно показать, что это действие корректно определено, причем $p(\{e\}) = p(\{e'\})$ тогда и только тогда, когда $\{e'\} = \{e\}h$ для некоторого $h \in G$. Если $\{(U_\beta^\alpha, \phi_\beta^\alpha): \beta \in B_\alpha\}$ — такой атлас расслоения ξ_α , $\alpha \in A$, что $\phi_\beta^\alpha(x_\alpha, 1) = e_x$ всегда, когда $x_\alpha \in U_\beta^\alpha$, то из $\{(U_\beta^\alpha, \phi_\beta^\alpha): \beta \in B_\alpha, \alpha \in A\}$ можно построить атлас расслоения ξ . Ясно, что отображение $i_\alpha^*: k_\alpha\left(\bigvee_\alpha X_\alpha\right) \rightarrow k_\alpha(X_\alpha)$ переводит $\{\xi\}$ в y_α . Поэтому $\{i_\alpha^*: k_\alpha\left(\bigvee_\alpha X_\alpha\right) \rightarrow \prod_\alpha k_\alpha(X_\alpha)\}$ сюръективно. Подобным образом, если ξ, η — такие расслоения над $\bigvee_\alpha X_\alpha$, что $\xi|_{X_\alpha} \simeq \eta|_{X_\alpha}$ для всех $\alpha \in A$, то, склеивая эти эквивалентности на $\bigvee_\alpha X_\alpha$ (они сохраняют отмеченные точки), мы получим эквивалентность $\xi \simeq \eta$. Таким образом, отображение $\{i_\alpha^*\}$ инъективно, и, значит, k_α удовлетворяет аксиоме сумм. $\square$

11.33. Итак, мы показали, что кофункторы k_α удовлетворяют условиям теоремы 9.12. Поэтому для каждой топологической группы G существуют такое клеточное пространство $(BG, *)$ (определенное с точностью до гомотопического типа) и главное G -расслоение $\xi_G = (BG, p_G, EG, G)$, что заданное формулой $T[f] = \{f^* \xi_G\}$ естественное преобразование на $\mathcal{F}\mathcal{W}^0$,

$$T_G: [-; BG, *] \rightarrow k_G(-)$$

является естественной эквивалентностью. Таким образом, главные G -расслоения над клеточным пространством X классифицируются гомотопическими классами отображений $f: (X, x_0) \rightarrow (BG, *)$. Следовательно, n -мерные F -векторные расслоения над X классифицируются гомотопическими классами отображений $(X, x_0) \rightarrow (BGL(n, F), *)$.

Займемся теперь явным построением пространств $BO(n)$, $EO(n)$, $BU(n)$, $EU(n)$. С этой целью нам понадобится критерий для распознавания того, в каком случае главное G -расслоение ξ является универсальным расслоением ξ_G . Расслоение ξ_G универсально в том и только в том случае, когда для любого главного G -расслоения ξ существует морфизм $\phi: \xi \rightarrow \xi_G$ или, в силу предложения 11.27, сечение $\lambda: B \rightarrow E \times E_G/G$. Имеется несколько полезных критериев существования сечений. Один из них сформулирован в следующей теореме.

11.34. Теорема. Пусть (X, A) — относительное клеточное пространство и $\xi = (X, p, E, F)$ — расслоенное пространство над X . Пусть $\lambda': A \rightarrow E$ — сечение $\xi|_A$. Если слой F $(n-1)$ -связен и $\dim(X, A) \leq n$, то λ' продолжается до сечения $\lambda: X \rightarrow E$ проекции p .

Доказательство. Из точности последовательности слабого расслоения $p: E \rightarrow X$ вытекает, что p является n -эквивалентностью. Поэтому, согласно лемме 6.30, найдется отображение $\lambda'': X \rightarrow E$, служащее продолжением отображения λ' и удовлетворяющее условию $p \cdot \lambda'' \simeq 1_X \text{ rel } A$:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{p} & X \\ \lambda' \uparrow & \nearrow \lambda'' & \uparrow 1 \\ A & \subset & X. \end{array}$$

Так как p — слабое расслоение и (X, A) — относительное клеточное пространство, то из упражнения 5.15 следует, что гомотопия $p \cdot \lambda'' \simeq 1_X \text{ rel } A$ поднимается до гомотопии $\lambda'' \text{ rel } A$. Таким образом, мы нашли $\lambda: X \rightarrow E$ с $\lambda|_A = \lambda'$ и $p \cdot \lambda = 1_X$. $\square$

11.35. Теорема. Пусть $\xi = (\hat{B}, \hat{p}, \hat{E}, G)$ — главное G -расслоение с n -связным пространством $\hat{E}$. Тогда для любого клеточного пространства X с $\dim X \leq n$ естественное преобразование

$$T: [X, x_0; \hat{B}, \hat{b}_0] \rightarrow k_G(X), \quad T[f] = \{f^* \hat{\xi}\}$$

является биекцией.

Доказательство. Пусть ξ — главное G -расслоение над X . Так как слой ассоциированного расслоения $\xi[\hat{E}]$ является n -связным, то существует сечение λ этого расслоения: чтобы убедиться в этом, применим теорему 11.34 с $A = \{x_0\}$ и $\lambda(x_0) = \{e_0, \hat{e}_0\}$. Из предложения 11.27 вытекает существование морфизма $\phi: \xi \rightarrow \hat{\xi}$. Следовательно, $\xi \simeq \bar{\phi}^* \hat{\xi} = T[\bar{\phi}]$, так что преобразование T сюръективно.

Пусть теперь $f_0, f_1: (X, x_0) \rightarrow (\hat{B}, \hat{b}_0)$ — такие отображения, что $f_0^* \hat{\xi} \simeq f_1^* \hat{\xi}$. Положим $\xi = f_0^* \hat{\xi}$ и применим теорему 11.34 к паре $(X \times I, X \times I \cup x_0 \times I)$. В результате получается сечение λ' расслоения $((\xi \times I) | X \times I \cup \{x_0\} \times I)[\hat{E}]$, соответствующее морфизмам $((\xi \times I) | X \times 0) \simeq f_0^* \hat{\xi} \rightarrow \hat{\xi}$ и $((\xi \times I) | X \times 1) \simeq f_1^* \hat{\xi} \rightarrow \hat{\xi}$. Если $\dim X \leq n$, то $\dim(X \times I, X \times I \cup x_0 \times I) \leq n+1$. Поэтому существует сечение расслоения $(\xi \times I)[\hat{E}]$, продолжающее λ' , и, значит, морфизм $\phi: \xi \times I \rightarrow \hat{\xi}$. Но тогда $\bar{\phi}: X \times I \rightarrow \hat{B}$ представляет собой гомотопию, связывающую f_0 и f_1 . Этим доказана инъективность преобразования T . $\square$

11.36. С помощью теоремы 11.35 нетрудно построить классифицирующие пространства для $O(n)$ -расслоений. В примерах 4.14

мы определили многообразия Штифеля $V_{k,n} \cong O(n)/O(n-k)$ и многообразия Грассмана $G_{k,n} \cong O(n)/O(n-k) \times O(k)$, а также описали связывающие их расслоения. Из точности гомотопической последовательности расслоения

$$O(n-1) \rightarrow O(n) \rightarrow O(n)/O(n-1) \cong S^{n-1}$$

вытекает, что

$$\pi_q(O(n-1), *) \rightarrow \pi_q(O(n), *) \text{ — эпиморфизм для } q = n-2 \text{ и}$$

$$\pi_q(O(n-1), *) \cong \pi_q(O(n), *) \text{ для } q < n-2.$$

Таким образом,

$$\pi_q(O(n), *) \rightarrow \pi_q(O(n+k), *)$$

— эпиморфизм для $q \leq n-1$ и изоморфизм для $q < n-1$. Следовательно, $\pi_q(V_{k,k+n}, *) = 0$ для $q \leq n-1$. Значит, главное $O(k)$ -расслоение $\xi_{k,k+n} = (G_{k,k+n}, \pi, V_{k,k+n}, O(k))$ является универсальным для $O(k)$ -расслоений над клеточными пространствами размерности, не превосходящей $n-1$. Включения

$$\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^{k+1} \subset \dots \subset \mathbb{R}^{k+n} \subset \dots,$$

задаваемые формулами $(x_1, \dots, x_{k+1}) \mapsto (0, x_1, \dots, x_{k+1})$, индуцируют вложения

$$G_{k,k} \xrightarrow{i} G_{k,k+1} \xrightarrow{i} \dots \rightarrow G_{k,k+n} \rightarrow \dots$$

Положим $BO(k) = \bigcup_{n \geq 0} G_{k,k+n}$ и снабдим его такой топологией, в которой множество $U \subset BO(k)$ открыто тогда и только тогда, когда $U \cap G_{k,k+n}$ открыто в $G_{k,k+n}$ для всех $n \geq 0$. Пусть $EO(k) = \bigcup_{n \geq 0} V_{k,k+n}$ с такой же топологией и $\pi: EO(k) \rightarrow BO(k)$ — очевидное отображение. Тогда $\xi_{O(k)} = (BO(k), \pi, EO(k), O(k))$ является универсальным $O(k)$ -расслоением для всех клеточных пространств.

Аналогичным образом можно показать, что $V_{k,k+n}(\mathbb{C}) \rightarrow G_{k,k+n}(\mathbb{C})$ универсально для главных $U(k)$ -расслоений над клеточными пространствами размерности, не превышающей $2n-1$. Положим $BU(k) = \bigcup_{n \geq 0} G_{k,k+n}(\mathbb{C})$, $EU(k) = \bigcup_{n \geq 0} V_{k,k+n}(\mathbb{C})$. Точно так же $BSp(k) = \bigcup_{n \geq 0} G_{k,k+n}(\mathbb{H})$. Если обозначить через $G_{k,n}^+$ пространство ориентированных k -мерных плоскостей в $\mathbb{R}^n$, то

$$G_{k,n}^+ \cong O(n)/O(n-k) \times SO(k),$$

и можно положить $BSO(k) = \bigcup_{n \geq 0} G_{k, k+n}^+$. Аналогично,

$$BSU(k) = \bigcup_{n \geq 0} G_{k, k+n}^+(\mathbb{C}).$$

11.37. Естественное включение $O(k) \subset O(k+1)$, описанное в примерах 4.14, индуцирует отображение

$$i: O(n+k)/O(n) \times O(k) \rightarrow O(n+k+1)/O(n) \times O(k+1),$$

коммутирующее с отображениями

$$j: G_{k, k+n} \rightarrow G_{k, k+n+1}.$$

Следовательно, это включение определяет отображение $Bi: BO(k) \rightarrow BO(k+1)$. Аналогичным образом естественные включения $U(k) \subset O(2k)$ (здесь мы отождествляем $\mathbb{C}^k$ с $\mathbb{R}^{2k}$) индуцируют отображения $BU(k) \rightarrow BO(2k)$. Вообще, если $h: G \rightarrow G'$ — произвольный непрерывный гомоморфизм топологических групп и ξ — главное G -расслоение над B с функциями перехода $\{U_\alpha, g_{\beta\alpha}: \alpha, \beta \in A\}$, то $\{U_\alpha, h \cdot g_{\beta\alpha}: \alpha, \beta \in A\}$ является множеством функций перехода для главного G' -расслоения, которое мы обозначим через $h_*\xi$. Если $\xi \simeq \xi'$, то $h_*\xi \simeq h_*\xi'$. Кроме того, для произвольного отображения $f: B' \rightarrow B$ имеет место эквивалентность расслоений $f^*(h_*\xi) \simeq h_*(f^*\xi)$, поскольку оба они обладают одним и тем же множеством функций перехода $\{U_\alpha, h \cdot g_{\beta\alpha} \cdot f: \alpha, \beta \in A\}$. Следовательно, гомоморфизм h определяет естественное преобразование $T(h): k_G \rightarrow k_{G'}$, задаваемое формулой

$$T(h)(\{\xi\}) = \{h_*\xi\}.$$

Но тогда, в силу теоремы 9.13, существует такое отображение $Bh: BG \rightarrow BG'$, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} [-; BG, *] & \xrightarrow{T_G} & k_G \\ \downarrow Bh_* & & \downarrow T(h) \\ [-; BG', *] & \xrightarrow{T_{G'}} & k_{G'}. \end{array}$$

Если $h': G' \rightarrow G''$ — еще один непрерывный гомоморфизм, то $B(h' \cdot h) \simeq Bh' \cdot Bh$.

11.38. Пусть $H \subset G$ — замкнутая подгруппа топологической группы G . Говорят, что главное G -расслоение ξ допускает редукцию к H , если существует такое главное H -расслоение η , что $i_*\eta$ и ξ эквивалентны как G -расслоения ($i: H \rightarrow G$ — включение).

11.39. Предложение. Пусть ξ — главное G -расслоение над X с классифицирующим отображением $(X, x_0) \rightarrow (BG, *)$. Тогда ξ допускает редукцию к H в том и только в том случае, когда существует отображение $g: (X, x_0) \rightarrow (BH, *)$, входящее в гомото-

тически коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & & BH \\ & \nearrow g & \downarrow Bf \\ X & & BG \\ & \searrow f & \end{array}$$

Доказательство очевидно.

Замечание. Если H — подгруппа в $GL(n, F)$, то вложение $i: H \rightarrow GL(n, F)$ индуцирует H -действие на F^n . Для любого H -расслоения η расслоенное пространство $\eta[F^n]$ имеет естественную структуру векторного расслоения. Поэтому, если η является редукцией к H некоторого $GL(n, F)$ -расслоения ξ , то $\eta[F^n]$ и $\xi[F^n]$ эквивалентны как F -векторные расслоения. Например, если $\{U_\alpha, g_{\beta\alpha}: \alpha, \beta \in A\}$ — множество функций перехода для η , то $\{U_\alpha, i \cdot g_{\beta\alpha}: \alpha, \beta \in A\}$ является множеством функций перехода для ξ , а также для обоих векторных расслоений $\eta[F^n]$ и $\xi[F^n]$.

11.40. Классы эквивалентности G -расслоений над надстройкой SX находятся во взаимно однозначном соответствии с множеством $[SX, *; BG, *] \simeq [X, x_0; \Omega BG, \omega_0]$. Однако существует иное описание $k_G(SX)$ как множества гомотопических классов. Склеивающей функцией для SX называется отображение $f: (X, x_0) \rightarrow (G, 1)$. По склеивающей функции f можно построить расслоение $\xi(f)$ над SX . Действительно, пусть $C_-X = [0, 3/4) \wedge X$, $C_+X = (1/4, 1] \wedge X$, где 0 является отмеченной точкой полуинтервала $[0, 3/4)$, а 1 — отмеченной точкой $(1/4, 1]$. Тогда $\{C_-X, C_+X\}$ является открытым покрытием надстройки SX , причем $C_-X \cap C_+X = (1/4, 3/4)^+ \wedge X$. Но это пересечение имеет своим сильным деформационным ретрактом подмножество $\{1/2\} \times X$. Определим отображение $\tilde{f}: C_-X \cap C_+X \rightarrow G$, полагая $\tilde{f}[t, x] = f(x)$, $x \in X$, $t \in (1/4, 3/4)$. Тогда C_-X , C_+X , $\tilde{f}$, а также отображения $C_-X \rightarrow G$, $C_+X \rightarrow G$, переводящие все $C_\pm X$ в единицу группы G , образуют множество функций перехода на SX и, следовательно, в силу предложения 11.15 определяют расслоение $\xi(f)$. Легко видеть, что для любого отображения $g: (X', x'_0) \rightarrow (X, x_0)$ имеет место эквивалентность расслоений $Sg^*(\xi(f)) \simeq \xi(f \cdot g)$.

11.41. Лемма. Если X — клеточное пространство и $f_0, f_1: (X, x_0) \rightarrow (G, 1)$ — две склеивающие функции, то $f_0 \simeq f_1 \text{ rel } x_0$ тогда и только тогда, когда $\xi(f_0) \simeq \xi(f_1)$.

Доказательство. Пусть $F: X \wedge I^+ \rightarrow G$ — гомотопия, связывающая f_0 и f_1 . Тогда $\xi(F)$ — расслоение над $S(X \wedge I^+) \cong SX \wedge I^+$. Если $i_0, i_1: SX \rightarrow SX \wedge I^+$ — вложения, задаваемые формулами $i_\varepsilon(y) = [y, \varepsilon]$, $\varepsilon = 0, 1$, $y \in SX$, то $i_0^*(\xi(F)) \simeq \xi(F \cdot i_0) = \xi(f_0)$, $i_1^*(\xi(F)) \simeq \xi(F \cdot i_1) = \xi(f_1)$. Так как проекция $SX \times I \rightarrow SX \times I^+$ является гомотопией между i_0 и i_1 , то согласно теореме 11.30 имеем $i_0^*(\xi(F)) \simeq i_1^*(\xi(F))$.

Обратно, если $\xi(f_0) \simeq \xi(f_1)$, то существуют такие отображения $r_-: (C_-X, *) \rightarrow (G, 1)$, $r_+: (C_+X, *) \rightarrow (G, 1)$, что $\bar{f}_1[t, x] = r_-[t, x] \cdot \bar{f}_0[t, x] \cdot r_+[t, x]$ для $x \in X$, $t \in (1/4, 3/4)$. Определим отображение $H: X \times I \rightarrow G$, полагая

$$H(x, t) = r_-[t/2, x] \cdot f_0(x) \cdot r_+[1 - t/2, x]$$

для $(x, t) \in X \times I$. Тогда

$$H_0(x) = r_-[0, x] \cdot f_0(x) \cdot r_+[1, x] = 1 \cdot f_0(x) \cdot 1 = f_0(x)$$

и

$$\begin{aligned} H_1(x) &= r_-[1/2, x] \cdot f_0(x) \cdot r_+[1/2, x] = \\ &= r_-[1/2, x] \cdot \bar{f}_0[1/2, x] \cdot r_+[1/2, x] = \bar{f}_1[1/2, x] = f_1(x). \quad \square \end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем естественное преобразование $T': [-; G, 1] \rightarrow k_G \cdot S$, задаваемое формулой $T'[f] = \{\xi(f)\}$. Легко видеть, что $T'(X)$ инъективно для любого X .

11.42. Лемма. T' является естественной эквивалентностью на категории $\mathcal{F}\mathcal{W}'$.

Доказательство. Нам нужно показать, что каждое G -расслоение ξ над SX с точностью до эквивалентности имеет вид $\xi(f)$ для некоторой склеивающей функции $f: X \rightarrow G$. Так как C_-X , C_+X стягиваемы, то $k_G(C_-X) = 0 = k_G(C_+X)$, и, следовательно, расслоения $\xi|_{C_-X}$, $\xi|_{C_+X}$ тривиальны. Поэтому система $\{(C_-X, \phi_-), (C_+X, \phi_+)\}$, где ϕ_- , ϕ_+ — произвольные тривиализации расслоений $\xi|_{C_-X}$, $\xi|_{C_+X}$, является атласом расслоения ξ . Этот атлас задает множество функций перехода $\{C_-X, C_+X, g\}$, $g: C_-X \cap C_+X \rightarrow G$. Определим отображение $\bar{f}: (X, x_0) \rightarrow (G, 1)$ формулой $\bar{f}(x) = g[1/2, x]$. Мы хотим показать, что $\bar{\xi} \simeq \xi(f)$.

Прежде всего, очевидно, что $\bar{f} \simeq g \operatorname{rel} *$; пусть $H: (C_-X \cap C_+X) \wedge I^+ \rightarrow G$ — соответствующая гомотопия. Тогда $\{C_-X \wedge I^+, C_+X \wedge I^+, H\}$ является множеством функций перехода на $SX \wedge I^+$ и, значит, на $SX \wedge I^+$ определено такое расслоение η , что $i_0^* \eta \simeq \bar{\xi}(f)$, $i_1^* \eta \simeq \bar{\xi}$. Но $\eta \simeq \pi^* i_0^* \eta \simeq i_0^* \eta \times I$ (где $\pi: SX \times I \rightarrow SX \times 0$ — проекция), и поэтому $i_1^* \eta \simeq i_1^* (i_0^* \eta \times I) \simeq i_0^* \eta$. $\square$

11.43. Предположим, что группа G имеет гомотопический тип клеточного пространства. Так как кофункторы $[-; G, 1]$ и $[-; \Omega BG, \omega_0]$ естественно эквивалентны на категории $\mathcal{F}\mathcal{W}'$, то из теоремы 9.13 вытекает существование гомотопической эквивалентности

$$\mu_G: (G, 1) \simeq (\Omega BG, \omega_0).$$

В частности, отсюда следует, что $\pi_n(BG, *) \cong \pi_{n-1}(G, 1)$, $n \geq 1$. Нетрудно видеть, что μ_G естественна относительно гомоморфизмов $h: G \rightarrow G'$.

Пусть $O(n, F)$ есть $O(n)$, $U(n)$ или $Sp(n)$ соответственно тому, что F есть $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или $\mathbb{H}$.

11.44. Предложение. Для всех $n \geq 1$ и $F = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ или $\mathbb{H}$ группа $O(n, F)$ является сильным деформационным ретрактом группы $GL(n, F)$.

Доказательство. Обозначим через $H(n, F) \subset GL(n, F)$ подгруппу верхних треугольных матриц. Из теоремы ортогонализации Грама — Шмидта немедленно следует, что каждая матрица $A \in GL(n, F)$ единственным образом представляется в виде $A = OH$, где $O \in O(n, F)$, $H \in H(n, F)$. Таким образом, отображение

$$\theta: O(n, F) \times H(n, F) \rightarrow GL(n, F), \quad \theta(O, H) = OH,$$

биективно. Можно показать, что θ — гомеоморфизм. Но группа $H(n, F)$ стягиваема: соответствующая деформация $G: H(n, F) \times I \rightarrow H(n, F)$ задается формулой

$$G\left(\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & 1 & \dots & \dots \\ & & \dots & \dots \\ & & & 1 & a_{n-1,n} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, t\right) = \begin{pmatrix} 1 & (1-t)a_{12} & \dots & (1-t)a_{1n} \\ & 1 & \dots & \dots \\ & & \dots & \dots \\ & & & 1 & (1-t)a_{n-1,n} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $1 \times G: O(n, F) \times H(n, F) \times I \rightarrow O(n, F) \times H(n, F)$ является деформацией $O(n, F) \times H(n, F)$ на $O(n, F) \times \{1\}$. $\square$

11.45. Предложение. Каждое $GL(n, F)$ -расслоение над клеточным пространством допускает редукцию к $O(n, F)$ -расслоению. Поэтому можно считать, что любое F -векторное расслоение имеет вид $\eta[F^n]$ для некоторого $O(n, F)$ -расслоения η .

Доказательство. Из коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(BO(n, F), *) & \xrightarrow{Bi_*} & \pi_n(BGL(n, F), *) \\ \parallel & & \parallel \\ \pi_{n-1}(\Omega BO(n, F), \omega_0) & \xrightarrow{\Omega Bi_*} & \pi_{n-1}(\Omega BGL(n, F), \omega_0) \\ \cong \uparrow \mu_{O*} & & \cong \uparrow \mu_{G*} \\ \pi_{n-1}(O(n, F), 1) & \xrightarrow[\cong]{I_*} & \pi_{n-1}(GL(n, F), 1) \end{array}$$

вытекает, что Bi — слабая гомотопическая эквивалентность. Поэтому, согласно теореме 6.31,

$$[X, x_0; BO(n, F), *] \xrightarrow{Bi_*} [\lambda, x_0; BGL(n, F), *]$$

является биекцией для всех клеточных пространств X . Следовательно, любое отображение $f: (X, x_0) \rightarrow (BGL(n, F), *)$ допускает поднятие в $BO(n, F)$. $\square$

Таким образом, классы эквивалентных n -мерных F -векторных расслоений находятся во взаимно однозначном соответствии с гомотопическими классами отображений в $BO(n, F)$.

11.46. Пусть $\xi = (B, p, E, F)$ и $\xi' = (B', p', E', F')$ — произвольные расслоенные пространства. Произведением ξ и ξ' назы-

вается расслоенное пространство $\xi \times \xi' = (B \times B', p \times p', E \times E', F \times F')$. Произведение главного G -расслоения с главным G' -расслоением естественным образом наделяется структурой главного $G \times G'$ -расслоения. Например, если $\xi = \{U_\alpha, g_{\beta\alpha}: \alpha, \beta \in A\}$ и $\xi' = \{V_\gamma, g'_{\delta\gamma}: \gamma, \delta \in \Gamma\}$ — множества функций перехода для ξ и ξ' соответственно, то

$$\xi \times \xi' = \{U_\alpha \times V_\gamma, g_{\beta\alpha} \times g'_{\delta\gamma}: \alpha, \beta \in A, \gamma, \delta \in \Gamma\}$$

является множеством функций перехода для $\xi \times \xi'$. Аналогично, если ξ, ξ' — векторные расслоения со слоями F^n, F^m , то $\xi \times \xi'$ естественным образом наделяется структурой векторного расслоения со слоем $F^n \times F^m = F^{n+m}$. Например, если $\{U_\alpha, \phi_\alpha: \alpha \in A\}$ и $\{V_\gamma, \psi_\gamma: \gamma \in \Gamma\}$ — атласы для векторных расслоений ξ и ξ' , то $\{U_\alpha \times V_\gamma, (\phi_\alpha \times \psi_\gamma) \cdot (1 \times \tau \times 1): \alpha \in A, \gamma \in \Gamma\}$ является атласом для векторного расслоения $\xi \times \xi'$. Кроме того, очевидно, что для $GL(n, F)$ -расслоения ξ и $GL(m, F)$ -расслоения ξ' имеет место эквивалентность

$$\xi[F^n] \times \xi'[F^m] \simeq (\xi \times \xi')[F^{n+m}].$$

Если ξ и ξ' — векторные расслоения над одной и той же базой B , то можно образовать новое расслоение $\xi \oplus \xi'$, полагая $\xi \oplus \xi' = \Delta^*(\xi \times \xi')$, где $\Delta: B \rightarrow B \times B$ — диагональное отображение. Таким образом, $\xi \oplus \xi'$ также является векторным расслоением над B . Оно называется *суммой Уитни* векторных расслоений ξ и ξ' . Слой $\xi \oplus \xi'$ над точкой $b \in B$ представляет собой прямую сумму слоев расслоений ξ и ξ' над этой же точкой.

Пусть ξ_n — универсальное $O(n, F)$ -расслоение над пространством $BO(n, F)$ и $h: O(n, F) \times O(m, F) \rightarrow O(n+m, F)$ — вложение из примеров 4.14. Тогда расслоение $h_*(\xi_n \times \xi_m)$ над $BO(n, F) \times BO(m, F)$ классифицируется отображением

$$\omega_{n,m}: BO(n, F) \times BO(m, F) \rightarrow BO(n+m, F),$$

единственным с точностью до гомотопности.

11.47. Лемма. Для любых трех расслоенных пространств ξ_1, ξ_2, ξ_3 имеет место эквивалентность $(\xi_1 \times \xi_2) \times \xi_3 \simeq \xi_1 \times (\xi_2 \times \xi_3)$. При этом, если ξ_1, ξ_2 и ξ_3 являются векторными или главными расслоениями, то и указанная эквивалентность может быть выбрана как эквивалентность векторных или главных расслоений.

11.48. Следствие. Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} BO(n, F) \times BO(m, F) \times BO(q, F) & \xrightarrow{1 \times \omega_{m,q}} & BO(n, F) \times BO(m+q, F) \\ \downarrow \omega_{n,m} \times 1 & & \downarrow \omega_{n,m+q} \\ BO(n+m, F) \times BO(q, F) & \xrightarrow{\omega_{n+m,q}} & BO(n+m+q, F) \end{array}$$

гомотопически коммутативна для всех n, m, q .

Доказательства очевидны. $\square$

11.49. Лемма. Пусть ξ_1, ξ_2 — расслоения пространства над B_1, B_2 соответственно и $\tau: B_1 \times B_2 \rightarrow B_2 \times B_1$ — отображение, заданное формулой $\tau(x, y) = (y, x)$. Тогда $\tau^*(\xi_2 \times \xi_1) \simeq \xi_1 \times \xi_2$. Если ξ_1, ξ_2 — главные расслоения (соответственно, векторные расслоения), то имеет место эквивалентность главных расслоений (соответственно векторных расслоений).

11.50. Следствие. Пусть ξ_1, ξ_2 — векторные расслоения над одной и той же базой B . Тогда $\xi_1 \oplus \xi_2 \simeq \xi_2 \oplus \xi_1$.

Доказательство. Так как $\tau \cdot \Delta = \Delta$, то

$$\xi_1 \oplus \xi_2 = \Delta^*(\xi_1 \times \xi_2) \approx \Delta^* \tau^*(\xi_2 \times \xi_1) = \Delta^*(\xi_2 \times \xi_1) = \xi_2 \oplus \xi_1. \quad \square$$

11.51. Следствие. Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} BO(n, F) \times BO(m, F) & \xrightarrow{\tau} & BO(m, F) \times BO(n, F) \\ \searrow \omega_{n, m} & & \swarrow \omega_{m, n} \\ & BO(n + m, F) & \end{array}$$

гомотопически коммутативна для всех n, m . $\square$

Для каждого $n \geq 0$ обозначим через e_n тривиальное $O(n, F)$ -расслоение:

$$e_n = (*, p_n, O(n, F), O(n, F)).$$

Тем же самым символом e_n будем обозначать тривиальное $O(n, F)$ -расслоение над B : $e_n = (B, p_B, B \times O(n, F), O(n, F))$. Без труда проверяется следующее утверждение.

11.52. Лемма. Пусть $Bi: BO(n, F) \rightarrow BO(n + m, F)$ — отображение классифицирующих пространств, индуцированное включением $O(n, F) \subset O(n + m, F)$, и $h: O(n, F) \times O(m, F) \rightarrow O(n + m, F)$ — включение из примеров 4.14. Тогда имеет место эквивалентность $h_*(\xi_n \times e_m) \simeq Bi^*(\xi_{n+m})$ расслоений над $BO(n, F) \times \{*\} \cong BO(n, F)$.

11.53. Следствие. Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} BO(n, F) \times BO(m, F) & & \\ \nearrow (1, *) & \searrow \omega_{n, m} & \\ BO(n, F) & \xrightarrow{Bi} & BO(n + m, F) \end{array}$$

гомотопически коммутативна для любых n, m .

11.54. Определение. Начиная с данного места, мы не исключаем возможности того, что рассматриваемые векторные расслоения имеют различные размерности над различными компонентами связности базы. Говорят, что два векторных расслоения ξ, η над одной и той же базой X (но не обязательно одной и той же размерности) стабильно эквивалентны (обозначение $\xi \simeq_s \eta$), если

над X существуют такие тривиальные расслоения e' , e'' , что $\xi \oplus e' \simeq \eta \oplus e''$. Обозначим через $\widehat{KO}(X)$ множество всех классов стабильной эквивалентности вещественных векторных расслоений над X . Класс стабильной эквивалентности векторного расслоения ξ будет обозначаться через $\{\xi\}_s$.

Введем в множестве $\widehat{KO}(X)$ операцию сложения $+$, полагая $\{\xi\}_s + \{\eta\}_s = \{\xi \oplus \eta\}_s$. Ясно, что эта операция корректно определена, а из леммы 11.47 и следствия 11.50 вытекает, что она ассоциативна и коммутативна. Класс $\{e\}_s$ любого тривиального расслоения является нулевым элементом относительно этой операции. Покажем, что $\widehat{KO}(X)$ — группа, т. е. что для каждого $\{\xi\}_s \in \widehat{KO}(X)$ существует элемент $-\{\xi\}_s$.

11.55. Предложение. Пусть ξ — векторное расслоение над конечномерным клеточным пространством X . Тогда над X существует такое векторное расслоение η , что $\xi \oplus \eta \simeq \varepsilon^N$ для некоторого N .

Доказательство. Предположим, что ξ имеет размерность k , а пространство X n -мерно. Из п. 11.36 вытекает, что k -мерные расслоения над X классифицируются гомотопическими классами отображений из X в $G_{k, k+n+1}$. Универсальное k -мерное расслоение $\xi_k = (G_{k, k+n+1}, \pi, E_k, \mathbb{R}^k)$ может быть описано следующим образом:

$$E_k = \{(W, x) \in G_{k, k+n+1} \times \mathbb{R}^{n+k+1} : x \in W\}$$

и $\pi: E_k \rightarrow G_{k, k+n+1}$ задается формулой $\pi(W, x) = W$.

Построим дополнительное расслоение $\xi_k = (G_{k, k+n+1}, \bar{\pi}, E_k, \mathbb{R}^{n+1})$ с $E_k = \{(W, x) \in G_{k, k+n+1} \times \mathbb{R}^{n+k+1} : x \perp W\}$ и $\bar{\pi}(W, x) = W$. Теперь нетрудно определить отображение расслоений $\phi: \xi_k \oplus \xi_k \rightarrow \varepsilon^{n+k+1} = G_{k, k+n+1} \times \mathbb{R}^{n+k+1}$, полагая $\phi((W, x), (W, x')) = (W, x + x')$. Без труда проверяется, что ϕ — эквивалентность расслоений.

Предположим теперь, что нашему расслоению ξ отвечает отображение $f: X \rightarrow G_{k, k+n+1}$, так что $\xi \simeq f^* \xi_k$. Пусть $\eta = f^* \xi_k$; тогда $\xi \oplus \eta \simeq f^* \xi_k \oplus f^* \xi_k \simeq f^* (\xi_k \oplus \xi_k) \simeq \varepsilon^{n+k+1}$. $\square$

$\widehat{KO}$ является представимым кофунктором на категории $\mathcal{F}\mathcal{C}\mathcal{W}_f$ конечных связных клеточных пространств с отмеченными точками. Существуют естественные включения $G_{k, k+n} \subset G_{k+1, k+n+1}$, задаваемые правилом $W \mapsto \langle W, e_{k+n+1} \rangle = \{(k+1)\text{-мерная плоскость, натянутая на } W \text{ и } e_{k+n+1}\}$. Эти включения индуцируют включения $BO(k) \subset BO(k+1)$, $k \geq 1$. Положим

$$BO = \bigcup_{k \geq 1} BO(k)$$

и введем в BO слабую топологию. Пусть ξ_k — универсальное k -мерное векторное расслоение над $BO(k)$. Если X — конечное клеточное пространство, то оно компактно, так что любое отображение $f: X \rightarrow BO$ пропускается через $BO(k)$ для некоторого k . Положим

$T[f] = \{f^* \xi_k\}_s \in \tilde{K}\tilde{O}(X)$. Нам нужно показать, что T корректно определено. С этой целью рассмотрим отображение $g: X \rightarrow BO$, такое, что $g \simeq f$. Если g пропускается через $BO(l)$, то $T[g] = \{g^* \xi_l\}_s$. Пусть $H: X \times I \rightarrow BO$ — гомотопия, связывающая f и g ; тогда H пропускается через $BO(n)$ для некоторого n . Так как $f = H \cdot i_0$, $g = H \cdot i_1$, то можно считать, что $n \geq k$, $n \geq l$. Согласно теореме 11.30 имеет место эквивалентность расслоений $f^* \xi_n \simeq g^* \xi_n$. Но тогда, в силу леммы 11.52, $g^* \xi_l \oplus \varepsilon^{n-l} \simeq g^* \xi_n \simeq f^* \xi_k \oplus \varepsilon^{n-k}$. Другими словами, $g^* \xi_l \simeq_s f^* \xi_k$, т. е. $T[g] = T[f]$.

11.56. Теорема.

$$T: [-; BO, *] \rightarrow \tilde{K}\tilde{O}$$

является естественной эквивалентностью на категории $\mathcal{F}\mathcal{E}\mathcal{W}'_F$.

Доказательство. Пусть ξ — некоторое векторное расслоение над X ; тогда существует такое отображение $f: X \rightarrow BO(k)$, что $f^* \xi_k \simeq \xi$. Если $i_k: BO(k) \rightarrow BO$ — вложение, то $T[i_k \cdot f] = \{\xi\}_s$, так что T сюръективно.

Предположим теперь, что $T[f] = T[g]$ для некоторых двух отображений $f, g: X \rightarrow BO$. Тогда существует такое n , что f и g пропускаются через $BO(n)$ и $\{f^* \xi_n\}_s = \{g^* \xi_n\}_s$. Другими словами, $f^* \xi_n \oplus e^k \simeq g^* \xi_n \oplus e^k$ для некоторого k . Следовательно, $f^* \xi_{n+k} \simeq g^* \xi_{n+k}$, поэтому в силу универсальности ξ_{n+k} мы имеем $f \simeq g$ в $BO(n+k)$ и, значит, в BO . Таким образом, $[f] = [g]$. $\square$

Аналогичным образом определяются множество $\tilde{K}(X)$ классов стабильно эквивалентных комплексных векторных расслоений над X и множество $\tilde{K}Sp(X)$ классов стабильно эквивалентных кватернионных векторных расслоений над X . В категории $\mathcal{F}\mathcal{E}\mathcal{W}'_F$ имеют место естественные эквивалентности

$$[-; BU, *] \cong \tilde{K}, \quad [-; BSp, *] \cong \tilde{K}Sp.$$

Согласно упражнению 9.14 на пространствах BO , BU и BSp можно задать структуру слабых H -групп. В действительности верен более сильный факт — эти пространства являются H -группами (и даже бесконечнократными пространствами петель; см. [22]). Доказательство этого факта основано на следующем красивом наблюдении, принадлежащем Бордману и Фогту [22].

Обозначим через $\mathcal{E}$ категорию, объектами которой являются конечномерные или счетномерные векторные пространства со скалярным произведением, а морфизмами — линейные изометрии. Определим функтор $B: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ следующим образом: для любого k -мерного векторного пространства со скалярным произведением V положим $B(V) = G_k(V \otimes \mathbb{R}^\infty)$, т. е. $B(V)$ — многообразие Грассмана k -мерных плоскостей в $V \otimes \mathbb{R}^\infty$ (топология в $G_k(V \otimes \mathbb{R}^\infty)$ определяется так же, как в аналогичном примере из 4.14). Если $f: V \rightarrow W$ — линейная изометрия k -мерного пространства V в m -мерное пространство W , то определено ортогональное дополнение

$U = f(V)^\perp$. Это $(m-k)$ -мерная плоскость в W . Для данной k -мерной плоскости P в $V \otimes \mathbb{R}^\infty$ положим

$$B(f)(P) = (f \otimes 1)(P) + U \otimes e_1 \quad (e_1 = (1, 0, 0, \dots) \in \mathbb{R}^\infty).$$

Тогда

$$B(f)(P) \in G_m(W \otimes \mathbb{R}^\infty) = B(W)$$

и легко видеть, что $B(f)$ непрерывно. Пусть теперь V — бесконечномерное пространство со скалярным произведением. Так как V является прямым пределом своих конечномерных подпространств, то можно определить $B(V)$ как $\bigcup_{\dim W < \infty} B(W)$ в слабой топологии.

Если $f: V \rightarrow V'$ — линейная изометрия, $W \subset V$ — конечномерное подпространство и $x \in B(W)$, то $B(f|_W)(x) \in B(f(W))$ определяет элемент из $B(V')$, так что f индуцирует отображение $B(f): B(V) \rightarrow B(V')$. Легко видеть, что $B: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{T}$ — функтор. Непосредственно проверяется, что если $f_t: V \rightarrow W$ — гомотопия в множестве линейных изометрий, то $B(f_t): B(V) \rightarrow B(W)$ также является гомотопией. Заметим, что $B(\mathbb{R}^0) = *$, $B(\mathbb{R}^n) = BO(n)$, $B(\mathbb{R}^\infty) = BO$. Аналогичным образом можно рассмотреть пространства BU , BSp , а также BSO и BSU .

Определим «сумму Уитни»

$$\omega: B(V) \times B(W) \rightarrow B(V \oplus W)$$

для всех конечномерных объектов $V, W \in \mathcal{C}$, полагая $\omega(P, P') = P \oplus P'$ для k -мерной плоскости $P \subset V \otimes \mathbb{R}^\infty$ и m -мерной плоскости $P' \subset W \otimes \mathbb{R}^\infty$. Действительно, тогда $P \oplus P'$ является $(k+m)$ -мерной плоскостью в $V \otimes \mathbb{R}^\infty \oplus W \otimes \mathbb{R}^\infty = (V \oplus W) \otimes \mathbb{R}^\infty$. На произвольные $V, W \in \mathcal{C}$ отображение ω продолжается с помощью перехода к прямому пределу. Без труда проверяется, что ω делает (строго) коммутативными следующие диаграммы:

11.57.

$$\begin{array}{ccc} B(U) \times B(V) \times B(W) & \xrightarrow{w \times 1} & B(U \oplus V) \times B(W) \\ \downarrow 1 \times w & & \downarrow w \\ B(U) \times B(V \oplus W) & \xrightarrow{w} & B(U \oplus V \oplus W), \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} B(V) \times B(W) & \xrightarrow{\tau} & B(W) \times B(V) & B(\mathbb{R}^0) \times B(V) & \xrightarrow{w} & B(\mathbb{R}^0 \oplus V) \\ \searrow w & & \swarrow w & \searrow \cong & & \downarrow \cong \\ & & B(V \oplus W) & & & B(V), \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 B(V) \times B(W) & \xrightarrow{\omega} & B(V \oplus W) \\
 \downarrow B(f) \times B(g) & & \downarrow B(f \oplus g) \\
 B(V') \times B(W') & \xrightarrow{\omega} & B(V' \oplus W').
 \end{array}$$

Здесь $f: V \rightarrow V'$, $g: W \rightarrow W'$ — линейные изометрии.

Было бы естественным определить умножение $\omega: BO \times BO \rightarrow BO$ как композицию

$$B(\mathbb{R}^\infty) \times B(\mathbb{R}^\infty) \xrightarrow{\omega} B(\mathbb{R}^\infty \oplus \mathbb{R}^\infty) \xrightarrow{B(f)} B(\mathbb{R}^\infty),$$

где $f: \mathbb{R}^\infty \oplus \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ — некоторая подходящая изометрия. Но как выбрать эту изометрию? Остроумное наблюдение Бордмана и Фогта состоит в том, что можно взять любую из них, так как любые две изометрии f , g гомотопны в множестве линейных изометрий.

11.58. Лемма. Любые две линейные изометрии $f, g: V \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ гомотопны в множестве линейных изометрий.

Доказательство. Пусть $i_1, i_2: \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}^\infty \oplus \mathbb{R}^\infty$ — вложения на первое и второе слагаемое. Зададим отображение $a: \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}^\infty \oplus \mathbb{R}^\infty$, полагая $a(e_{2n}) = (e_n, 0)$, $a(e_{2n-1}) = (0, e_n)$, $n \geq 1$.

i) $i_1 \simeq i_2$; непосредственно проверяется, что $H_t = \sqrt{1-t} \cdot i_1 + \sqrt{t} \cdot i_2$ является гомотопией в множестве линейных изометрий, связывающей i_1 и i_2 .

ii) $i_1 \simeq a$; в самом деле, пусть $b: \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ определено формулой $b(e_n) = e_{2n}$. Тогда $b \simeq 1_{\mathbb{R}^\infty}$, так как применяя процесс ортогонализации Грама — Шмидта к гомотопии $(1-t) \cdot 1_{\mathbb{R}^\infty} + t \cdot b$, мы получим гомотопию в множестве линейных изометрий. Следовательно, $a = a \circ 1_{\mathbb{R}^\infty} \simeq a \circ b = i_1$. Обозначим через K гомотопию, связывающую отображения i_1 и a .

Пусть теперь h — произвольная линейная изометрия $h: V \rightarrow \mathbb{R}^\infty$. Тогда формулы

$$F_t = \begin{cases} a^{-1} \cdot K_{1-4t} \cdot f, & 0 \leq t \leq 1/4, \\ a^{-1} \cdot (f \oplus h) \cdot H_{4t-1}, & 1/4 \leq t \leq 1/2, \\ a^{-1} \cdot (g \oplus h) \cdot H_{3-4t}, & 1/2 \leq t \leq 3/4, \\ a^{-1} \cdot K_{4t-3} \cdot g, & 3/4 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

задают гомотопию $F: V \times I \rightarrow \mathbb{R}^\infty$, связывающую изометрии f и g . (На самом деле, из доказательства данной леммы нетрудно извлечь тот факт, что пространство линейных изометрий $V \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ стягиваемо.) $\square$

Теперь сравнительно просто доказывается, что (BO, ω) является гомотопически коммутативной H -группой. Покажем прежде всего, что $*$ — $B(\mathbb{R}^0) \in B(\mathbb{R}^\infty)$ — гомотопическая единица. На основании перечисленных в п. 11.57 свойств отображения ω для

этого достаточно показать, что гомотопически коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} B(\mathbb{R}^0 \oplus \mathbb{R}^\infty) & \xrightarrow{B(i \oplus 1)} & B(\mathbb{R}^\infty \oplus \mathbb{R}^\infty) \\ & \searrow B(g) & \downarrow B(f) \\ & & B(\mathbb{R}^\infty), \end{array}$$

в которой $i: \mathbb{R}^0 \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ — вложение, $f: \mathbb{R}^\infty \oplus \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ — изометрия, использованная в определении ω , и $g: \mathbb{R}^0 \oplus \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ — очевидный изоморфизм.

Гомотопическая коммутативность указанной диаграммы вытекает, в свою очередь, из существования гомотопии в множестве линейных изометрий, связывающей $f_0(i \oplus 1)$ и g , а эта гомотопия следует из леммы 11.58. Для доказательства гомотопической ассоциативности умножения ω согласно диаграмме 11.57 достаточно показать, что имеет место гомотопически коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} B(\mathbb{R}^\infty \oplus \mathbb{R}^\infty \oplus \mathbb{R}^\infty) & \xrightarrow{B(f \oplus 1)} & B(\mathbb{R}^\infty \oplus \mathbb{R}^\infty) \\ \downarrow B(1 \oplus f) & & \downarrow B(f) \\ B(\mathbb{R}^\infty \oplus \mathbb{R}^\infty) & \xrightarrow{B(f)} & B(\mathbb{R}^\infty), \end{array}$$

т. е. что $B(f) \cdot B(f \oplus 1) \simeq B(f) \cdot B(1 \oplus f)$. Но это очевидно, так как согласно лемме 11.58 существует гомотопия

$$f \cdot (f \oplus 1) \simeq f \cdot (1 \oplus f): \mathbb{R}^\infty \oplus \mathbb{R}^\infty \oplus \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}^\infty$$

в множестве линейных изометрий. Гомотопическая коммутативность доказывается аналогично.

Подобным образом можно установить, что BU , BSp , BSO и BSU также являются гомотопически коммутативными H -группами.

Приведем теперь еще одно описание групп $\tilde{KO}(X)$. Пусть $V_{\mathbb{R}}(X)$ — множество всех классов эквивалентности вещественных векторных расслоений над X . Определим на $V_{\mathbb{R}}(X)$ операцию сложения $+$, полагая $\{\xi\} + \{\eta\} = \{\xi \oplus \eta\}$. Очевидно, что относительно этой операции $V_{\mathbb{R}}(X)$ является абелевой полугруппой. А теперь опишем стандартную процедуру, позволяющую вложить произвольную абелеву полугруппу в абелеву группу.

11.59. Предложение. Пусть S — абелева полугруппа. Тогда существуют абелева группа $K(S)$ и гомоморфизм $\phi: S \rightarrow K(S)$ абелевых полугрупп, обладающие следующим универсальным свойством:

вом: для любой абелевой группы A и гомоморфизма полугрупп $\psi: S \rightarrow A$ существует и единствен такой гомоморфизм $\theta: K(S) \rightarrow A$, что $\theta \circ \phi = \psi$. Этим свойством группа $K(S)$ определяется однозначно с точностью до изоморфизма.

Доказательство. Единственность группы $K(S)$ очевидна. Поэтому перейдем к ее построению. Обозначим через $\sim$ следующее отношение на $S \times S$: $(x, x') \sim (y, y')$ тогда и только тогда, когда существует такое $z \in S$, что $x + y' + z = x' + y + z$ (можно представлять себе (x, x') как «разность» $x - x'$). Без труда проверяется, что $\sim$ есть отношение эквивалентности. Положим $K(S) = S \times S / \sim$ и обозначим через $\{x, x'\}$ класс эквивалентности пары (x, x') . Зададим в $K(S)$ операцию сложения, полагая $\{x, x'\} + \{y, y'\} = \{x + y, x' + y'\}$. Легко видеть, что эта операция корректно определена и наделяет $K(S)$ структурой абелевой группы: нулевым элементом в $K(S)$ является $\{0, 0\}$ и $-\{x, x'\} = \{x', x\}$. И наконец, зададим отображение $\phi: S \rightarrow K(S)$ формулой $\phi(x) = \{x, 0\}$. Ясно, что ϕ — гомоморфизм полугрупп.

Пусть теперь задан гомоморфизм $\psi: S \rightarrow A$, где A — абелева группа. Если существует такой гомоморфизм $\theta: K(S) \rightarrow A$, что $\theta \circ \phi = \psi$, то мы должны иметь $\theta(\{x, x'\}) = \theta(\{x, 0\} - \{x', 0\}) = \theta(\phi(x) - \phi(x')) = \theta(\phi(x)) - \theta(\phi(x')) = \psi(x) - \psi(x')$. С другой стороны, если мы зададим отображение θ формулой $\theta(\{x, x'\}) = \psi(x) - \psi(x')$, то оно будет корректно определенным гомоморфизмом, удовлетворяющим условию $\theta \circ \phi = \psi$. $\square$

Положим $KO(X) = K(V_R(X))$ для $X \in \mathcal{W}'_F$. Любой элемент из $KO(X)$ представляется в виде $\{\xi\} - \{\eta\}$, где ξ, η — вещественные векторные расслоения над X . Формула $\psi\{\xi\} = \{\xi\}_s$, где $\{\xi\}_s$ — класс стабильной эквивалентности ξ , задает гомоморфизм $\psi: V_R(X) \rightarrow \tilde{KO}(X)$ для $(X_0, x) \in \mathcal{PW}'_F$. Таким образом, для $(X, x_0) \in \mathcal{PW}'_F$ существует гомоморфизм $\theta: KO(X) \rightarrow \tilde{KO}(X)$, такой, что $\theta\{\xi\} = \{\xi\}_s$. Кроме того, имеет место гомоморфизм $\kappa: \tilde{KO}(X) \rightarrow KO(X)$, задаваемый формулой $\kappa(\{\xi\}_s) = \{\xi\} - \{e^n\}$, где $n = \dim \xi$. Этот гомоморфизм корректно определен, так как если $\{\xi\}_s = \{\eta\}_s$, то $\xi \oplus e^k \simeq \eta \oplus e^l$ для некоторых k и l . Если $\dim \eta = m$, то $n + k = m + l$ или, другими словами, $n - l = m - k$. Таким образом, $\xi \oplus e^m \simeq \eta \oplus e^n$, поэтому в группе $KO(X)$ имеем $\{\xi\} - \{e^n\} = \{\eta\} - \{e^m\}$. Очевидно, что $\theta \circ \kappa = 1_{\tilde{KO}(X)}$.

Без труда проверяется, что KO — кофунктор на категории $\mathcal{W}'_F$. Если $(X, x_0) \in \mathcal{PW}'_F$, то очевидные отображения $c: X \rightarrow \{x_0\}$, $i: \{x_0\} \rightarrow X$ индуцируют гомоморфизмы $i^*: KO(X) \rightarrow KO(\{x_0\})$, $c^*: KO(\{x_0\}) \rightarrow KO(X)$. Последовательность

$$0 \rightarrow \tilde{KO}(X) \xrightarrow{\kappa} KO(X) \xrightarrow{i^*} KO(\{x_0\}) \rightarrow 0$$

точна, поэтому для любых $(X, x_0) \in \mathcal{PW}'_F$ можно отождествить группу $\tilde{KO}(X)$ с группой $\ker[i^*: KO(X) \rightarrow KO(\{x_0\})]$. Таким

образом, существует разложение в прямую сумму

$$KO(X) \cong \tilde{KO}(X) \oplus KO(\{x_0\}).$$

Ясно, что любой элемент $\{\xi\} \in V_R(\{x_0\})$ полностью определяется своей размерностью $\dim \xi$, так что $V_R(\{x_0\}) \cong \mathbb{N}$. Следовательно, $KO(\{x_0\}) = \tilde{K}(V_R(\{x_0\})) = \tilde{K}(\mathbb{N}) = \mathbb{Z}$, т. е. на категории $\mathcal{F}\mathcal{U}'_F$ имеет место естественная эквивалентность

$$[-; \mathbb{Z} \times BO] \rightarrow KO,$$

где $\mathbb{Z}$ рассматривается как топологическое пространство с дискретной топологией.

Аналогичным образом определяются абелевы полугруппы $V_{\mathbb{C}}(X)$, $V_{\mathbb{H}}(X)$ и абелевы группы $K(X) = K(V_{\mathbb{C}}(X))$, $KSp(X) = K(V_{\mathbb{H}}(X))$. Имеем

$$K(X) \cong \tilde{K}(X) \oplus K(\{x_0\}) \text{ и } KSp(X) \cong \tilde{K}Sp(X) \oplus KSp(\{x_0\}).$$

Кроме того, $K(\{x_0\}) = KSp(\{x_0\}) = \mathbb{Z}$ и

$$[-; \mathbb{Z} \times BU] \cong K, \quad [-; \mathbb{Z} \times BSp] \cong KSp.$$

Итак, мы определили на категории $\mathcal{F}\mathcal{U}'_F$ кофункторы $\tilde{KO}$, $\tilde{K}$ и $\tilde{K}Sp$. Теперь естественно спросить, как устроены «группы коэффициентов» $\tilde{KO}(S^q)$, $\tilde{K}(S^q)$, $\tilde{K}Sp(S^q)$, $q \geq 0$. Согласно теореме 11.56

$$\tilde{KO}(S^q) = [S^q, s_0; BO, *] = \pi_q(BO, *), \quad q \geq 1.$$

Если $q = 0$, то

$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cong KO(S^0) \cong \tilde{KO}(S^0) \oplus \mathbb{Z},$$

откуда $\tilde{KO}(S^0) = \mathbb{Z}$. Аналогично,

$$\tilde{K}(S^0) = \mathbb{Z}, \quad \tilde{K}(S^q) \cong \pi_q(BU, *), \quad q \geq 1,$$

$$\tilde{K}Sp(S^0) = \mathbb{Z}, \quad \tilde{K}Sp(S^q) \cong \pi_q(BSp, *), \quad q \geq 1.$$

При вычислении указанных групп коэффициентов используется следующий замечательный и очень важный результат.

11.60. Теорема (Ботт). *Имеют место гомотопические эквивалентности*

$$\mathbb{Z} \times BU \simeq \Omega^2 BU,$$

$$\mathbb{Z} \times BO \simeq \Omega^4 BSp,$$

$$\mathbb{Z} \times BSp \simeq \Omega^4 BO.$$

Мы докажем гомотопическую эквивалентность $\mathbb{Z} \times BU \simeq \Omega^2 BU$ в главе 16. Доказательства двух других эквивалентностей более сложны, хотя и основаны на тех же принципах.

В частности, мы имеем

$$\pi_{q+2}(BU, *) \cong \pi_q(\Omega^2 BU, \omega_0) \cong \pi_q(\mathbb{Z} \times BU, *) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & q=0, \\ \pi_q(BU, *), & q \geq 1; \end{cases}$$

$$\pi_{q+4}(BO, *) \cong \pi_q(\Omega^4 BO, \omega_0) \cong \pi_q(\mathbb{Z} \times BSp, *) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & q=0, \\ \pi_q(BSp, *), & q \geq 1; \end{cases}$$

$$\pi_{q+4}(BSp, *) \cong \pi_q(\Omega^4 BSp, \omega_0) \cong \pi_q(\mathbb{Z} \times BO, *) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & q=0, \\ \pi_q(BO, *), & q \geq 1 \end{cases}$$

Таким образом, группы $\pi_q(BU, *)$ повторяются с периодом 2, группы $\pi_q(BO, *)$ — с периодом 8, а группы $\pi_q(BSp, *)$ — это сдвинутые по размерности на 4 группы $\pi_q(BO, *)$. По этим соображениям теорему 11.60 называют теоремой Ботта о периодичности.

Итак, чтобы получить все группы коэффициентов $\tilde{K}\tilde{O}(S^q)$, $\tilde{K}(S^q)$ и $\tilde{K}Sp(S^q)$, достаточно вычислить $\pi_1(BU, *)$ и $\pi_q(BO, *)$, $\pi_q(BSp, *)$ для $q=1, 2, 3$. Согласно п. 11.43, мы имеем $\pi_q(BG, *) \cong \pi_{q-1}(G, 1)$ для любого $q \geq 1$ и любой топологической группы G . Поэтому достаточно вычислить группы $\pi_0(U, 1)$, $\pi_q(O, 1)$, $\pi_q(Sp, 1)$, $q=0, 1, 2$. Согласно замечаниям, сделанным в п. 11.36, для этого нужно лишь вычислить $\pi_0(U(1), 1)$, $\pi_q(Sp(1), 1)$, $\pi_q(O(q+2), 1)$, $q=0, 1, 2$.

Так как $U(1) \cong S^1$ и $Sp(1) \cong S^3$, то мы немедленно получаем $\pi_0(U(1), 1) = 0$, $\pi_q(Sp(1), 1) = 0$, $q=0, 1, 2$. Из расслоения $SO(2) \rightarrow O(2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ находим, что $\pi_0(O(2), 1) \cong \mathbb{Z}_2$. Значит, осталось лишь вычислить группы $\pi_1(O(3), 1) \cong \pi_1(SO(3), 1)$ и $\pi_2(O(4), 1) \cong \pi_2(SO(4), 1)$.

11.61. Предложение. $SO(3) \cong \mathbb{RP}^3$.

Доказательство. Рассмотрим $\mathbb{RP}^3$ как единичный трехмерный диск D^3 с отождествленными диаметрально противоположными точками граничной сферы S^2 . С другой стороны, $SO(3)$ — это группа вращений пространства $\mathbb{R}^3$ и, следовательно, любой элемент $A \in SO(3)$ представляется поворотом вокруг некоторой прямой l на угол θ , $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Пусть x — точка пересечения l с верхней полусферой H^3_+ и $f(A) = [(\theta/\pi) \cdot x] \in \mathbb{RP}^3$. Легко видеть, что отображение f непрерывно и биективно и, значит, является гомеоморфизмом. $\square$

11.62. Следствие.

$$\pi_1(SO(3), 1) \cong \mathbb{Z}_2$$

и

$$\pi_2(SO(3), 1) \cong \pi_2(S^3, s_0) = 0.$$

Рассмотрим теперь точную гомотопическую последовательность расслоения $SO(3) \rightarrow SO(4) \rightarrow S^3$. Так как $\pi_2(SO(3), 1) = 0 = \pi_2(S^3, s_0)$, то $\pi_2(SO(4), 1) = 0$.

Представим результаты наших вычислений в виде следующей таблицы:

$q \bmod 8$	0	1	2	3	4	5	6	7
$\widetilde{KO}(S^q)$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0
$\widetilde{K}(S^q)$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0
$\widetilde{KSp}(S^q)$	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0

Благодаря теореме 11.60 можно построить Ω -спектры KO и K . В качестве KO возьмем спектр периода 8 (т. е. $KO_{q+8} = KO_q$ для всех $q \in \mathbb{Z}$), определяемый следующей таблицей:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 \dots KO_0 & KO_1 & KO_2 & KO_3 & KO_4 & KO_5 & KO_6 & KO_7 & KO_8 & \dots \\
 \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \\
 \mathbb{Z} \times BO & \Omega^8 BS^p & \Omega^2 BS^p & \Omega BS^p & \mathbb{Z} \times BS^p & \Omega^3 BO & \Omega^7 BO & \Omega BO & \mathbb{Z} \times BO &
 \end{array}$$

Отображение $e'_{8q}: KO_{8q} \rightarrow \Omega KO_{8q+1}$ — это гомотопическая эквивалентность $\mathbb{Z} \times BO \rightarrow \Omega^8 BS^p$ из теоремы 11.60. Аналогично, $e'_{8q+4}: KO_{8q+4} \rightarrow \Omega KO_{8q+5}$ — это гомотопическая эквивалентность $\mathbb{Z} \times BS^p \rightarrow \Omega^4 BO$ из 11.60. Все другие e'_q суть тождественные отображения. В качестве K возьмем спектр периода 2 с $K_{2q} = \mathbb{Z} \times BU$, $K_{2q+1} = \Omega BU$; $e'_{2q}: K_{2q} \rightarrow \Omega K_{2q+1}$ — это гомотопическая эквивалентность $\mathbb{Z} \times BU \rightarrow \Omega^2 BU$ из теоремы 11.60 и $e'_{2q+1} = 1$.

Эти спектры определяют теории гомологий и когомологий K_* , KO_* и K^* , KO^* . Поскольку K и KO являются Ω -спектрами, то на категории $\mathcal{P}\mathcal{E}\mathcal{W}'_F$ имеют место изоморфизмы

$$\widetilde{KO}^0(X) \cong [X, x_0; \mathbb{Z} \times BO, (0, *)] \cong \widetilde{KO}(X),$$

$$\widetilde{K}^0(X) \cong [X, x_0; \mathbb{Z} \times BU, (0, *)] \cong \widetilde{K}(X).$$

Так как $\Sigma^2 K = K$ и $\Sigma^8 KO = KO$, то группы коэффициентов $\widetilde{K}^q(S^0)$ имеют период 2, а группы коэффициентов $\widetilde{KO}^q(S^0)$ — период 8. Они помещены в приведенной выше таблице.

Относительные группы $KO^0(X, A)$ допускают геометрическое описание в терминах расслоений над X с тривиализацией над A .

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Группы $K(X)$ и $KO(X)$ были впервые введены Атьей и Хирцебрухом в работе [19] как средство для изучения многообразий. Вскоре усилиями ряда математиков была разработана мощная теория, оказавшая огромное влияние на многие разделы топологии и глобального анализа. Так, например, K -теория позволила выявить глубокие связи между теорией эллиптических операторов на многообразиях и гомотопическими инвариантами этих многообразий (см., например, [18]). С момента своего появления и до настоящего времени K -теория демонстрирует все новые и новые свои применения к топологии многообразий. В главе 20 мы приведем важный пример таких применений (теорема Стонга — Хаттори 20.34)¹⁾ Кроме того, теории когомологий $K^*(X)$ и $KO^*(X)$ оказались весьма полезными при решении ряда проблем алгебраической топологии. В этой связи прекрасным примером является данное Адамсом решение проблемы о векторных полях на сферах [2]. Упомянем также введенный Адамсом e -инвариант, плодотворность которого при исследовании гомотопических групп сфер будет продемонстрирована в главе 19.

ССЫЛКИ НА ЛИТЕРАТУРУ

1. Адамс [2].	5. Бордман, Фогт [22].
2. Атья [16].	6. Ботт [25].
3. Атья, Зингер [18].	7. Хьюзмоллер [96].
4. Атья, Хирцебрух [19].	

¹⁾ Замечательные применения K -теории к задаче классификации структур на многообразиях дал Сулливан; см. [6*]. — *Прим. ред.*

В этой главе мы рассмотрим еще один тип теорий гомологий — так называемые теории бордизмов, имеющие своим источником многообразия. Заметим, однако, что способ построения теорий бордизмов на основе многообразий существенно отличается от способа построения K -теорий на основе векторных расслоений. Мы начнем главу с определения многообразий и формулировок некоторых теорем о них. Большая часть этих теорем приводится здесь без доказательств, так как подробное изложение их непропорционально увеличило бы данную главу (советуем читателю, незнакомому с топологией многообразий, обратиться к руководствам [51] или [45]). Далее мы определим пространство Тома векторного расслоения и различные спектры Тома MG . И наконец завершим главу наброском доказательства теоремы Тома, утверждающей, что теории гомологий, ассоциированные со спектрами MG , могут быть описаны в терминах сингулярных многообразий.

12.1. Определение. Хаусдорфово пространство M называется (топологическим) *многообразием размерности n* , если существует такое семейство

$$\{(U_\alpha, \phi_\alpha): \alpha \in A, U_\alpha \subset M, \phi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n\},$$

что $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — открытое покрытие пространства M и каждое отображение ϕ_α является гомеоморфизмом множества U_α на открытое подмножество из $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n: x_n \geq 0\}$. Пары (U_α, ϕ_α) называются *картами* многообразия M ; семейство карт $\{(U_\alpha, \phi_\alpha): \alpha \in A\}$, покрывающих M , называется *атласом*.

Пусть $\{(U_\alpha, \phi_\alpha): \alpha \in A\}$ — некоторый атлас многообразия M . Определим относительно этого атласа подмножество ∂M в M . Именно, $x \in \partial M$, если существует карта (U_α, ϕ_α) с $x \in U_\alpha$ и $\phi_\alpha(x) \in \mathbb{R}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n: x_n = 0\}$.

12.2. Лемма. Для любой точки $x \in \partial M$ выполнено равенство $H_n(M, M - \{x\}; \mathbb{Z}) = 0$, в то время как для $x \in M - \partial M$ имеет место изоморфизм $H_n(M, M - \{x\}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

Доказательство. Пусть $x \in \partial M$ и (U_α, ϕ_α) — карта с $x \in U_\alpha$ и $\phi_\alpha(x) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Обозначим через D^n диск достаточно малого радиуса в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке $\phi_\alpha(x)$. Тогда $V = \phi_\alpha^{-1}(D^n \cap \mathbb{R}_+^n)$ является окрестностью точки x в M . В силу аксиомы вырезания вложение пар

$$j: (V, V - \{x\}) \rightarrow (M, M - \{x\})$$

индуцирует изоморфизм

$$j_*: H_n(V, V - \{x\}) \rightarrow H_n(M, M - \{x\}).$$

Но оба пространства $V, V - \{x\}$ являются деформационными ретрактами для $\dot{V} = \phi_\alpha^{-1}(S^{n-1} \cap \mathbb{R}_+^n)$, так что

$$H_n(V, V - \{x\}; \mathbb{Z}) = 0.$$

Если же $x \in M - \partial M$, выберем карту (U_α, ϕ_α) с $x \in U_\alpha$ и обозначим через D^n диск достаточно малого радиуса в $\mathbb{R}^n$ с центром $\phi_\alpha(x)$. Тогда $V = \phi_\alpha^{-1}(D^n)$ — окрестность точки x в M , и мы снова имеем $H_n(M, M - \{x\}) \cong H_n(V, V - \{x\}) \cong H_n(V, \dot{V})$ с $\dot{V} = \phi_\alpha^{-1}(S^{n-1})$. Но $(V, \dot{V}) \cong (D^n, S^{n-1})$, так что $H_n(V, \dot{V}) \cong H_n(D^n, S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$. $\square$

Итак, ∂M можно охарактеризовать как множество тех точек $x \in M$, что $H_n(M, M - \{x\}; \mathbb{Z}) = 0$. Ясно, что последнее условие не зависит от выбора карты, и поэтому ∂M является инвариантно определенным подмножеством в M .

12.3. Определение. Множество ∂M называется *краем* многообразия M . Если $\partial M = \emptyset$, то M называется *многообразием без края*. Компактное многообразие без края называется *замкнутым*.

12.4. Предложение. ∂M является многообразием без края размерности $n - 1$.

Доказательство. Пусть $\{(U_\alpha, \phi_\alpha): \alpha \in A\}$ — атлас многообразия M и $A' \subset A$ — подмножество таких индексов, что $U_\alpha \cap \partial M \neq \emptyset$ для $\alpha \in A'$. Тогда

$$\{(U_\alpha \cap \partial M, \phi_\alpha|_{U_\alpha \cap \partial M}): \alpha \in A'\}$$

является атласом на ∂M . $\square$

12.5. Определение. *Дифференцируемым атласом класса C^k на многообразии M* называется такой атлас $\{(U_\alpha, \phi_\alpha): \alpha \in A\}$, что для любых $\alpha, \beta \in A$ отображение

$$\phi_\beta \circ (\phi_\alpha^{-1} | \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)): \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

имеет непрерывные частные производные порядка k . Два дифференцируемых атласа $\{(U_\alpha, \phi_\alpha): \alpha \in A\}$ и $\{(V_\beta, \psi_\beta): \beta \in B\}$ класса C^k называются *эквивалентными*, если

$$\{(U_\alpha, \phi_\alpha): \alpha \in A\} \cup \{(V_\beta, \psi_\beta): \beta \in B\}$$

есть снова дифференцируемый атлас класса C^k (очевидно, что это — отношение эквивалентности). *Дифференцируемой структурой класса C^k на M* называется класс эквивалентности дифференцируемых атласов класса C^k на M .

Дифференцируемым многообразием класса C^k называется многообразие M с дифференцируемой структурой класса C^k на нем. *Гладким многообразием* называется дифференцируемое многообразие класса C^∞ .

Замечание 1. Объединение всех атласов из данного класса эквивалентности представляет собой наибольший атлас в этом классе.

Замечание 2. В общем случае топологическое многообразие M может вовсе не иметь дифференцируемой структуры, или же может обладать несколькими различными дифференцируемыми структурами. Начиная с этого места, мы будем рассматривать лишь гладкие структуры и гладкие многообразия, хотя многие результаты имеют аналоги для многообразий класса C^k .

12.6. Пусть M — гладкое многообразие размерности n . Сопоставим этому многообразию векторное расслоение $\tau(M)$ размерности n . Для этого выберем в гладкой структуре на M какой-либо гладкий атлас $\{(U_\alpha, \phi_\alpha): \alpha \in A\}$. Пусть α, β — произвольные индексы из A ; обозначим через $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ отображение $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}|_{\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)}$. Тогда матрица Якоби

$$M_{\beta\alpha}(x) = \left(\frac{\partial (\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})_i}{\partial x_j} \right) \Big|_{\phi_\alpha(x)}$$

обратима для всех $x \in M$. Следовательно, $M_{\beta\alpha}(x) \in GL(n, \mathbb{R})$ для всех $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, $\alpha, \beta \in A$. Согласно правилу дифференцирования композиции

$$M_{\gamma\beta}(x) \cdot M_{\beta\alpha}(x) = \left(\frac{\partial (\phi_\gamma \circ \phi_\beta^{-1})_i}{\partial x_j} \right) \Big|_{\phi_\beta(x)} \cdot \left(\frac{\partial (\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})_j}{\partial x_k} \right) \Big|_{\phi_\alpha(x)} = \left(\frac{\partial (\phi_\gamma \circ \phi_\alpha^{-1})_i}{\partial x_k} \right) \Big|_{\phi_\alpha(x)}.$$

Поэтому $\{U_\alpha, M_{\alpha\beta}: \alpha, \beta \in A\}$ является множеством функций перехода и, значит, определено векторное расслоение $\tau(M)$ (или, точнее, класс эквивалентности таких расслоений).

Пусть $\{(V_\gamma, \psi_\gamma): \gamma \in \Gamma\}$ — некоторый гладкий атлас, эквивалентный атласу $\{(U_\alpha, \phi_\alpha): \alpha \in A\}$ и

$$N_{\delta\gamma}(x) = \left(\frac{\partial (\psi_\delta \circ \psi_\gamma^{-1})_i}{\partial x_j} \right) \Big|_{\psi_\gamma(x)}$$

— матрица Якоби в точке $x \in V_\gamma \cap V_\delta$. Для любого $x \in U_\alpha \cap V_\gamma$ положим

$$R_{\gamma\alpha}(x) = \left(\frac{\partial (\psi_\gamma \circ \phi_\alpha^{-1})_i}{\partial x_j} \right) \Big|_{\phi_\alpha(x)}.$$

Матрица $R_{\gamma\alpha}$ обратима, и для всех точек $x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap V_\gamma \cap V_\delta$ имеет место равенство

$$N_{\delta\gamma}(x) = R_{\delta\beta}(x) \cdot M_{\beta\alpha}(x) \cdot R_{\gamma\alpha}(x)^{-1}.$$

Таким образом, множества функций перехода

$$\{U_\alpha, M_{\beta\alpha}: \alpha, \beta \in A\} \quad \text{и} \quad \{V_\gamma, N_{\delta\gamma}: \gamma, \delta \in \Gamma\}$$

эквивалентны и, следовательно, класс эквивалентности векторного расслоения $\tau(M)$ корректно определен.

12.7. Определение. Однозначно определенный выше класс эквивалентности $\tau(M)$ называется *касательным расслоением* к M , хотя он и не является расслоением. Если же мы хотим получить настоящее векторное расслоение, то нужно взять наибольший атлас и выполнить процедуру склеивания, описанную в предложении 11.15. Многообразие M называется *ориентируемым*, если $\det(M_{\beta\alpha}(x)) > 0$ для всех x, α, β .

12.8. Определение. Пусть M, M' — гладкие многообразия размерностей n, n' соответственно и $f: M \rightarrow M'$ — некоторое отображение. Отображение f называется *гладким*, если для некоторых гладких атласов $\{(U_\alpha, \phi_\alpha): \alpha \in A\}$ на M и $\{(V_\beta, \psi_\beta): \beta \in B\}$ на M' отображения

$$\psi_\beta \circ f \circ \phi_\alpha^{-1} |_{\phi_\alpha(f^{-1}(V_\beta) \cap U_\alpha)}: \phi_\alpha(f^{-1}(V_\beta) \cap U_\alpha) \rightarrow \mathbb{R}^{n'}$$

принадлежат классу C^∞ .

12.9. Лемма. Если отображение $f: M \rightarrow M'$ гладко относительно атласов

$$\{(U_\alpha, \phi_\alpha): \alpha \in A\}, \{(V_\beta, \psi_\beta): \beta \in B\}$$

на M, M' , то оно гладко и относительно эквивалентных атласов

$$\{(U'_\delta, \theta_\delta): \delta \in \Delta\}, \{(V'_\gamma, \eta_\gamma): \gamma \in \Gamma\}.$$

Доказательство. Так как атласы $\{(U'_\delta, \theta_\delta): \delta \in \Delta\}$ и $\{(U_\alpha, \phi_\alpha): \alpha \in A\}$ эквивалентны, то $\phi_\alpha \circ (\theta_\delta^{-1} |_{\theta_\delta(U_\alpha \cap U'_\delta)})$ является отображением класса C^∞ для всех $\alpha \in A, \delta \in \Delta$. Точно так же $\eta_\gamma \circ (\psi_\beta^{-1} |_{\psi_\beta(V_\beta \cap V'_\gamma)})$ является отображением класса C^∞ для любых $\beta \in B, \gamma \in \Gamma$. Пусть $y \in \theta_\delta(f^{-1}(V'_\gamma) \cap U'_\delta)$ для некоторых индексов $\delta \in \Delta, \gamma \in \Gamma$. Выберем $\alpha \in A, \beta \in B$ так, чтобы $y \in \theta_\delta(f^{-1}(V_\beta) \cap U_\alpha)$. Тогда на $\theta_\delta(f^{-1}(V_\beta \cap V'_\gamma) \cap U_\alpha \cap U'_\delta)$ выполнено равенство

$$\eta_\gamma \circ f \circ \theta_\delta^{-1} |_{\theta_\delta(f^{-1}(V'_\gamma) \cap U'_\delta)} = (\eta_\gamma \circ \psi_\beta^{-1}) \circ (\psi_\beta \circ f \circ \phi_\alpha^{-1}) (\phi_\alpha \circ \theta_\delta^{-1}).$$

Но $\theta_\delta(f^{-1}(V_\beta \cap V'_\gamma) \cap U_\alpha \cap U'_\delta)$ является открытой окрестностью точки y ; следовательно, $\eta_\gamma \circ f \circ \theta_\delta^{-1} |_{\theta_\delta(f^{-1}(V'_\gamma) \cap U'_\delta)}$ является отображением класса C^∞ . $\square$

Таким образом, определение гладкого отображения гладких многообразий не зависит от выбора атласов.

12.10. Определение. Если $f: M \rightarrow M'$ — такой гомеоморфизм, что отображения f и f^{-1} гладки, то f называется *диффеоморфизмом*. Многообразия M и M' называются *диффеоморфными*, если существует диффеоморфизм из M в M' . Разумеется, в этом случае они имеют одну и ту же размерность.

12.11. Пусть $f: M \rightarrow M'$ — гладкое отображение и $\{(U_\alpha, \phi_\alpha): \alpha \in A\}, \{(V_\gamma, \psi_\gamma): \gamma \in \Gamma\}$ — гладкие атласы для многообразий M и M' соответственно. Тогда матрица Якоби

$$R_{\gamma\alpha}(x) = \left(\frac{\partial (\psi_\gamma \circ f \circ \phi_\alpha^{-1})_i}{\partial x_j} \right)_{\phi_\alpha(x)}, \quad x \in f^{-1}(V_\gamma) \cap U_\alpha,$$

имеет размер $(n' \times n)$. Если

$$N_{\alpha\beta}(x) = \left(\frac{\partial (\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1})_i}{\partial x_j} \Big|_{\phi_\beta(x)} \right), \quad x \in U_\alpha \cap U_\beta,$$

$$N'_{\gamma\delta}(y) = \left(\frac{\partial (\psi_\gamma \circ \psi_\delta^{-1})_i}{\partial x_j} \Big|_{\psi_\delta(y)} \right), \quad y \in V_\gamma \cap V_\delta,$$

— матрицы перехода для касательных расслоений $\tau(M)$ и $\tau(M')$, то мы имеем

$$R_{\gamma\alpha}(x) \cdot N_{\alpha\beta}(x) = N'_{\gamma\delta}(f(x)) \cdot R_{\delta\beta}(x)$$

для всех $x \in f^{-1}(V_\gamma \cap V_\delta) \cap U_\alpha \cap U_\beta$. Если бы $R_{\gamma\alpha}(x)$ была обратной квадратной матрицей, то это уравнение было бы в точности определением морфизма множеств функций перехода (см. п. 11.10). В п. 11.3 мы определили морфизм векторных расслоений как коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\phi} & E' \\ \downarrow p & & \downarrow p' \\ B & \xrightarrow{\bar{\phi}} & B', \end{array}$$

в которой ϕ является линейным изоморфизмом на каждом слое. Несколько ослабим последнее условие и будем рассматривать морфизмы, в которых отображение ϕ всего лишь линейно на каждом слое (сами расслоения могут иметь теперь различные размерности). Тогда матрицы $R_{\gamma\alpha}$ определяют морфизм $\tau(f): \tau(M) \rightarrow \tau(M')$. Если $g: M' \rightarrow M''$ — еще одно гладкое отображение, то $\tau(g \circ f) = \tau(g) \circ \tau(f)$. Очевидно, что $\tau(1) = 1_{\tau(M)}$. Морфизм $\tau(f)$ называется дифференциалом отображения f .

Пусть $f: M \rightarrow M'$ — гладкое отображение и $x \in M$. Определим ранг отображения f в точке x (обозначение $(\text{rank } f)_x$) как ранг линейного отображения $\tau(f)|_{p^{-1}(x)}: p^{-1}(x) \rightarrow p'^{-1}(f(x))$. Ясно, что $(\text{rank } f)_x = \text{rank } R_{\beta\alpha}(x)$ при соответствующем выборе атласа $\{(U_\alpha, \phi_\alpha): \alpha \in A\}$ на M , атласа $\{(V_\beta, \psi_\beta): \beta \in B\}$ на M' и индексов α, β с $x \in U_\alpha, f(x) \in V_\beta$.

12.12. Определение. Гладкое отображение $f: M \rightarrow M'$ многообразия M размерности n в многообразии M' размерности $n' \geq n$ называется *погружением*, если $(\text{rank } f)_x = n$ для всех точек $x \in M$.

Вложением называется погружение, гомеоморфно отображающее M на свой образ $f(M)$. На рис. 21 изображено погружение $\mathbb{R}^1$ в $\mathbb{R}^2$, которое инъективно, но тем не менее не является вложением. Стрелка показывает, что кривая бесконечно приближается, но не достигает оси x .

Упражнение. Показать, что погружение всегда локально инъективно.

12.13. Согласно предложению 11.45, любое векторное расслоение над клеточным пространством имеет вид $\xi[\mathbb{R}^n]$ для подходящего $O(n)$ -расслоения ξ . Таким образом, если предположить, что на M задана структура клеточного пространства (а это всегда возможно для компактного M), то слои расслоения $\tau(M)$ окажутся наделенными скалярным произведением, непрерывно меняющимся от слоя к слою (оно называется римановой метрикой на M).

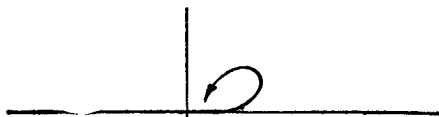


Рис. 21.

Если $f: M \rightarrow N$ — погружение, то $\tau(f): \tau(M) \rightarrow \tau(N)$ индуцирует отображение расслоений $\phi: \tau(M) \rightarrow f^*\tau(N)$ (см. предложение 11.25) с $\bar{\phi} = 1_M$. Обозначим через ν_f ортогональное дополнение к $\phi(\tau(M))$ в расслоении $f^*\tau(N)$. Таким образом, слоем расслоения ν_f над точкой $x \in M$ является ортогональное дополнение к $\tau(M)_x$ в $(f^*\tau(N))_x$. Ясно, что $\tau(M) \oplus \nu_f \simeq f^*\tau(N)$. В частности, если $N = \mathbb{R}^{n+k}$, то $\tau(N) = e^{n+k}$ и, значит, $\tau(M) \oplus \nu_f \simeq e^{n+k}$. Другими словами, в группе $KO(M)$ имеет место равенство $\{\nu_f\}_s = -\{\tau(M)\}$. Отсюда следует, что класс стабильной эквивалентности расслоения ν_f зависит лишь от M и не зависит от конкретного погружения $f: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$. Этот стабильный класс называется *стабильным нормальным расслоением* многообразия M ; очень часто стабильным нормальным расслоением к M называют любой представитель ν из этого класса.

Обозначим через $D(\nu_f)$ пространство расслоения на диски, состоящего из тех векторов из ν_f , длина которых не превосходит 1.

12.14. Теорема. Пусть M — компактное многообразие. Тогда для достаточно большого числа k существуют вложение $f: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ и гомеоморфизм $h: D(\nu_f) \rightarrow U$ на окрестность U образа $f(M) \subset \mathbb{R}^{n+k}$, удовлетворяющие следующему условию: если $i: M \rightarrow E(\nu_f)$ — нулевое сечение расслоения ν_f ($i(x) = 0$ в $(\nu_f)_x$), то $h \circ i = f$. Кроме того, если $f': M \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ и $h': D(\nu_{f'}) \rightarrow U'$ — другие вложение и гомеоморфизм, удовлетворяющие тому же условию, то существует изотопия $H: \mathbb{R}^{n+k} \times I \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ (каждое отображение H_t — диффеоморфизм, $t \in I$) с $H_0 = 1_{\mathbb{R}^{n+k}}$, $H_1 \circ f = f'$ и $H_1(U) = U'$.

Окрестность U , участвующая в этой теореме, называется *трубчатой окрестностью* образа вложения $f(M)$ в $\mathbb{R}^{n+k}$. Замечательным свойством трубчатой окрестности является наличие такой деформационной ретракции $r: U \rightarrow f(M)$, что $r \circ h = f \circ p$ ($p: E(\nu_f) \rightarrow M$ — проекция расслоения). Таким образом, локально U имеет вид произведения $V \times D^k$, где V открыто в $f(M)$.

Доказательство теоремы 12.14, а также формулируемой ниже теоремы 12.17 можно найти в книге Ленга [45].

12.15. Определение. Пусть M — гладкое многообразие и N — такое подпространство в M , что для каждой точки $x \in N$

найдется карта (U, ϕ) в максимальном гладком атласе многообразия M , содержащая x и удовлетворяющая условию $N \cap U = \phi^{-1}(\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n)$. В этом случае N называется (гладким) *подмногообразием размерности k* (или *коразмерности $n - k$*) в M . Очевидно, что семейство $\{(U \cap N, \phi|_{U \cap N})\}$ образует атлас для N , если рассматривать $\phi|_{U \cap N}$ как отображение из $U \cap N$ в $\mathbb{R}^k$. Таким образом, N является гладким многообразием размерности k . Без труда проверяется, что включение $i: N \rightarrow M$ является вложением; более общо: если $f: M' \rightarrow M$ — вложение, то $f(M')$ — подмногообразие в M .

12.16. Определение. Пусть N — подмногообразие в M' и $f: M \rightarrow M'$ — гладкое отображение замкнутого многообразия M в M' . Говорят, что f *трансверсально регулярно* на N , если для каждой такой точки $x \in M$, что $f(x) \in N$, имеет место равенство

$$[\tau(f)(\tau(M)) + \tau(N)]_{f(x)} = \tau(M')_{f(x)}.$$

Например, если $\dim M + \dim N < \dim M'$, то f трансверсально регулярно на N тогда и только тогда, когда $f(M) \cap N = \emptyset$. Если M — многообразие с краем, то требуют, чтобы f было трансверсально регулярным как в $M - \partial M$, так и в ∂M .

12.17. Теорема. Если отображение $f: M \rightarrow M'$ трансверсально регулярно на N , то $f^{-1}(N)$ является подмногообразием в M , причем $\text{codim } f^{-1}(N) = \text{codim } N$, т. е.

$$\dim M - \dim f^{-1}(N) = \dim M' - \dim N.$$

12.18. Теорема. Если N — подмногообразие в M' и $f: M \rightarrow M'$ — непрерывное отображение, то существует гомотопное ему гладкое отображение $f': M \rightarrow M'$, трансверсально регулярное на N .

Теоремы 12.14, 12.17 и 12.18 играют важную роль в доказательстве теоремы 12.30 Тома.

В 1946 году Стинрод поставил следующую проблему. Пусть X — топологическое пространство и $x \in H_n(X; \mathbb{Z})$ — некоторый класс гомологий. Существуют ли гладкое ориентированное замкнутое многообразие M размерности n с фундаментальным классом $^1) z_M \in H_n(M; \mathbb{Z})$ и непрерывное отображение $f: M \rightarrow X$ с $f_*(z_M) = x$? Другими словами, можно ли представить произвольный цикл в $C(X)$ непрерывным образом замкнутого гладкого многообразия. Тот же самый вопрос можно задать для $\mathbb{Z}_2$ -гомологий и неориентированных многообразий. Кроме того, Стинрод спрашивал, какие замкнутые гладкие (ориентированные) многообразия являются краями гладких (ориентированных) многообразий? В 1954 г. Том заложил основу для решения этих проблем, введя на множестве

¹⁾ Можно показать, что для любого замкнутого n -мерного многообразия V имеет место изоморфизм $H_n(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, и образующая этой группы называется фундаментальным классом. — Прим. ред.

замкнутых гладких (ориентированных) многообразий отношение бордантности [78]. Кроме того, он полностью классифицировал неориентированные многообразия с точностью до бордантности.

Говорят, что два замкнутых гладких n -мерных многообразия M, M' бордантны, если существует такое компактное $(n+1)$ -мерное многообразие W с краем ∂W , что $\partial W =$

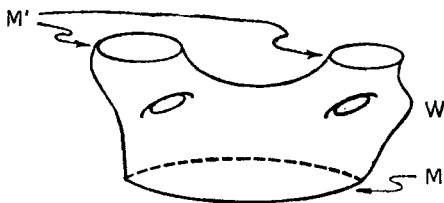


Рис. 22.

$= M \dot{\cup} M'$, где через $\dot{\cup}$ обозначено несвязное объединение M и M' (рис. 22). После появления работы Тома понятие бордизма было применено рядом авторов (Милнор, Новиков, Уолл и др.) к многообразиям с различными дополнительными структурами, что привело к новым теоремам классификации. Опишем здесь некоторые из них.

Обозначим через X систему, состоящую из семейства топологических пространств X_n и строго коммутативных диаграмм

$$\begin{array}{ccc} X_n & \xrightarrow{f_n} & BO(n) \\ g_n \downarrow & & \downarrow Bt_n \\ X_{n+1} & \xrightarrow{f_{n+1}} & BO(n+1), \end{array}$$

отображения f_n в которых являются расслоениями.

12.19. Определение. X -структурой на гладком многообразии M называется пара $(h, \tilde{v})$, состоящая из вложения $h: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ с нормальным расслоением, классифицируемым отображением $v: M \rightarrow BO(k)$, и поднятия $\tilde{v}: M \rightarrow X_k$ отображения v :

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{v} & \\ M & \nearrow & X_k \\ & v & \downarrow f_k \\ & & BO(k). \end{array}$$

(Вложение $h: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ определяет отображение $v_h: M \rightarrow G_{k, n+k} \subset BO(k)$, получающееся параллельным переносом нормальных гиперплоскостей к M . Если $T: \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ — некоторый параллельный перенос, то $v_{T \cdot h} = v_h$.) X -структура $(h, \tilde{v})$ определяет семейство пар $(h_m, \tilde{v}_m)$, $m \geq k$, с $v_m = Bt_{m-1} \cdot Bt_{m-2} \cdot \dots \cdot Bt_k \cdot v: M \rightarrow BO(m)$, $\tilde{v}_m = g_{m-1} \cdot \dots \cdot g_k \cdot \tilde{v}: M \rightarrow X_m$ и $h_m = i \cdot h: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$. Две X -структуры $(h, \tilde{v})$ (с $v: M \rightarrow BO(k)$) и $(h', \tilde{v}')$ (с $v': M \rightarrow BO(k')$) называются эквивалентными, если найдется такой номер

$k'' \geq \max(k, k')$, что $h'_{k''} = T \cdot h_{k''}$ для некоторого параллельного переноса $T: \mathbb{R}^{n+k''} \rightarrow \mathbb{R}^{n+k''}$, и существует *послойная* гомотопия $\tilde{v}'_{k''} \simeq \tilde{v}_{k''}$. (Последнее условие означает, что гомотопия $H: M \times I \rightarrow X_{k''}$, связывающая поднятия $\tilde{v}'_{k''}$ и $\tilde{v}_{k''}$, удовлетворяет для всех $t \in I$ соотношению $f_{k''} \circ H_t = v_{k''}$.) X -многообразием называется гладкое многообразие M с классом эквивалентных X -структур на нем.

Замечание. Конкретные отображения f_k играют в этом определении существенную роль; если заменить f_k гомотопными отображениями $\tilde{f}_k$, мы получим, вообще говоря, неэквивалентные X -структуры.

Будем считать, что многообразие W с краем ∂W вложено в $\mathbb{R}^{n+k+1}$ так, что W лежит в положительном полупространстве $\mathbb{R}^{n+k+1}_+ = \{x \in \mathbb{R}^{n+k+1}: x_1 \geq 0\}$ и $\partial W \subset \mathbb{R}^{n+k} = \{x \in \mathbb{R}^{n+k+1}: x_1 = 0\}$. Если $(h, \tilde{v})$ — некоторая X -структура на W и $i: \partial W \rightarrow W$ — естественное вложение края, то отображение $v \circ i$ определяет нормальное расслоение к ∂W в $\mathbb{R}^{n+k}$. Таким образом, $(h \circ i, \tilde{v} \circ i)$ является X -структурой на ∂W , называемой *индуцированной X -структурой*.

12.20. Определение. Пусть M, M' — гладкие многообразия с X -структурами $(h, \tilde{v}), (h', \tilde{v}')$ соответственно. *Отображением X -многообразий* называется такое гладкое отображение $f: M \rightarrow M'$, что $h' \circ f = T \cdot h$ для некоторого параллельного переноса T и $\tilde{v}' \circ f \simeq \tilde{v}$ (где $\simeq$ обозначает гомотопию над $v' \circ f = v$).

Соглашение. Для любого $n \geq 0$ будем рассматривать пустое множество $\emptyset$ как гладкое многообразие размерности n . Многообразие $\emptyset$ обладает единственной X -структурой.

12.21. Определение. Пусть M_1, M_2 — два замкнутых X -многообразия размерности n . Многообразия M_1, M_2 называются *X -бордантными* (обозначение $M_1 \sim_X M_2$), если существуют $(n+1)$ -мерные компактные многообразия W_1, W_2 с $M_1 \dot{\cup} \partial W_1 \cong M_2 \dot{\cup} \partial W_2$, где $\partial W_1, \partial W_2$ наделены индуцированными X -структурами и через $U \cong V$ обозначен X -дiffeоморфизм $f: U \rightarrow V$.

12.22. Лемма. *Отношение $\sim_X$ является отношением эквивалентности.*

Доказательство. i) Очевидно, что $M_1 \dot{\cup} \partial \emptyset \cong M_1 \dot{\cup} \partial \emptyset$; следовательно, $M_1 \sim_X M_1$.

ii) $M_1 \dot{\cup} \partial W_1 \cong M_2 \dot{\cup} \partial W_2 \Rightarrow M_2 \dot{\cup} \partial W_2 \cong M_1 \dot{\cup} \partial W_1$.

iii) Если $M_1 \dot{\cup} \partial W_1 \cong M_2 \dot{\cup} \partial W_2$ и $M_2 \dot{\cup} \partial W'_2 \cong M_3 \dot{\cup} \partial W_3$, то

$$M_1 \dot{\cup} \partial (W_1 \dot{\cup} W'_2) = M_1 \dot{\cup} \partial W_1 \dot{\cup} \partial W'_2 \cong M_2 \dot{\cup} \partial W_2 \dot{\cup} \partial W'_2 \cong \\ M_3 \dot{\cup} \partial W_2 \dot{\cup} \partial W_3 = M_3 \dot{\cup} \partial (W_2 \dot{\cup} W_3). \quad \square$$

Обозначим через Ω_n^X множество классов X -бордантных замкнутых n -мерных X -многообразий, $n \geq 0$.

12.23. Лемма. *Операция $\dot{\cup}$ взятия несвязного объединения индуцирует на Ω_n^X операцию суммы $+$, относительно которой Ω_n^X*

является абелевой группой, $n \geq 0$. Класс $\{\Phi\}$ определяет нулевой элемент в Ω_n^X .

Доказательство. Пусть $M_1 \dot{\cup} \partial W_1 \cong M_2 \dot{\cup} \partial W_2$ и $N_1 \dot{\cup} \partial U_1 \cong N_2 \dot{\cup} \partial U_2$. Тогда

$$\begin{aligned} M_1 \dot{\cup} N_1 \dot{\cup} \partial(W_1 \dot{\cup} U_1) &= (M_1 \dot{\cup} \partial W_1) \dot{\cup} (N_1 \dot{\cup} \partial U_1) \cong \\ &= (M_2 \dot{\cup} \partial W_2) \dot{\cup} (N_2 \dot{\cup} \partial U_2) = M_2 \dot{\cup} N_2 \dot{\cup} \partial(W_2 \dot{\cup} U_2). \end{aligned}$$

Положим $\{M\} + \{N\} = \{M \dot{\cup} N\}$. Из сказанного выше очевидно, что операция $+$ корректно определена, ассоциативна и коммутативна. Кроме того, $\{M\} + \{\Phi\} = \{M\}$ для всех M .

Пусть теперь задано X -многообразие M с вложением $h: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$. Построим вложение $M \times I$ в $\mathbb{R}^{n+k}$ как композицию вложения $M (= M \times 0)$ и такого параллельного переноса, что образы $M \times 0$ и $M \times I$ не пересекаются. Очевидным образом продолжим эти вложения до вложений $M \times [0, 1/4]$, $M \times [3/4, 1]$ в $\mathbb{R}_+^{n+k+1}$. Вложения $M \times 1/4 \rightarrow \mathbb{R}_+^{n+k+1}$ и $M \times 3/4 \rightarrow \mathbb{R}_+^{n+k+1}$ изотопны, поэтому можно найти отображение $M \times [1/4, 3/4] \rightarrow \mathbb{R}_+^{n+k+1}$, реализующее изотопию между ними. Эту изотопию можно деформировать во вложение $\text{rel } M \times \{1/4, 3/4\}$. Таким образом, мы получаем вложение произведения $M \times I$ в $\mathbb{R}_+^{n+k+1}$, совпадающее на $M \times 0$ с данным вложением h . Поскольку $f_k: X_k \rightarrow BO(k)$ — расслоение, то нормальное отображение $v': M \times I \rightarrow BO(k)$ имеет поднятие $\tilde{v}': M \times I \rightarrow X_k$. Тогда $M \times 0 \dot{\cup} M \times I \cong \partial(M \times I)$ или, другими словами, $\{M\} + \{M \times I\} = 0$. $\square$

12.24. Примеры. 1) Пусть $X = BO = \{BO(n)\}$, $f_n: X_n \rightarrow BO(n)$ — тождественные отображения и $g_n = Bi_n$. В результате мы получаем группы неориентированных бордизмов Ω_*^0 (Том обозначал их через $\mathcal{N}_*$). Любой ненулевой элемент в Ω_*^0 имеет порядок 2, так как в неориентированном случае $\partial(M \times I) \cong M \dot{\cup} M$.

2) Пусть $X = BSO = \{BSO(n)\}$ с отображениями $f_n: X_n \rightarrow BSO(n)$, индуцированными вложениями $j_n: SO(n) \rightarrow O(n)$. В этом случае мы приходим к группам ориентированных бордизмов Ω_*^{SO} (Ω_* в обозначениях Тома). Обратным к классу $\{M\} \in \Omega_*^{SO}$ служит класс $\{\bar{M}\}$, где через $\bar{M}$ обозначено многообразие M с противоположной ориентацией; в самом деле, два края произведения $M \times I$ имеют противоположные ориентации (рис. 23).

3) Группа $SO(n)$ не односвязна: $\pi_1(SO(n), 1) \cong \mathbb{Z}_2$. Поэтому $SO(n)$ обладает двулистным накрытием, которое также является группой Ли и называется спинорной группой $Spin(n)$. Проекция $p_n: Spin(n) \rightarrow SO(n)$ индуцирует отображение $Bp_n: BSpin(n) \rightarrow BSO(n)$, которое может быть выбрано расслоением. Положим $X_n = BSpin(n)$ и $f_n = B j_n \cdot B p_n: X_n \rightarrow BO(n)$. В результате получаются группы спинорных бордизмов Ω_*^{Spin} .

4) Пусть $X = BU$, где $X_{2n} = BU(n) = X_{2n+1}$, $n \geq 0$, $f_{2n}: X_{2n} \rightarrow BO(2n)$ — классифицирующее отображение для универсального

расслоения $\gamma_n \rightarrow BU(n)$, рассматриваемого как вещественное расслоение, и $f_{2n+1}: X_{2n+1} \rightarrow BO(2n+1)$ — классифицирующее отображение для $\gamma_n \oplus \varepsilon^1$, рассматриваемого как $O(2n+1)$ -расслоение. В результате получаются группы унитарных бордизмов Ω_*^U .

5) Аналогичным образом, взяв $X_{2n} = BSU(n) = X_{2n+1}$, мы получим группы Ω_*^{SU} .

6) Если положить $X_{4n} = X_{4n+1} = X_{4n+2} = X_{4n+3} = BSp(n)$, то получаются группы симплектических бордизмов Ω_*^{Sp} .

7) Наименьшей подгруппой группы $O(n)$ является $G = \{1\}$. G -структура на расслоении — это выбор конкретной тривиализации

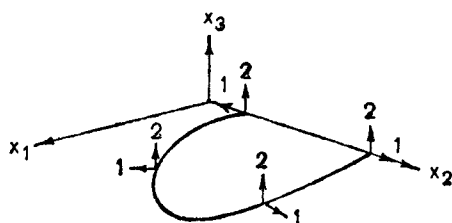


Рис. 23.

этого расслоения. Очень часто расслоения с заданной на них G -структурой называются *оснащенными*. В качестве классифицирующего пространства $BG(n)$ можно взять стягиваемое тотальное пространство $EO(n)$ универсального главного $O(n)$ -расслоения. Если положить $X_n = EO(n)$ и в качестве f_n :

$X_n \rightarrow BO(n)$ взять проекцию $p_n: EO(n) \rightarrow BO(n)$, мы получим группы оснащенных бордизмов Ω_*^{fr} . На примере оснащенных многообразий, пожалуй, легче всего понять, какую роль играют в определении X -структуры послойные гомотопии. Так как $EO(n)$ стягиваемо, то разрезав произвольные гомотопии, мы получили бы, что все оснащения эквивалентны, т. е. что $\Omega_*^{fr} = 0$. Но, как мы позже увидим, группы Ω_*^{fr} имеют очень сложную структуру.

8) Пусть $x \in H^q(BO; \mathbb{Z}_2)$ — произвольный класс когомологий и

$$x_n \in H^q(BO(n); \mathbb{Z}_2)$$

— его ограничение на пространство $BO(n)$. Обозначим через $h_n: BO(n) \rightarrow H(\mathbb{Z}_2, q)$ отображение, представляющее класс x_n . Пусть $f_n: B\langle x \rangle_n \rightarrow BO(n)$ — расслоение, индуцированное из расслоения путей $PH(\mathbb{Z}_2, q) \rightarrow H(\mathbb{Z}_2, q)$ при помощи отображения h_n :

$$\begin{array}{ccc} B\langle x \rangle_n & \longrightarrow & PH(\mathbb{Z}_2, q) \\ f_n \downarrow & & \downarrow p \\ BO(n) & \xrightarrow{h_n} & H(\mathbb{Z}_2, q). \end{array}$$

Взяв $X_n = B\langle x \rangle_n$, мы получим группы бордизмов $\Omega_*^{B\langle x \rangle}$ Брауна [26].

В книге Стонга [76] читатель найдет много других примеров бордизмов¹⁾

Итак, мы свели проблему классификации многообразий с точностью до бордантности к вычислению групп Ω_*^X . Впервые такие вычисления были проделаны Томом для $X=BO$. Том показал, что группы Ω_*^O изоморфны гомотопическим группам $\pi_*(MO)$ некоторого спектра MO . Оказывается, такой изоморфизм имеет место и в общем случае. Поэтому теперь мы займемся описанием спектров Тома MX .

12.25. Определение. Пусть ξ — векторное расслоение размерности n над клеточным пространством X . Можно считать, что ξ является $O(n)$ -расслоением и, значит, обладает скалярным произведением на слоях. Обозначим через $D(\xi)$ ассоциированное с ξ расслоение на диски, состоящее из тех векторов в слоях из ξ , длина которых не превосходит 1. Аналогичным образом обозначим через $S(\xi)$ ассоциированное с ξ расслоение на сферы. Если $\xi = \eta[\mathbb{R}^n]$ для некоторого главного $O(n)$ -расслоения η , то $D(\xi) \cong \eta[D^n]$, $S(\xi) \cong \eta[S^{n-1}]$. Если $ED(\xi)$ и $ES(\xi)$ — тотальные пространства $D(\xi)$ и $S(\xi)$, то $ES(\xi) \subset ED(\xi)$. Положим

$$M(\xi) = ED(\xi)/ES(\xi)$$

и пусть $\pi: ED(\xi) \rightarrow M(\xi)$ — естественная проекция.

12.26. Лемма. Пусть X — клеточное пространство с клетками $\{e_\alpha^m: \alpha \in J_m, m \geq -1\}$. Тогда на $M(\xi)$ может быть задана структура клеточного пространства с клетками $\{e_\alpha^{m+n}: \alpha \in J_m, m \geq -1\}$.

Доказательство. Предположим, что мы уже построили $(k+n)$ -мерный остов $M(\xi)^{k+n} = \pi p^{-1}(X^k)$ ($M(\xi)^{n-1} = *$). Пусть $f_\alpha^{k+1}: (D^{k+1}, S^k) \rightarrow (X^{k+1}, X^k)$ — характеристическое отображение клетки e_α^{k+1} , $\alpha \in J_{k+1}$. Рассмотрим расслоение на диски $(f_\alpha^{k+1})^*(D(\xi))$ над D^{k+1} . Так как диск D^{k+1} стягиваем, то все $O(n)$ -расслоения над D^{k+1} тривиальны и, следовательно, найдется тривиализация $(f_\alpha^{k+1})^*(D(\xi))$, т. е. такое отображение $\hat{f}_\alpha^{k+1}: D^{k+1} \times D^n \rightarrow ED(\xi)$ с $p \cdot \hat{f}_\alpha^{k+1} = f_\alpha^{k+1} \cdot p_{D^{k+1}}$, что $\hat{f}_\alpha^{k+1}$ — гомеоморфизм на каждом слое. Если обозначить через $\hat{f}_\alpha^{k+1}$ композицию

$$D^{k+n+1} \cong D^{k+1} \times D^n \xrightarrow{\hat{f}_\alpha^{k+1}} ED(\xi) \xrightarrow{\pi} M(\xi),$$

то $\hat{f}_\alpha^{k+1}(S^{k+n}) \subset M(\xi)^{k+n}$, $\hat{f}_\alpha^{k+1}(D^{k+n+1}) \subset \pi p^{-1}(X^{k+1})$ и $\hat{f}_\alpha^{k+1}$ — гомеоморфизм на $\hat{D}^{k+n+1}$. Таким образом, можно взять $e_\alpha^{k+n+1} =$

¹⁾ Там они названы кобордизмами. На самом деле, как мы увидим ниже, имеется спектр MX , так что возникают теории гомологий и когомологий, называемые соответственно теориями бордизмов и кобордизмов. Описанные выше группы суть группы коэффициентов этих теорий, так что их можно считать и бордизмами, и кобордизмами. Однако, например, группа Ω_n есть $\Omega_n(pt) = \Omega^{-n}(pt)$, поэтому мы предпочли говорить о бордизмах, — Прим. ред.

$f_{\alpha}^{k+1}(D^{k+n+1})$. Без труда проверяется, что внутренности множеств e_{α}^{k+n+1} не пересекаются друг с другом и с $(k+n)$ -мерным остовом $M(\xi)^{k+n}$ и что $M(\xi)^{k+n+1} = M^{k+n} \cup \bigcup_{\alpha \in J_{k+1}} e_{\alpha}^{k+n+1}$ наделено сла-

бой топологией. Следовательно, структура клеточного пространства на $M(\xi)$ может быть построена индуктивно. $\square$

12.27. Определение. Пространство $M(\xi)$ называется *пространством Тома* расслоения ξ . Если $f: \xi \rightarrow \eta$ — отображение $O(n)$ -расслоений, то $f(ED(\xi)) \subset ED(\eta)$, $f(ES(\xi)) \subset ES(\eta)$, так что f определяет отображение $M(f): M(\xi) \rightarrow M(\eta)$. Очевидно, что $M(f \circ g) = M(f) \circ M(g)$, $M(1) = 1$. Если $\bar{f}: X \rightarrow Y$ — отображение баз, индуцированное отображением расслоений $f: \xi \rightarrow \eta$, то мы иногда будем писать $M(\bar{f})$ вместо $M(f)$, рискуя навлечь на себя обвинение в неправильном употреблении обозначений.

12.28. Предложение. Пусть ξ, η — векторные расслоения с базами X, Y соответственно. Тогда существует естественный гомеоморфизм

$$M(\xi) \wedge M(\eta) \rightarrow M(\xi \times \eta).$$

Доказательство. Имеет место очевидный гомеоморфизм $D^n \times D^m \cong D^{n+m}$. Слоем расслоения $\xi \times \eta$ над точкой $(x, y) \in X \times Y$ является пространство $\xi_x \times \eta_y$, поэтому мы получаем гомеоморфизм $D(\xi)_x \times D(\eta)_y \cong D(\xi \times \eta)_{(x, y)}$. Отсюда, в свою очередь, следует гомеоморфизм $D(\xi) \times D(\eta) \cong D(\xi \times \eta)$, при котором $D(\xi) \times S(\eta) \cup S(\xi) \times D(\eta)$ отображается на $S(\xi \times \eta)$. Таким образом,

$$M(\xi) \wedge M(\eta) = \frac{D(\xi) \times D(\eta)}{D(\xi) \times S(\eta) \cup S(\xi) \times D(\eta)} \cong \frac{D(\xi \times \eta)}{S(\xi \times \eta)} = M(\xi \times \eta). \quad \square$$

Обозначим через e^n тривиальное n -мерное расслоение над точкой x_0 . Из сказанного выше очевидно, что $M(e^n) \cong S^n$. Так как для любого векторного расслоения ξ над X сумма Уитни $\xi \oplus e^n$ есть не что иное, как расслоение $\xi \times e^n$ над $X \times x_0$, то

$$12.29. \quad M(\xi \oplus e^n) = M(\xi \times e^n) \cong M(\xi) \wedge M(e^n) \cong M(\xi) \wedge S^n \cong S^n M(\xi).$$

Пусть теперь $X = \{X_n, g_n, f_n\}$ — система, определенная в п. 12.19, и ω_n — универсальное $O(n)$ -расслоение над $BO(n)$. Над X_n мы имеем расслоение $\gamma_n = f_n^* \omega_n$ и

$$g_n^* \gamma_{n+1} = g_n^* f_{n+1}^* \omega_{n+1} \simeq f_n^* (B i_n)^* \omega_{n+1} \simeq f_n^* (\omega_n \oplus \varepsilon^1) \simeq f_n^* \omega_n \oplus \varepsilon^1 = \gamma_n \oplus \varepsilon^1.$$

Таким образом, g_n индуцирует отображение расслоений

$$\gamma_n \oplus \varepsilon^1 \rightarrow \gamma_{n+1}$$

и, следовательно, отображение

$$M(g_n): SM(\gamma_n) \rightarrow M(\gamma_{n+1})$$

пространств Тома. Клеточные пространства $MX_n = M(\gamma_n)$ и отображения $SMX_n \rightarrow MX_{n+1}$ определяют спектр (см. предложение 8.3), который мы будем обозначать через MX . В частности, мы имеем спектры Тома MO , MSO , $MSpin$, MU , MSU , MSp и $MB \langle x \rangle$, $x \in H^q(BO; \mathbb{Z}_2)$. Легко видеть, что для $G = \{1\} \subset O$ спектр MG гомотопически эквивалентен спектру S^0 .

12.30. Теорема (Том). $\Omega_*^X \cong \pi_*(MX)$.

Набросок доказательства. Прежде всего опишем гомоморфизм $\Phi: \Omega_n^X \rightarrow \pi_n(MX)$. Пусть дано замкнутое гладкое n -мерное многообразие M с X -структурой $(h, \tilde{v})$, где $h: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ — вложение. Мы должны построить гомотопический класс отображений $f_M: \Sigma^n S^0 \rightarrow MX$. Рассмотрим S^{n+k} как одноточечную компактификацию евклидова пространства $\mathbb{R}^{n+k}$ и рассмотрим расслоение на диски $D(v)$, ассоциированное с нормальным расслоением к M в $\mathbb{R}^{n+k}$, как трубчатую окрестность M в $S^{n+k} - \{s_0\}$. Тогда можно определить отображение $g: S^{n+k} \rightarrow M(v)$, полагая $g|D(v) = \pi$, где $\pi: D(v) \rightarrow M(v)$ — естественная проекция и $g(S^{n+k} - \bar{D}(v)) = *$. Мы имеем также $M(\tilde{v}): M(v) \rightarrow M(X_k)$, причем композиция $M(\tilde{v}) \circ g$ — это отображение $f_M: (S^{n+k}, s_0) \rightarrow (MX_k, *)$. Поэтому положим

$$\Phi(M) = \{f_M\} \in \pi_n(MX).$$

Из построения Φ очевидно, что оно корректно определено на множестве классов X -дiffeоморфности X -многообразий.

Пусть теперь $(M, h, \tilde{v})$ и $(M', h', \tilde{v}')$ — два X -многообразия. Если $T: \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ — параллельный перенос, то вложение $T \circ h$ имеет то же самое классифицирующее отображение v для своего нормального расслоения, что и h . Значит, $(M, T \circ h, \tilde{v})$ эквивалентно $(M, h, \tilde{v})$, и мы можем по желанию заменять h на $T \circ h$. В частности, мы можем считать, что $h'(M') \cap h(M) = \emptyset$ и, более того, что $h'(M')$ содержится в нижней полусфере $\hat{H}_-^{n+k}$, а $h(M)$ — в верхней полусфере $\hat{H}_+^{n+k}$ сферы S^{n+k} . Если мы теперь выполним описанную выше процедуру построения отображения $f_{M \dot{\cup} M'}$ для несвязной суммы $M \dot{\cup} M'$, то экватор S^{n+k} стянется в точку, и легко видеть, что $\{f_{M \dot{\cup} M'}\} = \{f_M\} + \{f_{M'}\}$.

Пусть теперь W — некоторое X -многообразие с краем. Мы можем рассматривать вложение $W \rightarrow \mathbb{R}_+^{n+k+1}$ как вложение в $S^{n+k} \times [0, 1]$, при котором край ∂W вкладывается в $S^{n+k} \times 0$. Выполним конструкцию, аналогичную описанной выше, стягивая дополнение к трубчатой окрестности W в $S^{n+k} \times I$ в точку. В результате мы получим такое отображение $H: S^{n+k} \times I \rightarrow MX_k$, что $H_0 = f_{\partial W}$, $H_1 = *$. Таким образом, $\{f_{\partial W}\} = 0 \in \pi_n(MX)$.

В частности, отсюда вытекает, что $\{f_{M \dot{\cup} \partial W}\} = \{f_M\} + \{f_{\partial W}\} = \{f_M\}$. Поэтому, если $M \sim_X M'$ или, другими словами, $M \dot{\cup} \partial W \cong M' \dot{\cup} \partial W$

для некоторых многообразий W, W' , то $\{f_M\} = \{f_M \cup \partial W\} = \{f_{M'} \cup \partial W'\} = \{f_{M'}\}$. Следовательно, Φ — гомоморфизм из Ω_*^X в $\pi_*(MX)$.

Тот факт, что Φ — мономорфизм, доказывается следующим образом: на пространстве $ED(\omega_k)$ расслоения на диски $D(\omega_k)$ можно задать структуру гладкого многообразия; при этом $BO(k)$ можно считать замкнутым подмногообразием (нулевым сечением) в $ED(\omega_k)$. Предположим, что элемент $\alpha \in \pi_n(MX)$ представлен отображением $f: (S^{n+k}, s_0) \rightarrow (MX_k, *)$. Тогда $MO_k - \{*\}$ является образом $ED(\omega_k)$ в MO_k . Гомотопией отображения $Mf_k \circ f$ на $U = f^{-1} \circ (Mf_k)^{-1}(MO_k - \{*\})$ мы можем добиться, чтобы оно стало трансверсально регулярным на $BO(k) \subset ED(\omega_k)$. Поднимем эту гомотопию на $ED(\gamma_k) \subset MX_k$, а затем продолжим ее до гомотопии всей сферы S^{n+k} , посылая $S^{n+k} - U$ в точку $*$. Пусть $\underline{g}$ — результирующее отображение. Тогда $M = g^{-1} \circ (Mf_k)^{-1}(BO(k))$ является подмногообразием в S^{n+k} коразмерности n . Можно даже подобрать такую трубчатую окрестность T многообразия M в S^{n+k} , что $g|_T$ послойно отображает T в $M(\gamma_n) - \{*\}$. Таким образом, g индуцирует X -структуру на M , и без труда показывается, что $\Phi(\{M\}) = \{f\}$.

Доказательство эпиморфности гомоморфизма Φ проводится аналогично. См. подробности в [76] или [78]. $\square$

Опишем, для полноты, структуру групп бордизмов Ω_*^0, Ω_*^U и Ω_*^{SO} . Доказательства соответствующих теорем будут даны в главе 20, где мы вычислим гомотопические группы $\pi_*(MO)$, $\pi_*(MU)$ и $\pi_*(MSO)$. В каждом случае мы будем описывать Ω_*^X как градуированные кольца; соответствующие умножения определяются в главе 13.

12.31. Теорема. Ω_*^0 изоморфно кольцу полиномов $\mathbb{Z}_2[x_2, x_4, x_8, \dots]$ с единственной образующей x_n размерности n для каждого n , не равного $2^l - 1$ ни при каком $l \geq 0$. В качестве образующих x_{2k} могут быть взяты классы $\{RP^{2k}\}$, $k \geq 1$.

Описание многообразий, представляющих нечетномерные образующие, более сложно. Впервые такие многообразия были сконструированы Дольдом в [33].

12.32. Теорема. Ω_*^U изоморфно кольцу полиномов $\mathbb{Z}[x_2, x_4, x_8, \dots]$ с единственной образующей x_{2k} размерности $2k$ для каждого $k \geq 1$. Если $k = p - 1$ для некоторого простого p , то в качестве x_{2k} могут быть взяты классы $\{\mathbb{C}P^k\}$.

12.33. Теорема. Ω_*^{SO} имеет лишь 2-кручение и $\Omega_*^{SO}/\text{torsion}$ изоморфно кольцу полиномов $\mathbb{Z}[x_4, x_8, \dots]$ с единственной образующей x_{4k} размерности $4k$ для каждого $k \geq 1$.

Кроме Ω_*^0, Ω_*^U и Ω_*^{SO} полностью вычислены градуированные кольца Ω_*^{Sp} и Ω_*^{Spin} , что же касается симплектических кобордизмов Ω_*^{Sp} , то в настоящее время о них известны лишь отдельные результаты. Для оснащенных кобордизмов известен изоморфизм

$\Omega_*^{\text{fr}} \cong \pi_*(S^0) = \pi_*^S$, где π_*^S — стабильные гомотопические группы сфер. Этот результат был получен Понтрягиным за несколько лет до основополагающей работы Тома о кобордизмах.

Разумеется, коль скоро нам задан спектр, мы получаем теории гомологий и когомологий. Таким образом, мы имеем так называемые теории *бордизмов* $MX_*(-)$ и теории *кобордизмов* $MX^*(-)$ для различных спектров MX . С этой точки зрения сформулированные выше структурные теоремы — не что иное, как описание групп коэффициентов для этих теорий в случаях $X=BO, BU$ и BSO .

Для любого пространства Y группы гомологий $MX_n(Y)$ допускают прозрачное геометрическое описание.

12.34. Определение. *Сингулярным X -многообразием в Y называется пара (M, f) , состоящая из замкнутого X -многообразия M и непрерывного отображения $f: M \rightarrow Y$ (ср. с определением сингулярного симплекса). Два сингулярных многообразия (M, f) и (M', f') в Y называются *X -бордантными*, если существует пара (W, g) , состоящая из компактного X -многообразия W с краем $\partial W = M \cup (-M')$ (знак минус перед M' в смысле групповой операции в $\Omega_*^{X,1}$) и такого непрерывного отображения $g: W \rightarrow Y$, что $g|_M = f$, $g|_{M'} = f'$.*

12.35. Предложение. *Группа $\Omega_n^X(Y)$ классов X -бордантных сингулярных n -мерных X -многообразий в Y изоморфна $MX_n(Y) \cong \pi_n(MX \wedge Y^+)$.*

Доказательство получается соответствующей переработкой доказательства теоремы Тома 12.30.

12.36. Замечание. Согласно замечанию 7.69 мы обязаны показать, что Ω_*^X удовлетворяет аксиоме слабой гомотопической эквивалентности. На основании п. 7.71 для этого достаточно доказать следующий факт: если Y n -связно для всех $n \geq 0$, то $\Omega_*^X(y_0) \rightarrow \Omega_*^X(Y)$ — эпиморфизм для всех $y_0 \in Y$. Но каждое компактное гладкое многообразие M имеет гомотопический тип клеточного пространства. Поэтому в силу теоремы 6.31 любое сингулярное X -многообразие $f: M \rightarrow Y$ нульгомотопно и, значит, X -бордантно сингулярному многообразию $M \rightarrow y_0 \rightarrow Y$.

Упражнение. Показать, что в случае $X=BO$ определение X -бордантности из теоремы 12.21 эквивалентно определению бордантности

ССЫЛКИ НА ЛИТЕРАТУРУ

1. Браудер [26].	6. Манкрс [51].
2. Дольд [33].	7. Милнор [54, 58].
3. Кервер, Милнор [40].	8. Стонг [76].
4. Ленг [45].	9. Том [78, 79].
5. Люлевичус [48].	10. Уолл [35].

¹⁾ Точнее, знак минус обозначает противоположную X -структуру на M' ; ср. с доказательством леммы 12.23. — *Прим. ред.*

В предыдущих главах мы описали общие теории гомологий и рассмотрели три важных примера таких теорий. При изучении теорий гомологий полезно иметь в виду, что одним из основных назначений их является перевод топологических задач на алгебраический язык. Например, теории гомологий позволяют свести проблему существования или несуществования отображений $f: X \rightarrow Y$ с заданными свойствами к исследованию соответствующих алгебраических морфизмов $f_*: k_*(X) \rightarrow k_*(Y)$. Поэтому неудивительно, что чем богаче алгебраическая структура на $k_*(X)$, тем k_* более полезна для такого рода исследований. В настоящей главе мы введем умножения, которые при подходящих ограничениях для любого пространства X превращают $k^*(X)$ в кольцо. В главах 17, 18 и 19 будет введена еще одна чрезвычайно полезная алгебраическая структура. Именно, мы превратим $E_*(X)$ в комодуль над некоторой алгеброй Хопфа, а $E^*(X)$ — в модуль над двойственной к ней алгеброй Хопфа.

В начале данной главы мы покажем, как выразить $H_*(X; G)$ и $H^*(X; G)$ через $H_*(X; \mathbb{Z})$ (теоремы об универсальных коэффициентах) и как выразить $H_*(X \times Y; \mathbb{Z})$ через $H_*(X; \mathbb{Z})$ и $H_*(Y; \mathbb{Z})$. Техника, выработанная на этом пути, позволит нам определить умножения на $H_*(-; R)$ и $H^*(-; R)$ для любого кольца R . После этого мы несколько отклонимся от основной темы и вкратце изложим конструкцию приведенного произведения спектров, в результате чего окажется возможным задать умножения на $E_*(-)$ и $E^*(-)$ для произвольного кольцевого спектра E .

В главе 10 мы определили группы $H_*(X; G)$ с помощью цепного комплекса $S_*(X) \otimes G$. Поскольку $H_*(X; \mathbb{Z}) = H_*(S_*(X)) = H_*(S_*(X) \otimes \mathbb{Z})$, то первым, наивным предположением могло бы быть такое: $H_*(X; G) \cong H_*(X; \mathbb{Z}) \otimes G$. Этот изоморфизм в действительности имеет место для некоторых замечательных пространств, например, для $X = S^n$, $X = \mathbb{C}P^n$ или $X = \mathbb{H}P^n$, $n \geq 0$. Однако для $X = \mathbb{R}P^\infty$ мы имеем

$$H_q(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q=0, \\ \mathbb{Z}_2, & q \text{ нечетно}, \\ 0, & q \text{ четно}, q \neq 0, \end{cases}$$

в то время как

$$H_q(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2 \text{ для всех } q \geq 0.$$

Попробуем разобраться в этом явлении.

Для любого пространства существует естественный гомоморфизм

$$\mu: H_*(X) \otimes G \rightarrow H_*(X; G),$$

задаваемый формулой

$$\{a\} \otimes g \mapsto \{a \otimes g\}, \quad a \in Z_*(X), \quad g \in G.$$

Без труда проверяется, что этот гомоморфизм всегда инъективен. В то же время его коядро, вообще говоря, не тривиально. Для того чтобы описать это коядро, нам понадобится немного гомологической алгебры.

Пусть G — некоторая абелева группа. Если

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} C \rightarrow 0$$

— точная последовательность абелевых групп, то последовательность

$$0 \rightarrow A \otimes G \xrightarrow{\phi \otimes 1} B \otimes G \xrightarrow{\psi \otimes 1} C \otimes G \rightarrow 0$$

не обязательно точна, так как гомоморфизм $\phi \otimes 1$ перестает быть инъективным. Например, если тензорно умножить на $\mathbb{Z}_2$ точную последовательность

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0,$$

то результирующая последовательность

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{2} & \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2 & \rightarrow & \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \\ & & \mathbb{Z}_2 & & \mathbb{Z}_2 & & \end{array}$$

уже не точна, поскольку $\mathbb{Z}_2 \xrightarrow{2} \mathbb{Z}_2$ — не мономорфизм. Исследование ядра гомоморфизма $\phi \otimes 1$ приводит к новому функтору Тог.

Для произвольной абелевой группы A всегда можно найти точную последовательность

$$0 \rightarrow R \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} A \rightarrow 0,$$

в которой R, F — свободные абелевы группы. Например, в качестве F можно взять свободную абелеву группу, порожденную элементами $a \in A$, а в качестве β — однозначно определенный гомоморфизм $\beta(a) = a$ для всех $a \in A$. Положим тогда $R = \ker \beta$ и возьмем в качестве $\alpha: R \rightarrow F$ очевидное вложение. Определим группу $\text{Тог}(A, G)$ как $\ker(\alpha \otimes 1)$. Другими словами, имеет место точная последовательность

$$0 \rightarrow \text{Тог}(A, G) \rightarrow R \otimes G \xrightarrow{\alpha \otimes 1} F \otimes G \xrightarrow{\beta \otimes 1} A \otimes G \rightarrow 0.$$

К сожалению, из этого определения не ясно, что $\text{Тог}(A, G)$ не зависит от выбора R, F, α, β . Сейчас мы это докажем.

13.1. Лемма. i) Пусть

$$0 \rightarrow R \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} A \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow R' \xrightarrow{\alpha'} F' \xrightarrow{\beta'} A' \rightarrow 0$$

— две короткие точные последовательности, в которых R, F, R' и F' — свободные абелевы группы. Тогда для любого гомоморфизма $\phi: A \rightarrow A'$ существуют такие гомоморфизмы $\psi: F \rightarrow F', \theta: R \rightarrow R'$, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{\alpha} & F & \xrightarrow{\beta} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \theta & & \downarrow \psi & & \downarrow \phi & & \\ 0 & \longrightarrow & R' & \xrightarrow{\alpha'} & F' & \xrightarrow{\beta'} & A' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

коммутативна.

ii) Если (θ', ψ') — еще одна пара таких гомоморфизмов, то существует гомоморфизм $\gamma: F \rightarrow R'$, для которого $\alpha' \cdot \gamma = \psi' - \psi$ и $\gamma \cdot \alpha = \theta' - \theta$.

Доказательство. i) Пусть $\{f_\mu: \mu \in M\}, \{r_\nu: \nu \in N\}$ — базисы групп F и R соответственно. Так как β' — эпиморфизм, то для каждого $\mu \in M$ найдется такой элемент $f'_\mu \in F'$, что $\beta'(f'_\mu) = \phi\beta(f_\mu)$. Зададим гомоморфизм ψ , полагая $\psi(f_\mu) = f'_\mu, \mu \in M$. Очевидно, что этим условием ψ определен однозначно и правый квадрат диаграммы является коммутативным. Далее, для каждого $\nu \in N$ имеют место равенства

$$\beta'\psi\alpha(r_\nu) = \phi\beta\alpha(r_\nu) = 0,$$

а поскольку нижняя строка точна, то найдется такой элемент $r'_\nu \in R'$, что $\alpha'(r'_\nu) = \psi\alpha(r_\nu)$. Зададим гомоморфизм θ , полагая $\theta(r_\nu) = r'_\nu, \nu \in N$. Как и выше, это условие однозначно определяет θ и левый квадрат диаграммы оказывается коммутативным.

ii) Пусть теперь $(\theta, \psi), (\theta', \psi')$ — две пары таких гомоморфизмов и $\{f_\mu\}$ — базис группы F . Для каждого $\mu \in M$ мы имеем

$$\beta'(\psi' - \psi)(f_\mu) = \beta'\psi'(f_\mu) - \beta'\psi(f_\mu) = \phi\alpha(f_\mu) - \phi\alpha(f_\mu) = 0.$$

Следовательно, существует такой элемент $r'_\mu \in R'$, что $\alpha'(r'_\mu) = (\psi' - \psi)(f_\mu)$. Обозначим через $\gamma: F \rightarrow R'$ единственный гомоморфизм, для которого $\gamma(f_\mu) = r'_\mu, \mu \in M$. Тогда $\alpha' \cdot \gamma = \psi' - \psi$. Кроме того, мы имеем

$$\alpha' \cdot \gamma \cdot \alpha = (\psi' - \psi) \cdot \alpha = \alpha' \cdot (\theta' - \theta).$$

Поскольку α' — мономорфизм, то отсюда следует, что $\gamma \cdot \alpha = \theta' - \theta$. □

13.2. Мы можем рассматривать последовательность

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow R \rightarrow F$$

как цепной комплекс $C_*(A)$, для которого

$$C_q(A) = \begin{cases} F, & q=0, \\ R, & q=1, \\ 0, & q \neq 0, 1. \end{cases}$$

В этих терминах

$$H_0(C_*(A) \otimes G) \cong A \otimes G$$

и

$$H_1(C_*(A) \otimes G) \cong \text{Тог}(A, G).$$

Лемма 13.1 утверждает, что каждый гомоморфизм $\phi: A \rightarrow A'$ индуцирует цепное отображение $C_*(\phi): C_*(A) \rightarrow C_*(A')$, которое не является единственным, однако единственно с точностью до цепной гомотопии. Следовательно, ϕ однозначно определяет гомоморфизм

$$\text{Тог}(\phi, 1): \text{Тог}(A, G) \rightarrow \text{Тог}(A', G),$$

а именно:

$$(C_*(\phi) \otimes 1)_*: H_1(C_*(A) \otimes G) \rightarrow H_1(C_*(A') \otimes G).$$

Из определения очевидно, что $\text{Тог}(1_A, 1) = 1_{\text{Тог}(A, G)}$ и что для гомоморфизма $\phi': A' \rightarrow A''$ мы имеем

$$\text{Тог}(\phi', 1) \cdot \text{Тог}(\phi, 1) = \text{Тог}(\phi' \cdot \phi, 1).$$

Полагая $\phi = 1_A = \phi'$, мы видим, что группа $\text{Тог}(A, G)$ не зависит (с точностью до изоморфизма) от выбора цепного комплекса $C_*(A)$, называемого *свободной резольвентой группы* A . Без труда проверяется, что $\text{Тог}(-; G)$ является функтором для фиксированной группы G .

Любой гомоморфизм $\psi: G \rightarrow G'$ индуцирует коэффициентный гомоморфизм (см. п. 10.5)

$$(1 \otimes \psi)_*: H_1(C_*(A) \otimes G) \rightarrow H_1(C_*(A) \otimes G'),$$

который мы будем обозначать как

$$\text{Тог}(1, \psi): \text{Тог}(A, G) \rightarrow \text{Тог}(A, G').$$

Ясно, что $\text{Тог}(A, -)$ является функтором для фиксированной группы A .

13.3. Предложение. *Функтор Тог обладает следующими свойствами:*

- i) если A — свободная абелева группа, то $\text{Тог}(A, G) = 0$;
- ii) если G — свободная абелева группа, то $\text{Тог}(A, G) = 0$;
- iii) $\text{Тог}(A, G) \cong \text{Тог}(G, A)$ для всех A, G ;
- iv) если $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ — короткая точная последовательность, то для каждой абелевой группы G имеет место длинная

точная последовательность

$$0 \rightarrow \operatorname{Tor}(A, G) \rightarrow \operatorname{Tor}(B, G) \rightarrow \operatorname{Tor}(C, G) \rightarrow A \otimes G \rightarrow B \otimes G \rightarrow C \otimes G \rightarrow 0.$$

Доказательство: i) Если A — свободная абелева группа, то

$$0 \rightarrow 0 \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{1} A \rightarrow 0$$

является свободной резольвентой для A и $\operatorname{Tor}(A, G) = \ker(\alpha \otimes 1) = 0$.

ii) Если G — свободная абелева группа, то $A \otimes G \cong \bigoplus A$ и т. д. Но прямая сумма точных последовательностей также является точной последовательностью.

iii) Пусть

$$0 \rightarrow R \rightarrow F \rightarrow A \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow K \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow 0$$

— свободные резольвенты групп A и G соответственно. Поскольку $A \otimes G \cong G \otimes A$, то изображенная ниже коммутативная диаграмма имеет точные строки и столбцы:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 0 \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & \operatorname{Tor}(G, A) \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \rightarrow & R \otimes K & \rightarrow & F \otimes K & \rightarrow & A \otimes K & \rightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \rightarrow & R \otimes H & \rightarrow & F \otimes H & \rightarrow & A \otimes H & \rightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \rightarrow & \operatorname{Tor}(A, G) & \rightarrow & R \otimes G & \rightarrow & F \otimes G & \rightarrow A \otimes G \rightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 0 & & 0 & & 0 &
 \end{array}$$

Используя диаграммный поиск, мы получаем гомоморфизмы $\phi: \operatorname{Tor}(A, G) \rightarrow \operatorname{Tor}(G, A)$

и

$$\psi: \operatorname{Tor}(G, A) \rightarrow \operatorname{Tor}(A, G),$$

обратные друг другу.

iv) Пусть $C_*(G)$ — цепной комплекс, соответствующий свободной резольвенте группы G . Поскольку комплекс $C_*(G)$ свободен, то из свойства ii) вытекает, что

$$0 \rightarrow C_*(G) \otimes A \rightarrow C_*(G) \otimes B \rightarrow C_*(G) \otimes C \rightarrow 0$$

является короткой точной последовательностью цепных комплексов. Поэтому точная гомологическая последовательность вместе с изоморфизмом iii) дают желаемую точную последовательность iv). $\square$

13.4. Упражнение. Показать, что функтор Тог коммутирует с dir lim и $\oplus$, и вывести отсюда, что $\text{Тог}(A, B) \cong \text{Тог}(T(A), T(B))$, где через $T(A)$ (соответственно, $T(B)$) обозначена периодическая подгруппа группы A (соответственно, группы B).

13.5. Теорема (об универсальных коэффициентах). Для любого свободного цепного комплекса C_* и любой абелевой группы G имеет место естественная точная последовательность

$$0 \rightarrow H_n(C_*) \otimes G \rightarrow H_n(C_* \otimes G) \rightarrow \text{Тог}(H_{n-1}(C_*), G) \rightarrow 0, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Эта последовательность расщепляется, однако расщепление не является естественным.

Доказательство. Мы имеем две точные последовательности

$$13.6. \quad 0 \rightarrow Z_n(C_*) \rightarrow C_n \xrightarrow{d} B_{n-1}(C_*) \rightarrow 0,$$

$$13.7. \quad 0 \rightarrow B_n(C_*) \xrightarrow{i} Z_n(C_*) \rightarrow H_n(C_*) \rightarrow 0, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Поскольку B_{n-1} и C_{n-1} — свободные абелевы группы, то в силу предложения 13.3, i) и iv) последовательность

$$0 \rightarrow Z_n \otimes G \rightarrow C_n \otimes G \xrightarrow{d \otimes 1} B_{n-1} \otimes G \rightarrow 0$$

также точна. Таким образом, мы имеем короткую точную последовательность цепных комплексов

$$0 \rightarrow Z_* \otimes G \rightarrow C_* \otimes G \xrightarrow{d \otimes 1} B_* \otimes G \rightarrow 0,$$

где $d \otimes 1$ понижает степень на единицу, а дифференциалы из $Z_* \otimes G$ и $B_* \otimes G$ равны нулю. Соответствующая точная гомологическая последовательность имеет вид

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1}(C_* \otimes G) \longrightarrow$$

$$H_n(B_* \otimes G) \xrightarrow{\partial} H_n(Z_* \otimes G) \longrightarrow H_n(C_* \otimes G) \longrightarrow \cdots,$$

$$\parallel \wr$$

$$\parallel \wr$$

$$B_n \otimes G$$

$$Z_n \otimes G$$

и несложная проверка показывает, что ∂ в этом случае есть не что иное, как гомоморфизм $i \otimes 1$. Таким образом, мы получаем серию

коротких точных последовательностей

$$0 \rightarrow \text{coker}(i \otimes 1)_n \rightarrow H_n(C_* \otimes G) \rightarrow \ker(i \otimes 1)_{n-1} \rightarrow 0, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Последовательность 13.7 можно рассматривать как свободную резольвенту группы $H_n(C_*)$. Значит, мы имеем точную последовательность

$$0 \rightarrow \text{Tor}(H_n(C_*), G) \rightarrow B_n \otimes G \xrightarrow{i \otimes 1} Z_n \otimes G \rightarrow H_n(C_*) \otimes G \rightarrow 0,$$

откуда немедленно вытекает, что

$$\begin{aligned} \text{coker}(i \otimes 1)_n &\cong H_n(C_*) \otimes G, \\ \ker(i \otimes 1)_{n-1} &\cong \text{Tor}(H_{n-1}(C_*), G). \end{aligned}$$

Легко видеть, что отображение

$$H_n(C_*) \otimes G \rightarrow H_n(C_* \otimes G)$$

есть не что иное, как определенный ранее гомоморфизм μ . Естественность его также очевидна.

Для того чтобы построить требуемое расщепление, возьмем какое-нибудь расщепление $\kappa: C_* \rightarrow Z_*$ последовательности 13.6 (оно существует, поскольку B_* — свободный цепной комплекс). Тогда композиция

$$Z(C_* \otimes G) \xrightarrow{(\kappa \otimes 1) \mid Z} Z_* \otimes G \rightarrow H_*(C_*) \otimes G$$

отображает $B(C_* \otimes G)$ в нуль и, следовательно, определяет гомоморфизм

$$\kappa': H_*(C_* \otimes G) \rightarrow H_*(C_*) \otimes G,$$

являющийся левым обратным к μ . $\square$

13.8. Следствие. Для произвольной топологической пары (X, A) и абелевой группы G существуют естественная точная последовательность

$$0 \rightarrow H_n(X, A) \otimes G \rightarrow H_n(X, A; G) \rightarrow \text{Tor}(H_{n-1}(X, A), G) \rightarrow 0$$

и не являющееся естественным расщепление

$$H_n(X, A; G) \cong H_n(X, A) \otimes G \oplus \text{Tor}(H_{n-1}(X, A), G).$$

Выразим теперь $H^*(X; G)$ в терминах групп гомологий $H_*(X)$. Когомологи определяются с помощью кофунктора $\text{Hom}(-, G)$, и этот кофунктор не сохраняет точные последовательности. Чтобы убедиться в этом, достаточно применить функтор $\text{Hom}(-, \mathbb{Z}_2)$ к точной последовательности

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0.$$

В результате получается последовательность

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longleftarrow & \text{Hom}(Z, Z_2) & \xleftarrow{2} & \text{Hom}(Z, Z_2) & \longleftarrow & \text{Hom}(Z_2, Z_2) \longleftarrow 0, \\
 & & \parallel & & \parallel & & \\
 & & Z_2 & & Z_2 & &
 \end{array}$$

не являющаяся точной. Поскольку такая же ситуация имела место для функтора $\otimes$, то естественно предположить, что Hom порождает некоторый производный функтор, аналогичный функтору Tor . Можно продолжить указанную аналогию и попытаться построить этот производный функтор тем же методом, как это делалось выше для функтора Tor . Итак, возьмем свободную резольвенту

$$0 \rightarrow R \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} A \rightarrow 0$$

произвольной абелевой группы A и рассмотрим

$$0 \leftarrow \text{Hom}(R, G) \leftarrow \text{Hom}(F, G)$$

как коцепной комплекс

$$C^q(A; G) = \begin{cases} \text{Hom}(F, G), & q=0, \\ \text{Hom}(R, G), & q=1, \\ 0, & q \neq 0, 1. \end{cases}$$

Тогда $H^0(C^*(A; G)) \cong \text{Hom}(A, G)$. Положим $\text{Ext}(A, G) = H^1(C^*(A; G))$. Таким образом, $\text{Ext}(A, G) = \text{coker Hom}(\alpha, 1)$. Тот факт, что функтор Ext не зависит от выбора свободной резольвенты A , доказывается точно так же, как аналогичный факт для функтора Tor .

Упражнение 13.4 объясняет, почему производный функтор для $\otimes$ носит название Tor . Производный функтор для Hom называется Ext , поскольку он тесно связан с расширениями абелевых групп. Пусть A и B — произвольные абелевы группы. *Расширением* группы A при помощи B называется короткая точная последовательность

$$0 \rightarrow B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{\alpha} A \rightarrow 0$$

с абелевой группой C (иногда эту группу C также, хотя и не совсем правильно, называют расширением группы A при помощи B).

Расширения

$$0 \rightarrow B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{\alpha} A \rightarrow 0$$

и

$$0 \rightarrow B \xrightarrow{\beta'} C' \xrightarrow{\alpha'} A \rightarrow 0$$

называются *эквивалентными*, если существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{\rho} & C & \xrightarrow{\sigma} & A \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow 1 & & \downarrow \phi & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{\rho'} & C' & \xrightarrow{\sigma'} & A \longrightarrow 0 \end{array}$$

(разумеется, ϕ является изоморфизмом). Обозначим через $E(A, B)$ множество классов эквивалентных расширений группы A при помощи группы B . В множестве $E(A, B)$ можно таким образом ввести операцию сложения, что оно превратится в абелеву группу.

Пусть элемент $x \in E(A, B)$ представляется точной последовательностью

$$0 \rightarrow B \xrightarrow{\rho} C \xrightarrow{\sigma} A \rightarrow 0,$$

и пусть

$$0 \rightarrow R \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} A \rightarrow 0$$

— свободная резольвента группы A . Тогда по лемме 13.1 найдутся такие гомоморфизмы ϕ_1, ϕ_2 , для которых коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{\alpha} & F & \xrightarrow{\beta} & A \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \phi_2 & & \downarrow \phi_1 & & \downarrow 1 \\ 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{\rho} & C & \xrightarrow{\sigma} & A \longrightarrow 0. \end{array}$$

Гомоморфизм $\phi_2 \in \text{Hom}(R, B)$ определен по модулю подгруппы $\text{im}[\text{Hom}(F, B) \rightarrow \text{Hom}(R, B)]$ и, следовательно, индуцирует элемент $\kappa(x) \in \text{Ext}(A, B)$.

13.9. Упражнение. Показать, что элемент $\kappa(x)$ корректно определен и отображение

$$\kappa: E(A, B) \rightarrow \text{Ext}(A, B)$$

биективно.

13.10. Теорема (об универсальных коэффициентах). Для любого свободного цепного комплекса C и произвольной абелевой группы G существует естественная точная последовательность

$$0 \rightarrow \text{Ext}(H_{n-1}(C_*), G) \rightarrow H^n(\text{Hom}(C_*, G))^{**} \rightarrow \text{Hom}(H_n(C_*), G) \rightarrow 0, \quad n \in \mathbb{Z},$$

гомоморфизм μ^* которой задается формулой

$$\mu^* \{ \phi \} (\{ z \}) = \phi (z), \quad \{ \phi \} \in H^n (\text{Hom} (C_*, G)), \quad \{ z \} \in H_n (C_*).$$

Эта последовательность расщепляется, однако расщепление не является естественным.

Доказательство. Поскольку комплекс B_* свободен, то, применяя к последовательности 13.6 функтор $\text{Hom} (-, G)$, мы получим точную (расщепляющуюся) последовательность

$$0 \leftarrow \text{Hom} (Z_*, G) \leftarrow \text{Hom} (C_*, G) \leftarrow \text{Hom} (B_*, G) \leftarrow 0.$$

Рассмотрим ее как короткую точную последовательность цепных комплексов, считая, что $\text{Hom} (Z_*, G)$ и $\text{Hom} (B_*, G)$ снабжены нулевыми дифференциалами. Результирующая точная последовательность групп когомологий имеет вид

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^n (\text{Hom} (C_*, G)) \rightarrow \text{Hom} (Z_n, G) \xrightarrow{\text{Hom} (i, 1)} \\ \text{Hom} (B_n, G) \rightarrow H^{n+1} (\text{Hom} (C_*, G)) \rightarrow \dots, \end{aligned}$$

откуда получается серия коротких точных последовательностей

$$0 \rightarrow \text{coker} \text{Hom} (i, 1)_{n-1} \rightarrow H^n (\text{Hom} (C_*, G)) \rightarrow \ker \text{Hom} (i, 1)_n \rightarrow 0.$$

С другой стороны, последовательность 13.7 дает нам точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \leftarrow \text{Ext} (H_n (C_*), G) \leftarrow \text{Hom} (B_n, G) \xrightarrow{\text{Hom} (i, 1)} \\ \text{Hom} (Z_n, G) \leftarrow \text{Hom} (H_n (C_*), G) \leftarrow 0, \end{aligned}$$

откуда вытекает, что

$$\begin{aligned} \text{coker} \text{Hom} (i, 1)_{n-1} &\cong \text{Ext} (H_{n-1} (C_*), G), \\ \ker \text{Hom} (i, 1)_n &\cong \text{Hom} (H_n (C_*), G). \end{aligned}$$

Остальные утверждения теоремы очевидны. $\square$

13.11. Следствие. Для произвольной топологической пары (X, A) и абелевой группы G существуют естественная точная последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Ext} (H_{n-1} (X, A), G) \rightarrow H^n (X, A; G) \xrightarrow{\mu_*} \\ \text{Hom} (H_n (X, A), G) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

и (не являющееся естественным) расщепление

$$H^n (X, A; G) \cong \text{Hom} (H_n (X, A), G) \oplus \text{Ext} (H_{n-1} (X, A), G).$$

Предлагаем читателю в качестве весьма полезного упражнения вычислить группы $\text{Tor} (\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m)$, $\text{Ext} (\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m)$, $\text{Ext} (\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z})$ для любых n и m , найти с их помощью группы $H_*(RP^n; \mathbb{Z}_m)$, $H^*(RP^n; \mathbb{Z}_m)$ и сравнить полученный результат с примером 10.22, iv).

Обратимся теперь к проблеме описания группы $H_*(X \times Y)$ в терминах групп $H_*(X)$ и $H_*(Y)$. Решение этой проблемы естест-

венным образом распадается на «геометрическую» часть (доказательство эквивалентности $S_*(X \times Y) \simeq S_*(X) \otimes S_*(Y)$) и алгебраическую часть (вычисление групп $H_*(C_* \otimes C'_*)$). Займемся сначала алгебраической частью.

13.12. Определение. Пусть A_* и B_* — две градуированные абелевы группы. Их *тензорным произведением* называется градуированная абелева группа $A_* \otimes B_*$ в $(A_* \otimes B_*)_n = \bigoplus_{i+j=n} A_i \otimes B_j$, $n \in \mathbb{Z}$. Аналогичным образом определяется Тог-произведение групп A_* и B_* : $\text{Тог}(A_*, B_*)_n = \bigoplus_{i+j=n} \text{Тог}(A_i, B_j)$, $n \in \mathbb{Z}$. Если

(C_*, d) и (C'_*, d') — два цепных комплекса, то определен новый цепной комплекс $(C_* \otimes C'_*, d_\otimes)$, где $d_\otimes(a \otimes b) = da \otimes b + (-1)^p a \otimes d'b$ для $a \in C_p$, $b \in C'_*$. Заметим, что во втором слагаемом выражения для $d_\otimes$ «меняются местами a и d' ». Элемент a имеет степень p , гомоморфизм d имеет степень -1 , так что мы получаем перед новым членом знак $(-1)^{p(-1)} = (-1)^p$. Без труда проверяется, что определенный таким образом гомоморфизм $d_\otimes$ является дифференциалом ($d_\otimes \cdot d_\otimes = 0$). В то же время, если бы мы опустили знак $(-1)^p$ во втором слагаемом, то оставшееся выражение уже не было бы дифференциалом. Всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, мы будем придерживаться следующего соглашения. Если элемент степени p меняется местами с элементом степени q , то перед получающимся таким образом членом ставится знак $(-1)^{pq}$.

Следующая теорема (алгебраическая теорема Кюннета) выражает гомологии $H_*(C_* \otimes C'_*)$ через $H_*(C_*)$ и $H_*(C'_*)$.

13.13. Теорема. Пусть C_* и C'_* — два цепных комплекса, один из которых является свободным. Тогда имеет место естественная точная последовательность

$$0 \rightarrow [H_*(C_*) \otimes H_*(C'_*)]_n \xrightarrow{\chi} H_n(C_* \otimes C'_*) \rightarrow [\text{Тог}(H_*(C_*), H_*(C'_*))]_{n-1} \rightarrow 0.$$

Если оба комплекса C_* и C'_* свободны, то эта последовательность расщепляется, однако расщепление не является естественным.

Доказательство. Будем считать, что свободным является комплекс C_* ; доказательство для случая свободного C'_* аналогично. Мы имеем точные последовательности

$$13.14. \quad 0 \rightarrow Z_n(C_*) \rightarrow C_n \xrightarrow{d} B_{n-1}(C_*) \rightarrow 0,$$

$$13.15. \quad 0 \rightarrow B_n(C_*) \xrightarrow{i} Z_n(C_*) \rightarrow H_n(C_*) \rightarrow 0,$$

$$13.16. \quad 0 \rightarrow Z_n(C'_*) \rightarrow C'_n \xrightarrow{d'} B_{n-1}(C'_*) \rightarrow 0,$$

$$13.17. \quad 0 \rightarrow B_n(C'_*) \rightarrow Z_n(C'_*) \rightarrow H_n(C'_*) \rightarrow 0.$$

Поскольку $B_{n-1}(C_*)$ — свободная абелева группа, то последовательность 13.14 расщепляется. Значит, она остается точной и

после тензорного умножения на C'_* :

$$13.18. 0 \rightarrow Z(C_*) \otimes C'_* \rightarrow C_* \otimes C'_* \xrightarrow{d \otimes 1} B(C_*) \otimes C'_* \rightarrow 0.$$

Будем рассматривать 13.18 как точную последовательность цепных комплексов, предполагая, что на $Z(C_*) \otimes C'_*$ и $B(C_*) \otimes C'_*$ заданы дифференциалы $\omega \otimes d'$, $-\omega \otimes d'$ соответственно, где $\omega(a) = (-1)^p a$ для $a \in Z_p$ или B_p . Тогда получается длинная точная последовательность групп гомологий

$$13.19. \dots \rightarrow H_{n+1}(C_* \otimes C'_*) \rightarrow H_n(B(C_*) \otimes C'_*) \xrightarrow{\partial} H_n(Z(C_*) \otimes C'_*) \rightarrow H_n(C_* \otimes C'_*) \rightarrow \dots$$

Для того чтобы доказать теорему, нужно отождествить $H_*(B(C_*) \otimes C'_*)$, $H_*(Z(C_*) \otimes C'_*)$ и ∂ с более известными объектами.

Так как $Z(C_*)$ — свободная градуированная абелева группа, то последовательность 13.16 остается точной и после тензорного умножения на $Z(C'_*)$:

$$13.20. 0 \rightarrow Z(C_*) \otimes Z(C'_*) \rightarrow Z(C_*) \otimes C'_* \xrightarrow{1 \otimes d'} Z(C_*) \otimes B(C'_*) \rightarrow 0.$$

Кроме того, мы имеем точную последовательность

$$13.21. 0 \rightarrow Z(C_*) \otimes B(C'_*) \rightarrow Z(C_*) \otimes Z(C'_*) \rightarrow Z(C_*) \otimes H_*(C'_*) \rightarrow 0.$$

Тогда из последовательности 13.20 вытекает, что

$$\begin{aligned} \operatorname{im}(\omega \otimes d') &= \operatorname{im}(1 \otimes d') \cong Z(C_*) \otimes B(C'_*), \\ \ker(\omega \otimes d') &= \ker(1 \otimes d') \cong Z(C_*) \otimes Z(C'_*), \end{aligned}$$

откуда с помощью последовательности 13.21 находим, что

$$H_*(Z(C_*) \otimes C'_*) = \frac{\ker(\omega \otimes d')}{\operatorname{im}(\omega \otimes d')} \cong \frac{Z(C_*) \otimes Z(C'_*)}{Z(C_*) \otimes B(C'_*)} \cong Z(C_*) \otimes H_*(C'_*).$$

Аналогичным образом,

$$H_*(B(C_*) \otimes C'_*) \cong B(C_*) \otimes H_*(C'_*).$$

Нетрудно проверить, что при этих отождествлениях гомоморфизм

$$\partial: H_*(B(C_*) \otimes C'_*) \rightarrow H_*(Z(C_*) \otimes C'_*)$$

превращается в гомоморфизм

$$i \otimes 1: B(C_*) \otimes H_*(C'_*) \rightarrow Z(C_*) \otimes H_*(C'_*).$$

Таким образом, последовательность 13.19 задает семейство коротких точных последовательностей

$$13.22. 0 \rightarrow \operatorname{coker}(i \otimes 1)_n \rightarrow H_n(C_* \otimes C'_*) \rightarrow \ker(i \otimes 1)_{n-1} \rightarrow 0.$$

Рассматривая теперь последовательность 13.15 как свободную

резольвенту группы $H_n(C_*)$, мы получаем точную последовательность

$$13.23. \quad 0 \rightarrow \text{Tor}(H_n(C_*), H_m(C'_*)) \rightarrow B_n(C_*) \otimes H_m(C'_*) \xrightarrow{i \otimes 1} \\ Z_n(C_*) \otimes H_m(C'_*) \rightarrow H_n(C_*) \otimes H_m(C'_*) \rightarrow 0,$$

из которой немедленно вытекает, что

$$\text{coker}(i \otimes 1)_n \cong [H_*(C_*) \otimes H_*(C'_*)]_n, \\ \text{ker}(i \otimes 1)_{n-1} \cong [\text{Tor}(H_*(C_*), H_*(C'_*))]_{n-1}.$$

Предположим теперь, что комплекс C'_* также свободен и пусть $\kappa: C_* \rightarrow Z(C_*)$, $\kappa': C'_* \rightarrow Z(C'_*)$ — расщепления последовательностей 13.14 и 13.16. Тогда ограничение $\kappa \otimes \kappa'$ на $Z(C_* \otimes C'_*)$ определяет такой гомоморфизм

$$\lambda: Z(C_* \otimes C'_*) \rightarrow Z(C_*) \otimes Z(C'_*),$$

что

$$\lambda(B(C_* \otimes C'_*)) \subset \text{im}[B(C_*) \otimes Z(C'_*) + Z(C_*) \otimes B(C'_*)].$$

Следовательно, λ индуцирует гомоморфизм

$$\lambda: H_*(C_* \otimes C'_*) \rightarrow \frac{Z(C_*) \otimes Z(C'_*)}{\text{im}[B(C_*) \otimes Z(C'_*) + Z(C_*) \otimes B(C'_*)]}.$$

С другой стороны, из коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccccccc} B(C_*) \otimes B(C'_*) & \rightarrow & B(C_*) \otimes Z(C'_*) & \rightarrow & B(C_*) \otimes H(C'_*) & \rightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ Z(C_*) \otimes B(C'_*) & \rightarrow & Z(C_*) \otimes Z(C'_*) & \rightarrow & Z(C_*) \otimes H(C'_*) & \rightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ H(C_*) \otimes B(C'_*) & \rightarrow & H(C_*) \otimes Z(C'_*) & \rightarrow & H(C_*) \otimes H(C'_*) & \rightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

с точными строками и столбцами мы получаем точную последовательность

$$B(C_*) \otimes Z(C'_*) + Z(C_*) \otimes B(C'_*) \rightarrow Z(C_*) \otimes Z(C'_*) \rightarrow \\ H(C_*) \otimes H(C'_*) \rightarrow 0.$$

Таким образом, имеет место изоморфизм

$$\frac{Z(C_*) \otimes Z(C'_*)}{\text{im}[B(C_*) \otimes Z(C'_*) + Z(C_*) \otimes B(C'_*)]} \cong H(C_*) \otimes H(C'_*).$$

Поэтому можно рассматривать $\bar{\lambda}$ как гомоморфизм

$$H_*(C_* \otimes C'_*) \rightarrow H_*(C_*) \otimes H_*(C'_*),$$

являющийся левым обратным для $\times$. $\square$

У п р а ж н е н и е. Докажите соответствующий результат для когомологий (для этого вам понадобится некоторое условие конечности).

Займемся теперь геометрической частью нашего исследования, а именно, доказательством того, что комплекс $S_*(X \times Y)$ цепно гомотопически эквивалентен тензорному произведению $S_*(X) \otimes S_*(Y)$. Для этого нам будет нужно построить цепные отображения

$$\rho: S_*(X \times Y) \rightarrow S_*(X) \otimes S_*(Y)$$

и

$$\sigma: S_*(X) \otimes S_*(Y) \rightarrow S_*(X \times Y),$$

цепно гомотопически обратные друг другу. Мы докажем значительно более общую теорему о существовании таких отображений. В дальнейшем эта теорема будет использоваться для изучения умножений в произвольных гомологиях и когомологиях.

13.24. Определение. Пусть $\mathcal{K}$ — категория цепных комплексов и цепных отображений и $\mathcal{C}$ — произвольная категория. Пусть M — некоторое множество объектов из $\mathcal{C}$ (элементы M будут называться *моделями*). Функтор $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{K}$ называется *ациклическим на моделях* из M , если $H_q(F(X)) = 0$ для всех $q > 0$ и $X \in M$. Другими словами, функтор F ацикличесок на моделях из M , если для любого $X \in M$ последовательность

$$\dots \xrightarrow{d} F_q(X) \xrightarrow{d} F_{q-1}(X) \rightarrow \dots \xrightarrow{d} F_0(X) \xrightarrow{e} H_0(F(X)) \rightarrow 0$$

точна. Функтор F называется *свободным на моделях* из M , если существует такое индексированное семейство $B = \{b_j \in F(M_j)\}$, $j \in J$, где $M_j \in M$, что для каждого $Y \in \mathcal{C}$ индексированное множество

$$\{F(f)(b_j)\}_{j \in J}, f \in \text{hom}(M_j, Y) \subset F(Y)$$

образует базис в $F(Y)$.

13.25. Примеры. i) Пусть $\mathcal{C} = \mathcal{T}$ — категория всех топологических пространств и непрерывных отображений и $F = S_*: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{K}$ — функтор, сопоставляющий с $X \in \mathcal{T}$ его сингулярный цепной комплекс $S_*(X)$. Положим $M = \{\Delta_n: n \geq 0\}$. Поскольку любой симплекс Δ_n , $n \geq 0$, стягиваем, то $H_q(F(\Delta_n)) = H_q(\Delta_n) = 0$, $q > 0$, $n \geq 0$. Следовательно, функтор $F = S_*$ ацикличесок на моделях из M . Пусть $\delta_n: \Delta_n \rightarrow \Delta_n$ — тождественное отображение и $B = \{\delta_n\}_{n \geq 0}$. Тогда для каждого $Y \in \mathcal{T}$ множество $\{F(f)(\delta_n): f \in \text{hom}_{\mathcal{T}}(\Delta_n, Y), n \geq 0\} = \{f_{\#}(\delta_n): f: \Delta_n \rightarrow Y \text{ — отображение, } n \geq 0\} = \{f: \Delta_n \rightarrow Y, n \geq 0\} \subset S_*(Y)$ образует базис в $S_*(Y)$, так что $F = S_*$ свободен на моделях из M .

ii) Пусть $\mathcal{C} = \mathcal{T} \times \mathcal{T}$ — категория упорядоченных пар топологических пространств. Определим функтор $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{K}$, полагая $F(X, Y) = S_*(X \times Y)$. Пусть

$$M = \{(\Delta_n, \Delta_m): n, m \geq 0\}.$$

Так как произведение симплексов $\Delta_n \times \Delta_m$ стягиваемо, то $H_q(F(\Delta_n, \Delta_m)) = H_q(\Delta_n \times \Delta_m) = 0$, $q > 0$, $n, m \geq 0$, и, значит, функтор F ацикличен на моделях из M . Обозначим через $\delta_n: \Delta_n \rightarrow \Delta_n \times \Delta_n$ диагональное отображение. Тогда $\delta_n \in S_n(\Delta_n \times \Delta_n)$, и для каждой пары $(X, Y) \in \mathcal{C}$ множество

$$\begin{aligned} \{F(f, g)(\delta_n): (f, g) \in \text{hom}_{\mathcal{C}}((\Delta_n, \Delta_n), (X, Y)), n \geq 0\} = \\ \{(f \times g)_{\#}(\delta_n): (f, g) \in \text{hom}_{\mathcal{C}}((\Delta_n, \Delta_n), (X, Y)), n \geq 0\} = \\ \{(f, g): \Delta_n \rightarrow X \times Y, n \geq 0\} \subset S_*(X \times Y) \end{aligned}$$

образует базис в $S_*(X \times Y)$. Следовательно, F свободен на моделях из M .

iii) Пусть $\mathcal{C}$ — та же категория, что и в предыдущем примере, а функтор $G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{K}$ задается равенством

$$G(X, Y) = S_*(X) \otimes S_*(Y).$$

Если взять в качестве M множество из примера ii), то

$$\begin{aligned} H_q(G(\Delta_n, \Delta_m)) = H_q(S_*(\Delta_n) \otimes S_*(\Delta_m)) \cong \\ \bigoplus_{r+s=q} H_r(\Delta_n) \otimes H_s(\Delta_m) \bigoplus_{r+s=q-1} \text{Tor}(H_r(\Delta_n), H_s(\Delta_m)) = 0 \end{aligned}$$

для всех $q > 0$, $n, m \geq 0$ (здесь мы воспользовались теоремой 13.13). Таким образом, G ацикличен на моделях из M .

Кроме того, для каждой пары (X, Y) множество

$$\begin{aligned} \{G(f, g)(\delta_n \otimes \delta_m): (f, g) \in \text{hom}_{\mathcal{C}}((\Delta_n, \Delta_m), (X, Y)), n, m \geq 0\} = \\ \{(f_{\#} \otimes g_{\#})(\delta_n \otimes \delta_m): (f, g) \in \text{hom}_{\mathcal{C}}((\Delta_n, \Delta_m), (X, Y)), n, m \geq 0\} = \\ \{f \otimes g: f: \Delta_n \rightarrow X, g: \Delta_m \rightarrow Y, n, m \geq 0\} \subset S_*(X) \otimes S_*(Y) \end{aligned}$$

является базисом для $S_*(X) \otimes S_*(Y)$. Следовательно, функтор G свободен на моделях из M .

13.26. Теорема. Пусть $\mathcal{C}$ — некоторая категория и $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{K}$ — такие функторы, что F свободен на моделях из $M \subset \mathcal{C}$, а G ацикличен на моделях из M .

i) Для каждого естественного преобразования $\phi: H_0(F(-)) \rightarrow H_0(G(-))$ существует такое естественное преобразование $\phi_{\#}: F \rightarrow G$, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightarrow & F_2(X) & \rightarrow & F_1(X) & \rightarrow & F_0(X) \rightarrow H_0(F(X)) \\ & & \downarrow \phi_2(X) & & \downarrow \phi_1(X) & & \downarrow \phi_0(X) & \downarrow \phi(X) \\ \cdots & \rightarrow & G_2(X) & \rightarrow & G_1(X) & \rightarrow & G_0(X) \rightarrow H_0(G(X)). \end{array}$$

ii) Если $\phi'_\#$ — еще одно такое естественное преобразование, то существует цепная гомотопия $\Phi_q: F_q(-) \rightarrow G_{q+1}(-)$, $q \geq 0$, для которой

$$d \cdot \Phi_q + \Phi_{q-1} \cdot d = \phi'_q - \phi_q, \quad q \geq 0 \quad (\Phi_{-1} = 0).$$

Доказательство. i) Все конструкции производятся на моделях и из соображений естественности распространяются на всю категорию (ср. с доказательством аксиомы гомотопии для сингулярных гомологий). Пусть $b_j \in B$ — такой элемент, что $b_j \in F_0(M_j)$. Поскольку последовательность

$$G_0(M_j) \xrightarrow{\varepsilon} H_0(G(M_j)) \rightarrow 0$$

точна, то найдется $b'_j \in G_0(M_j)$ с $\varepsilon(b'_j) = \phi(M_j)(\varepsilon(b_j))$. Положим $\phi_0(M_j)(b_j) = b'_j$ для всех $b_j \in B \cap F_0(M_j)$.

Далее, так как отображение ϕ_0 должно быть естественным, то для каждого $f: M_j \rightarrow X$ мы обязаны иметь равенства

13.27.

$$\phi_0(X)(F(f)(b_j)) = G(f)\phi_0(M_j)(b_j) = G(f)(b'_j), \quad b_j \in B \cap F_0(M_j).$$

С другой стороны, множество $\{F(f)(b_j): j \in J, b_j \in F_0(M_j), f \in \text{hom}(M_j, X)\}$ образует базис для $F_0(X)$, так что формула 13.27 определяет единственный гомоморфизм $\phi_0(X): F_0(X) \rightarrow G_0(X)$. В силу выбора элементов b'_j мы имеем

$$\varepsilon \cdot \phi_0(X)(F(f)(b_j)) = \varepsilon \cdot G(f)(b'_j) =$$

$$H_0(G(f)) \cdot \varepsilon(b'_j) = H_0(G(f))\phi(M_j)(\varepsilon(b_j)) =$$

$$\phi(X)H_0(F(f))(\varepsilon(b_j)) = \phi(X) \cdot \varepsilon(F(f)(b_j)),$$

откуда вытекает, что $\varepsilon \cdot \phi_0(X) = \phi(X) \cdot \varepsilon$ для всех $X \in \mathcal{C}$, как и требовалось. Естественность отображения ϕ_0 немедленно следует из его определения.

Предположим теперь, что мы уже построили отображения $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{k-1}$, удовлетворяющие условию i). Для любого $b_j \in F_k(M_j)$ мы имеем

$$d\phi_{k-1}(M_j)(db_j) = \phi_{k-2}(M_j)(ddb_j) = 0.$$

Поскольку последовательность

$$G_k(M_j) \rightarrow G_{k-1}(M_j) \rightarrow G_{k-2}(M_j)$$

точна, то можно найти элемент $b'_j \in G_k(M_j)$ с $db'_j = \phi_{k-1}(M_j)(db_j)$. Положим $\phi_k(M_j)(b_j) = b'_j$ для всех $b_j \in F_k(M_j)$.

Требование естественности отображения ϕ_k обязывает нас положить

$$13.28. \quad \phi_k(X)(F(f)(b_j)) = G(f)(b'_j)$$

для всех $X \in \mathcal{C}$, $b_j \in F_k(M_j)$ и $f: M_j \rightarrow X$. С другой стороны, формула 13.28 определяет для каждого $X \in \mathcal{C}$ единственный

гомоморфизм $\phi_k(X): F_k(X) \rightarrow G_k(X)$, автоматически являющийся естественным. Кроме того, из выбора элементов b'_j следует, что

$$d\phi_k(X)(F(f)(b_j)) = dG(f)(b'_j) = G(f)(db'_j) = \\ G(f)\phi_{k-1}(M_j)(db_j) = \phi_{k-1}(X)F(f)(db_j) = \phi_{k-1}(X) \cdot d(F(f)(b_j)).$$

Таким образом, $d\phi_k(X) = \phi_{k-1}(X) \cdot d$ для всех $X \in \mathcal{C}$, что и требовалось.

Мы надеемся, что читатель уже освоил основные приемы обращения с моделями и сможет доказать часть ii) теоремы 13.26 самостоятельно. $\square$

13.29. Примеры. i) Для любого $X \in \mathcal{T}$ можно рассмотреть $H_0(X)$ как свободную абелеву группу, базисом которой являются компоненты линейной связности пространства X . Таким образом, группа $H_0(X \times Y)$ имеет базис $\{C \times C': C - \text{компонента линейной связности из } X, C' - \text{компонента линейной связности из } Y\}$, а группа $H_0(S_*(X) \otimes S_*(Y)) \cong H_0(X) \otimes H_0(Y)$ — базис $\{C \otimes C': C - \text{компонента линейной связности из } X, C' - \text{компонента линейной связности из } Y\}$. Следовательно, можно определить отображения

$$\rho_{-1}: H_0(X \times Y) \rightarrow H_0(S_*(X) \otimes S_*(Y)),$$

$$\sigma_{-1}: H_0(S_*(X) \otimes S_*(Y)) \rightarrow H_0(X \times Y),$$

полагая $\rho_{-1}(C \times C') = C \otimes C'$, $\sigma_{-1}(C \otimes C') = C \times C'$. Очевидно, что $\sigma_{-1} \circ \rho_{-1} = 1$, $\rho_{-1} \circ \sigma_{-1} = 1$.

Тогда из теоремы 13.26, i) и примеров 13.25, ii), iii) вытекает существование естественных цепных отображений

$$\rho: S_*(X \times Y) \rightarrow S_*(X) \otimes S_*(Y),$$

$$\sigma: S_*(X) \otimes S_*(Y) \rightarrow S_*(X \times Y),$$

индуцирующих на H_0 отображения ρ_{-1} , σ_{-1} . Кроме того, поскольку композиция $\sigma \circ \rho$ индуцирует на $H_0(X \times Y)$ тождественное отображение, то по теореме 13.26, ii) $\sigma \circ \rho$ цепно гомотопно тождественному отображению. Аналогично, $\rho \circ \sigma$ также цепно гомотопно тождественному отображению. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

13.30. Теорема (Эйленберг — Зильбер). *Существует естественная цепная гомотопическая эквивалентность*

$$\rho: S_*(X \times Y) \rightarrow S_*(X) \otimes S_*(Y). \quad \square$$

13.31. Теорема (Кюннет). *Для произвольных топологических пространств X , Y имеет место естественная точная последовательность*

$$0 \rightarrow [H_*(X) \otimes H_*(Y)]_n \xrightarrow{\chi} H_n(X \times Y) \rightarrow \\ \rightarrow [\text{Tor}(H_*(X), H_*(Y))]_{n-1} \rightarrow 0.$$

Эта последовательность расщепляется, однако расщепление не является естественным. $\square$

Гомоморфизм $\times$ в теореме 13.31 представляет собой композицию алгебраического гомоморфизма $\times$

$$H_*(X) \otimes H_*(Y) \xrightarrow{\times} H_*(S_*(X) \otimes S_*(Y))$$

с индуцированным отображением

$$H_*(S_*(X) \otimes S_*(Y)) \xrightarrow{\sigma_*} H_*(X \times Y).$$

Уп ра ж н е н и е. С помощью теоремы 13.31 вычислить группы гомологий тора и сравнить результат с вычислениями, полученными другими методами (последовательность Майера — Вьеториса, клеточные разбиения).

Существует относительный вариант теоремы 13.30. Для любых пар (X, A) , (Y, B) мы имеем коммутативную диаграмму с точными строками и столбцами

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \rightarrow & S_*(A) \otimes S_*(B) & \rightarrow & S_*(A) \otimes S_*(Y) & \rightarrow & S_*(A) \otimes S_*(Y, B) & \rightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \rightarrow & S_*(X) \otimes S_*(B) & \rightarrow & S_*(X) \otimes S_*(Y) & \rightarrow & S_*(X) \otimes S_*(Y, B) & \rightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \rightarrow & S_*(X, A) \otimes S_*(B) & \rightarrow & S_*(X, A) \otimes S_*(Y) & \rightarrow & S_*(X, A) \otimes S_*(Y, B) & \rightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 0 & & 0 & & 0 &
 \end{array}$$

откуда получается точная последовательность

$$\begin{aligned}
 0 \rightarrow S_*(A) \otimes S_*(Y) + S_*(X) \otimes S_*(B) \rightarrow \\
 \rightarrow S_*(X) \otimes S_*(Y) \rightarrow S_*(X, A) \otimes S_*(Y, B) \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

(с подобным приемом мы встречались при доказательстве теоремы 13.13). Таким образом, имеет место изоморфизм

$$13.32. \quad S_*(X, A) \otimes S_*(Y, B) \cong \frac{S_*(X) \otimes S_*(Y)}{S_*(A) \otimes S_*(Y) + S_*(X) \otimes S_*(B)}.$$

Кроме того, мы имеем коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & S_*(A \times Y) + S_*(X \times B) & \longrightarrow & S_*(X \times Y) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \rho \downarrow & & \uparrow \sigma & & \\
 0 & \rightarrow & S_*(A) \otimes S_*(Y) + S_*(X) \otimes S_*(B) & \rightarrow & S_*(X) \otimes S_*(Y) & \rightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow \rho & & \uparrow \sigma \\
 & & & & \frac{S_*(X \times Y)}{S_*(A \times Y) + S_*(X \times B)} & \rightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \uparrow \\
 & & & & \frac{S_*(X) \otimes S_*(Y)}{S_*(A) \otimes S_*(Y) + S_*(X) \otimes S_*(B)} & \rightarrow & 0,
 \end{array}$$

откуда вытекает, что ρ и σ индуцируют цепные гомотопические эквивалентности

$$13.33. \quad \frac{S_*(X) \otimes S_*(Y)}{S_*(A) \otimes S_*(Y) + S_*(X) \otimes S_*(B)} \simeq \frac{S_*(X \times Y)}{S_*(A \times Y) + S_*(X \times B)}.$$

Наконец, мы имеем точную последовательность цепных комплексов

$$\begin{array}{c}
 0 \rightarrow \frac{S_*(A \times Y) + S_*(X \times B)}{S_*(A \times Y)} \rightarrow \frac{S_*(A \times Y \cup X \times B)}{S_*(A \times Y)} \rightarrow \\
 \quad \quad \quad \Downarrow \\
 \quad \quad \quad \frac{S_*(X \times B)}{S_*(A \times Y \cap X \times B)} \\
 \quad \quad \quad \frac{S_*(A \times Y \cup X \times B)}{S_*(A \times Y) + S_*(X \times B)} \rightarrow 0
 \end{array}$$

которая индуцирует гомологическую последовательность

$$\begin{array}{c}
 \dots \rightarrow H_{n+1}(A \times Y \cup X \times B, A \times Y) \rightarrow H_{n+1}\left(\frac{S_*(A \times Y \cup X \times B)}{S_*(A \times Y) + S_*(X \times B)}\right) \rightarrow \\
 H_n(X \times B, A \times Y \cap X \times B) \xrightarrow{j_*} H_n(A \times Y \cup X \times B, A \times Y) \rightarrow \dots
 \end{array}$$

Таким образом, если триада $(A \times Y \cup X \times B; X \times B, A \times Y)$ вырезается (т. е. если j_* — изоморфизм), то

$$H_*\left(\frac{S_*(A \times Y \cup X \times B)}{S_*(A \times Y) + S_*(X \times B)}\right) = 0$$

или, другими словами,

$$13.34. S_*(A \times Y) + S_*(X \times B) \simeq S_*(A \times Y \cup X \times B).$$

Комбинируя 13.32, 13.33 и 13.34, мы получаем следующее утверждение.

13.35. Предложение. Пусть (X, A) и (Y, B) — такие топологические пары, что триада $(A \times Y \cup X \times B; A \times Y, X \times B)$ вырезаема. Тогда существует цепная эквивалентность

$$p: S_*(X \times Y, A \times Y \cup X \times B) \simeq S_*(X, A) \otimes S_*(Y, B). \square$$

Как правило, мы будем обозначать пару $(X \times Y, A \times Y \cup X \times B)$ через $(X, A) \times (Y, B)$. Заметим, что

$$X \times Y / A \times Y \cup X \times B \simeq (X/A) \wedge (Y/B).$$

13.36. Теорема (относительная теорема Кюннета). Пусть (X, A) и (Y, B) — такие топологические пары, что триада $(A \times Y \cup X \times B; A \times Y, X \times B)$ вырезаема. Тогда существует естественная точная последовательность

$$0 \rightarrow [H_*(X, A) \otimes H_*(Y, B)]_n \rightarrow H_n((X, A) \times (Y, B)) \rightarrow [Tor(H_*(X, A), H_*(Y, B))]_{n-1} \rightarrow 0.$$

Можно было бы доказать кохомологический аналог теоремы 13.36 (см. [72]), но мы ограничимся здесь лишь описанием гомоморфизма

$$\times: H^*(X; \mathbb{Z}) \otimes H^*(Y; \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(X \times Y; \mathbb{Z}).$$

Представляется разумным рассмотреть более общий гомоморфизм

$$\times: H^*(X; G) \otimes H^*(Y; H) \rightarrow H^*(X \times Y; K),$$

где G, H, K — абелевы группы, связанные гомоморфизмом $\mu: G \otimes H \rightarrow K$.

Для любых двух цепных комплексов C_* и C'_* мы имеем алгебраический $\times$ -гомоморфизм

$$H^p(\text{Hom}(C_*, G)) \otimes H^q(\text{Hom}(C'_*, H)) \xrightarrow{\times} H^{p+q}(\text{Hom}(C_* \otimes C'_*, G \otimes H)),$$

определяемый следующим образом. Если $\phi \in \text{Hom}(C_p, G)$, $\psi \in \text{Hom}(C'_q, H)$ — коциклы, то $\phi \otimes \psi \in \text{Hom}(C_p \otimes C'_q, G \otimes H)$, и для всех $a \in C_p$, $b \in C'_q$ мы имеем

$$\begin{aligned} \delta(\phi \otimes \psi)(a \otimes b) &= \\ (\phi \otimes \psi)(d_\otimes(a \otimes b)) &= (\phi \otimes \psi)(da \otimes b + (-1)^{|a|} a \otimes db) = \\ &= \phi(da) \otimes \psi(b) + (-1)^{|a|} \phi(a) \otimes \psi(db) = 0. \end{aligned}$$

Продолжим $\phi \otimes \psi$ на всю группу $(C_* \otimes C'_*)_{p+q}$, считая $\phi \otimes \psi|_{C_i \otimes C'_j} = 0$ для $(i, j) \neq (p, q)$. Без труда проверяется, что $\phi \otimes \psi$ является

коциклом. Положим

$$\{\phi\} \times \{\psi\} = \{\phi \otimes \psi\} \in H^{p+q}(\text{Hom}(C_* \otimes C'_*, G \otimes H)).$$

Кроме того, мы имеем цепное отображение

$$\rho: S_*(X \times Y) \rightarrow S_*(X) \otimes S_*(Y)$$

и, следовательно, гомоморфизм

$$\text{Hom}(\rho, 1)^*: H^*(\text{Hom}(S_*(X) \otimes S_*(Y), G \otimes H)) \rightarrow H^*(X \times Y; G \otimes H).$$

Наконец, μ индуцирует гомоморфизм μ_* . Определим $\times$ -гомоморфизм

$$\times: H^p(X; G) \otimes H^q(Y; H) \rightarrow H^{p+q}(X \times Y; K)$$

как композицию

$$H^p(X; G) \otimes H^q(Y; H) \xrightarrow{\times} H^{p+q}(\text{Hom}(S_*(X) \otimes S_*(Y), G \otimes H)) \xrightarrow{\text{Hom}(\rho, 1)^*} H^{p+q}(X \times Y, G \otimes H) \xrightarrow{\mu_*} H^{p+q}(X \times Y; K).$$

Гомологический $\times$ -гомоморфизм определяется аналогичным образом:

$$H_p(X; G) \otimes H_q(Y; H) \xrightarrow{\times} H_{p+q}(S_*(X) \otimes S_*(Y) \otimes G \otimes H) \xrightarrow{(\sigma \otimes 1)_*} H_{p+q}(X \times Y; G \otimes H) \xrightarrow{\mu_*} H_{p+q}(X \times Y; K).$$

Если пары (X, A) , (Y, B) таковы, что триада

$$(A \times Y \cup X \times B; A \times Y, X \times B)$$

вырезаема, то мы имеем

$$\times: H_p(X, A; G) \otimes H_q(Y, B; H) \rightarrow H_{p+q}((X, A) \times (Y, B); K),$$

$$\times: H^p(X, A; G) \otimes H^q(Y, B; H) \rightarrow H^{p+q}((X, A) \times (Y, B); K).$$

Гомоморфизм $\times$ называется *гомологическим* (соответственно, *когомологическим*) $\times$ -умножением, ассоциированным с $\mu: G \otimes H \rightarrow K$. Особый интерес представляет случай, когда R — кольцо и $\mu: R \otimes R \rightarrow R$ — умножение в этом кольце, или же когда M — некоторый R -модуль и $\mu: R \otimes M \rightarrow M$ — R -действие. В следующем ниже предложении сформулированы некоторые из свойств $\times$ -умножения. Все формулировки приведены для абсолютного случая, однако аналогичные результаты верны и в относительном случае.

13.37. Предложение. Пусть X, Y, Z — топологические пространства, G_1, G_2, G_3, H, K, M — абелевы группы и

$$\mu_{12}: G_1 \otimes G_2 \rightarrow H,$$

$$\mu_{21}: G_2 \otimes G_1 \rightarrow H, \quad \mu_{23}: G_2 \otimes G_3 \rightarrow K,$$

$$\nu_1: G_1 \otimes K \rightarrow M, \quad \nu_2: H \otimes G_3 \rightarrow M$$

— гомоморфизмы.

i) Из коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} G_1 \otimes G_2 \otimes G_3 & \xrightarrow{\mu_{12} \otimes 1} & H \otimes G_3 \\ \downarrow 1 \otimes \mu_{23} & & \downarrow \nu_2 \\ G_1 \otimes K & \xrightarrow{\nu_1} & M \end{array}$$

следует коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} H_p(X; G_1) \otimes H_q(Y; G_2) \otimes H_r(Z; G_3) & \xrightarrow{\times \otimes 1} & H_{p+q}(X \times Y; H) \otimes H_r(Z; G_3) \\ 1 \otimes \times \downarrow & & \downarrow \times \\ H_p(X; G_1) \otimes H_{q+r}(Y \times Z; K) & \xrightarrow{\times} & H_{p+q+r}(X \times Y \times Z; M). \end{array}$$

ii) Из коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} G_1 \otimes G_2 & \xrightarrow{T} & G_2 \otimes G_1 \\ & \searrow \mu_{12} \quad \swarrow \mu_{21} & \\ & H & \end{array}$$

следует коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} H_p(X; G_1) \otimes H_q(Y; G_2) & \xrightarrow{T} & H_q(Y; G_2) \otimes H_p(X; G_1) \\ \downarrow \times & & \downarrow \times \\ H_{p+q}(X \times Y; H) & \xrightarrow{\tau_*} & H_{p+q}(Y \times X; H), \end{array}$$

в которой $\tau: X \times Y \rightarrow Y \times X$ — тасующее отображение и T задается формулой $T(a \otimes b) = (-1)^{pq} b \otimes a$, $a \in H_p(X; G_1)$, $b \in H_q(Y; G_2)$.

iii) Если $f: X \rightarrow X'$ и $g: Y \rightarrow Y'$ — некоторые отображения, то диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_p(X; G_1) \otimes H_q(Y; G_2) & \xrightarrow{\times} & H_{p+q}(X \times Y; H) \\ \downarrow f_* \otimes g_* & & \downarrow (f \times g)_* \\ H_p(X'; G_1) \otimes H_q(Y'; G_2) & \xrightarrow{\times} & H_{p+q}(X' \times Y'; H) \end{array}$$

коммутативна.

Аналогичные результаты имеют место и для когомологического $\times$ -умножения.

Доказательство. i) Непосредственно проверяется, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_p(C_1) \otimes H_q(C_2) \otimes H_r(C_3) & \xrightarrow{\times \otimes 1} & H_{p+q}(C_1 \otimes C_2) \otimes H_r(C_3) \\ \downarrow 1 \otimes \times & & \downarrow \times \\ H_p(C_1) \otimes H_{q+r}(C_2 \otimes C_3) & \xrightarrow{\times} & H_{p+q+r}(C_1 \otimes C_2 \otimes C_3) \end{array}$$

коммутативна для любых цепных комплексов C_1, C_2, C_3 . Поэтому, все что нужно сделать, — это убедиться в том, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} S_*(X) \otimes S_*(Y) \otimes S_*(Z) & \xrightarrow{\sigma \otimes 1} & S_*(X \times Y) \otimes S_*(Z) \\ \downarrow 1 \otimes \sigma & & \downarrow \sigma \\ S_*(X) \otimes S_*(Y \times Z) & \xrightarrow{\sigma} & S_*(X \times Y \times Z) \end{array}$$

цепно гомотопически коммутативна. Но композиции $\sigma \cdot (\sigma \otimes 1)$ и $\sigma \cdot (1 \otimes \sigma)$ индуцируют один и тот же гомоморфизм на H_0 , а именно:

$$C_1 \otimes C_2 \otimes C_3 \mapsto C_1 \times C_2 \times C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — компоненты линейной связности пространств X, Y, Z соответственно. Следовательно, по теореме 13.26, ii)

$$\sigma \cdot (\sigma \otimes 1) \simeq \sigma \cdot (1 \otimes \sigma).$$

ii) Доказательство этого пункта аналогично предыдущему доказательству. Ключевым моментом является проверка того, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} S_*(X) \otimes S_*(Y) & \xrightarrow{T} & S_*(Y) \otimes S_*(X) \\ \downarrow \sigma & & \downarrow \sigma \\ S_*(X \times Y) & \xrightarrow{\tau_{\#}} & S_*(Y \times X) \end{array}$$

цепно гомотопически коммутативна, но это снова следует из теоремы 13.26, ii).

iii) По определению $\times$ -умножение является композицией трех естественных гомоморфизмов. $\square$

Существуют два других важных «внешних» умножения, а именно

$$/ : H^p(X \times Y; G_1) \otimes H_q(Y; G_2) \rightarrow H^{p+q}(X; H)$$

и

$$\setminus : H^p(X; G_1) \otimes H_q(X \times Y; G_2) \rightarrow H_{q-p}(Y; H).$$

$/$ -умножение можно определить следующим образом. Пусть заданы коцикл $\phi \in \text{Hom}(C \otimes C', G)$ и цикл $z = \sum_i c'_i \otimes g_i \in C' \otimes G_2$.

Образует коцепь $\phi/z \in \text{Hom}(C, H)$, полагая

$$(\phi/z)(c) = \sum_i \mu_{12}(\phi(c \otimes c'_i) \otimes g_i) \in H$$

для всех $c \in C$. Немедленно проверяется, что ϕ/z является коциклом и, следовательно, определен класс когомологий

$$\{\phi\}/\{z\} = \{\phi/z\} \in H^*(C; H).$$

Взяв композицию этого алгебраического $/$ -умножения с гомоморфизмом

$$H^p(X \times Y; G_1) \otimes H_q(Y; G_2) \xrightarrow{\text{Hom}(\sigma, 1)^* \otimes 1} H^p(\text{Hom}(S_*(X) \otimes S_*(Y), G_1)) \otimes H_q(Y; G_2),$$

мы получим геометрическое $/$ -умножение. Аналогичным образом определяется $\setminus$ -умножение. Без труда проверяется, что эти умножения естественны и связаны ассоциативностью с $\times$ -умножением.

Определим теперь «внутренние» умножения $\cup$ и $\cap$. Пусть $\Delta: X \rightarrow X \times X$ — диагональное отображение и R — кольцо с умножением $\mu: R \otimes R \rightarrow R$. Тогда $\cup$ -умножение на $H^*(X; R)$ — это композиция

$$H^p(X; R) \otimes H^q(X; R) \xrightarrow{\times} H^{p+q}(X \times X; R) \xrightarrow{\Delta^*} H^{p+q}(X; R).$$

Относительно $\cup$ -умножения $H^*(X; R)$ превращается в кольцо. Если R коммутативно, то $H^*(X; R)$ градуированно коммутативно, и если R имеет единицу, то $H^*(X; R)$ — также кольцо с единицей. Другое внутреннее умножение

$$\cap : H^p(X; R) \otimes H_q(X; R) \rightarrow H_{q-p}(X; R)$$

задается формулой

$$a \cap b = a \setminus \Delta_*(b), \quad a \in H^p(X; R), \quad b \in H_q(X; R).$$

Легко видеть, что эти умножения естественны и связаны друг с другом некоторыми соотношениями ассоциативности. Можно было бы исследовать поведение граничных гомоморфизмов ∂ и δ относительно этих умножений, однако мы не станем вдаваться сейчас в детали. Вместо этого рассмотрим все определенные выше умножения в контексте общих теорий гомологий и когомологий.

Для этого прежде всего нам понадобится построить приведенное произведение спектров.

Конструкция приведенного произведения $E \wedge F$ двух спектров E и F , к сожалению, довольно сложна. Однако для тех приложений приведенного произведения, которые мы рассмотрим в главах 14—20, достаточно знать лишь, что такая конструкция существует. Естественно ожидать, что $E \wedge F$ должно быть, в некотором смысле, пределом пространств $E_i \wedge F_j$ при стремлении i, j к бесконечности ($E_i \wedge F_j$ рассматриваются в слабой топологии). Это приводит к следующей конструкции, часто называемой *наивным приведенным произведением* спектров по Бордману. Пусть A — некоторое упорядоченное множество, упорядоченно изоморфное множеству $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Тогда для любого подмножества $B \subset A$ мы имеем монотонную функцию $\beta: A \rightarrow \mathbb{N}$, определенную правилом:

$$\beta(a) = \{\text{число элементов } b \in B \text{ с } b < a\}.$$

В частности, самому множеству $A \subset A$ также соответствует функция $\alpha: A \rightarrow \mathbb{N}$; легко видеть, что это сохраняющий порядок изоморфизм. Предположим теперь, что A разбито в объединение двух подмножеств: $A = B \cup C$, $B \cap C = \emptyset$. Определим наивное приведенное произведение $E \wedge_{BC} F$, полагая

$$(E \wedge_{BC} F)_{\alpha(a)} = E_{\beta(a)} \wedge F_{\gamma(a)}, \quad a \in A,$$

где $\beta, \gamma: A \rightarrow \mathbb{N}$ — монотонные функции, ассоциированные с подмножествами B и C соответственно. Заметим, что $\beta(a) + \gamma(a) = \alpha(a)$ для всех $a \in A$. Если $a \in B$, то

$$(E \wedge_{BC} F)_{\alpha(a)+1} = E_{\beta(a)+1} \wedge F_{\gamma(a)},$$

и мы отождествляем

$$[t, e, f] \in S^1 \wedge E_{\beta(a)} \wedge F_{\gamma(a)} = S^1 \wedge [E \wedge_{BC} F]_{\alpha(a)}$$

с

$$[[t, e], f] \in E_{\beta(a)+1} \wedge F_{\gamma(a)} = [E \wedge_{BC} F]_{\alpha(a)+1}.$$

Если $a \in C$, то

$$(E \wedge_{BC} F)_{\alpha(a)+1} = E_{\beta(a)} \wedge F_{\gamma(a)+1},$$

и мы отождествляем

$$[t, e, f] \in S^1 \wedge E_{\beta(a)} \wedge F_{\gamma(a)} = S^1 \wedge [E \wedge_{BC} F]_{\alpha(a)}$$

с

$$[e, [v'^{\beta(a)}(t), f]] \in E_{\beta(a)} \wedge F_{\gamma(a)+1} = [E \wedge_{BC} F]_{\alpha(a)+1},$$

где $v': S^1 \rightarrow S^1$ — гомотопическое обращение в H -когруппе S^1 .

Пример. Если X — клеточное пространство и $E = E(X)$, то $F \wedge_{A, \emptyset} E(X) = F \wedge X$.

Из определения очевидно, что спектр $E \wedge_{BC} F$ естествен по отношению к функциям спектров. Что касается отображений спект-

ров, то с ними нужно обращаться более осторожно. В самом деле, если E' — кофинальный подспектр в E , то $E' \wedge_{BC} F$ кофинален в $E \wedge_{BC} F$ в случае бесконечного множества B и не кофинален в общем случае. Например, если B содержит n элементов и E' — такой кофинальный подспектр в E , что $E'_q = *$ для $q \leq n$, то $E' \wedge_{BC} F = *$. Однако, если множество B бесконечно, то $E \wedge_{BC} F$ является естественным по отношению к отображениям спектров $f: E \rightarrow G$. Подобным образом, если множество C бесконечно, то $E \wedge_{BC} F$ естествен по отношению к отображениям спектров $g: F \rightarrow H$. Кроме того,

$$(E \wedge_{BC} F) \wedge I^+ \cong E \wedge_{BC} (F \wedge I^+) \cong (E \wedge I^+) \wedge_{BC} F,$$

так что гомотопический класс отображения $f \wedge g$ в случае бесконечного B зависит лишь от гомотопического класса отображения f , а в случае бесконечного C — лишь от гомотопического класса g .

Начиная с этого места, мы будем работать в гомотопической категории $\mathcal{SP}'$. Поэтому термином «эквивалентность» будет обозначаться гомотопическая эквивалентность. Термин «коммутативная диаграмма» будет употребляться в том и только в том случае, когда все соответствующие диаграммы отображений коммутативны с точностью до гомотопии.

Итак, для любого разбиения $A = B \cup C$ множества A определено наивное приведенное произведение $E \wedge_{BC} F$. Возникает вопрос: которое из них следует считать приведенным произведением $E \wedge F$ спектров E и F ? Разумеется, мы хотим, чтобы $E \wedge F$ обладало свойствами, аналогичными свойствам приведенных произведений пространств, такими как $E \wedge F \cong F \wedge E$, $(E \wedge F) \wedge G \simeq E \wedge (F \wedge G)$, $S^0 \wedge E \simeq E \simeq E \wedge S^0$. Некоторые из наивных приведенных произведений коммутативны ($E \wedge_{BC} F \simeq F \wedge_{CB} E$, если $\beta(a) \gamma(a)$ четно для любого a), некоторые из них ассоциативны ($(E \wedge_{BC} F) \wedge_{B \cup C, D} G \simeq E \wedge_{B, C \cup D} (F \wedge_{CD} G)$ для любого разбиения $A = B \cup C \cup D$ с бесконечными множествами $B \cup C$ и $C \cup D$). Для некоторых наивных приведенных произведений спектр S^0 является единицей — именно, $S^0 \wedge_{\Phi, A} E = E = E \wedge_{A, \Phi} S^0$. Но мы хотим, чтобы все эти свойства выполнялись для $E \wedge F$. Поэтому нельзя выбрать какое-либо конкретное разбиение $A = B \cup C$ и положить $E \wedge F = E \wedge_{BC} F$. Вместо этого мы склеим подходящим образом все спектры $E \wedge_{BC} F$. Полученный таким образом спектр и будет приведенным произведением $E \wedge F$.

Обратимся теперь к конструкции бесконечного телескопа из глав 7, 8. Для данного спектра E построим новый спектр $T(E)$, полагая

$$T(E)_n = \left(\bigvee_{i=0}^n S^{n-i} \wedge E_i \wedge [i]^+ \right) \vee \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} S^{n-i} \wedge E_i \wedge [i, i+1]^+ \right),$$

где точка $[t, e, i] \in S^{n-i} \wedge E_i \wedge [i, i+1]^+$ отождествляется с $[t, e, i] \in S^{n-i} \wedge E_i \wedge [i]^+$ и $[s, t, e, i+1] \in S^{n-i-1} \wedge S^1 \wedge E_i \wedge [i, i+1]^+$ отожде-

ствляется с $[s, [t, e], i+1] \in S^{n-i-1} \wedge E_{i+1} \wedge [i+1]^+$. Без труда проверяется, что $T(E)$ действительно является спектром (точка $[s, t, e, u] \in S^1 \wedge S^{n-i} \wedge E_i \wedge [i, i+1]^+ \subset S^1 \wedge T(E)_n$ отождествляется с $[[s, t], e, u] \in S^{n+1-i} \wedge E_i \wedge [i, i+1]^+ \subset T(E)_{n+1}$). Имеет место гомотопическая эквивалентность $\rho: T(E) \rightarrow E$, стягивающая $T(E)_n$ на $E_n \wedge [n]^+ = E_n$, $n \geq 0$.

Конструкция телескопа равнозначна введению на луче $[0, +\infty)$ структуры клеточного пространства с нульмерными клетками $[n]$ и одномерными клетками $[n, n+1]$. После этого над каждой клеткой строятся некоторые пространства и производятся подходящие отождествления на границах. Если заданы два спектра E и F , то можно построить, так сказать, «двумерный телескоп» $E \wedge F$. Это делается следующим образом. Зададим в квадранте $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$ структуру

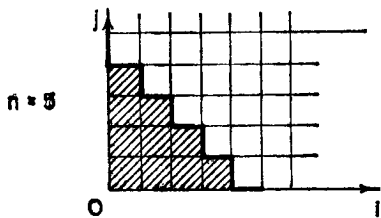


Рис. 24.

клеточного пространства, считая нульмерными клетками точки $[n, m]$, одномерными клетками — отрезки $[n, n+1] \times [m]$ и $[n] \times [m, m+1]$ и двумерными клетками — квадраты $[n, n+1] \times [m, m+1]$, $n, m \geq 0$. Для построения $(E \wedge F)_n$ мы используем только те клетки e , для которых $i+j+\dim(e) \leq n$ (рис. 24). Над клеткой (i, j) возьмем пространство $S^{n-i-j} \wedge E_i \wedge F_j \wedge ([i, i+1] \times [j, j+1])^+$; над клеткой $[i, i+1] \times [j]$ — пространство $S^{n-i-j} \wedge E_i \wedge F_j \wedge ([i, i+1] \times [j])^+$ и над клеткой $[i] \times [j, j+1]$ — пространство $S^{n-i-j} \wedge E_i \wedge F_j \wedge ([i] \times [j, j+1])^+$. Требуемые отождествления имеют вид:

точки $[s, e, f, (i, j)] \in S^{n-i-j} \wedge E_i \wedge F_j \wedge ([i, i+1] \times [j, j+1])^+$ и $[s, e, f, (i, j)] \in S^{n-i-j} \wedge E_i \wedge F_j \wedge ([i] \times [j, j+1])^+$ отождествляются с

$$[s, e, f, (i, j)] \in S^{n-i-j} \wedge E_i \wedge F_j \wedge (i, j)^+;$$

точки $[s, t, e, f, (i+1, j)] \in S^{n-i-j-1} \wedge S^1 \wedge E_i \wedge F_j \wedge ([i, i+1] \times [j])^+$ с

$$[s, [t, e], f, (i+1, j)] \in S^{n-i-i-1} \wedge E_{i+1} \wedge F_j \wedge (i+1, j)^+$$

и точки $[s, t, e, f, (i, j+1)] \in S^{n-i-j-1} \wedge S^1 \wedge E_i \wedge F_j \wedge ([i] \times [j, j+1])^+$ с

$$[s, e, [v^i(t), f], (i, j+1)] \in S^{n-i-j-1} \wedge E_i \wedge F_{j+1} \wedge (i, j+1)^+.$$

Мы должны еще описать пространство над двумерной клеткой $e = [i, i+1] \times [j, j+1]$; разумеется, над de это пространство должно совпадать с уже определенными пространствами.

В de имеются два пути, начинающихся в (i, j) и кончающихся в $(i+1, j+1)$. Если мы движемся по пути, проходящему через $(i+1, j)$, то точка $[s, t, u, e, f, (i, j)]$ переходит в точку $[s, t, [u, e], f, (i+1, j)]$, а затем — в точку $[s, [u, e], [v^{i+1}(t), f], (i+1, j+1)]$. С другой стороны, если мы движемся по пути, проходя-

щему через $(i, j+1)$, то точка $[s, t, u, e, f, (i, j)]$ попадает сначала в $[s, t, e, [v'^i(u), f], (i, j+1)]$, а затем — в $[s, [t, e], [v'^i(u), f], (i+1, j+1)]$. Таким образом, в множителе $S^1 \wedge S^1$ мы имеем функцию перехода $(t, u) \mapsto (u, v'(t))$. Если рассмотреть $S^1 \wedge S^1$ как произведение $[-1, +1] \times [-1, +1]$ с последующими отождествлениями, то эта функция перехода задается матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда вытекает, что построенное нами над ∂e пространство имеет вид

$$S^{n-i-j-2} \wedge M(\xi) \wedge E_i \wedge F_j,$$

где $M(\xi)$ — пространство Тома некоторого $SO(2)$ -расслоения ξ над ∂e . Следовательно, над e мы должны взять пространство

$$S^{n-i-j-2} \wedge M(\eta) \wedge E_i \wedge F_j,$$

где η — некоторое $SO(2)$ -расслоение над e , являющееся продолжением расслоения ξ . Поскольку $\pi_1(BSO(2), *) \cong \pi_0(SO(2), 1) = 0$, то такое продолжение существует. Так как расслоение ξ , по существу, не зависит от i, j, n, E и F , то расслоение η над e также от них не зависит. Таким образом, мы построили для $n \geq 0$ пространства $(E \wedge F)_n$; для $n < 0$ положим $(E \wedge F)_n = *$. Очевидно, что $E \wedge F$ — спектр.

Покажем теперь, что $E \wedge F$ обладает такими свойствами, как естественность, ассоциативность и коммутативность. Ранее мы отмечали, что каждое из этих свойств выполняется для некоторых наивных приведенных произведений $E \wedge_{BC} F$. Докажем, что $E \wedge F$ гомотопически эквивалентно большинству наивных приведенных произведений. Идея доказательства заключается в том, что мы можем вложить телескоп $T(E \wedge_{BC} F)$ в $E \wedge F$ для любых разбиений $A = B \cup C$. Определим отображение

$$\omega: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty) \times [0, +\infty),$$

полагая

$$\omega(t) = \begin{cases} (\beta(a) - \alpha(a) + t, \gamma(a)), & a \in B, \\ (\beta(a), \gamma(a) - \alpha(a) + t), & a \in C, \end{cases} \quad t \in [\alpha(a), \alpha(a) + 1].$$

Пример.

$$B = (0, 1, 3, 6, 7, \dots)$$

$$C = (2, 4, 5, 8, \dots)$$

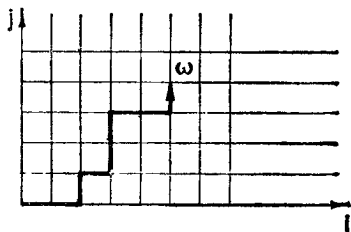


Рис 25.

Теперь мы можем вложить $T(E \wedge_{BC} F)$ в $E \wedge F$, отождествляя точку

$$[s, e, f, t] \in S^{n-\alpha(a)} \wedge E_{\beta(a)} \wedge F_{\gamma(a)} \wedge [\alpha(a), \alpha(a)+1], \quad a \in A,$$

с

$$[s, e, f, \omega(t)] \in S^{n-\alpha(a)} \wedge E_{\beta(a)} \wedge F_{\gamma(a)} \wedge ([\beta(a), \beta(a)+1] \times [\gamma(a)]^+),$$

если $a \in B$, или же с

$$[s, e, f, \omega(t)] \in S^{n-\alpha(a)} \wedge E_{\beta(a)} \wedge F_{\gamma(a)} \wedge ([\beta(a)] \times [\gamma(a), \gamma(a)+1])^+,$$

если $a \in C$.

И, наконец, определим eq_{BC} как композицию

$$E \wedge_{BC} F \xrightarrow{\rho^{-1}} T(E \wedge_{BC} F) \subset E \wedge F,$$

где ρ^{-1} — отображение, гомотопически обратное к $\rho: T(E \wedge_{BC} F) \rightarrow E \wedge_{BC} F$ (напомним, что ρ^{-1} не имеет простого описания; см. 8.26).

13.38. Лемма. Если выполнено одно из следующих трех условий:

- а) оба множества B и C бесконечны;
- б) B имеет d элементов и $SE_r = E_{r+1}$ для $r \geq d$;
- с) C имеет d элементов и $SF_r = F_{r+1}$ для $r \geq d$, то отображение

$$eq_{BC}: E \wedge_{BC} F \rightarrow E \wedge F$$

является гомотопической эквивалентностью.

Доказательство. Предположим, что выполнено условие а). Для каждого $a \in A$ обозначим через $G_{\alpha(a)} \subset (E \wedge F)_{\alpha(a)}$ подпространство, расположенное над клетками e_{ij} , где $i \leq \beta(a)$, $j \leq \gamma(a)$ (рис. 26).

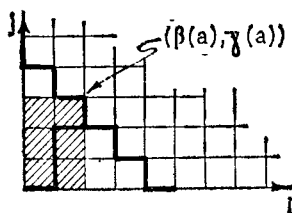


Рис. 26.

Из условия а) следует, что $G = \{G_n\}$ — кофинальный подспектр в $E \wedge F$. С другой стороны, для всех $a \in A$ существует деформационная ретракция пространства $G_{\alpha(a)}$ на $E_{\beta(a)} \wedge F_{\gamma(a)}$. Таким образом, в диаграмме

$$\begin{array}{ccc} & T(E \wedge_{BC} F)_{\alpha(a)} & \\ \nearrow \cong & & \searrow \\ E_{\beta(a)} \wedge F_{\gamma(a)} & \xrightarrow{\cong} & G_{\alpha(a)} \end{array}$$

два из трех отображений индуцируют изоморфизмы гомотопических групп. Значит, этим свойством должно обладать и оставшееся отображение. Но тогда по теореме 8.25

$$T(E \wedge_{\text{вс}} F) \rightarrow G \rightarrow E \wedge F$$

— гомотопическая эквивалентность. Следовательно, и $eq_{\text{вс}}$ — тоже.

Если выполнено условие б), то мы построим кофинальный подспектр $G_{\alpha(a)}$ несколько иначе. Теперь $G_{\alpha(a)} \subset (E \wedge F)_{\alpha(a)}$ — это подпространство, расположенное над клетками e_{ij} с $i + j \leq \alpha(a)$, $j \leq \gamma(a)$. Тогда $\{G_n\}$ по-прежнему является кофинальным подспектром в $E \wedge F$. Поскольку

$$S^{n-d} \wedge E_d \wedge Y_j \rightarrow S^{n-d-s} \wedge E_{d+s} \wedge Y_j$$

— гомеоморфизм для всех $s \geq 0$, то $E_{\beta(a)} \wedge F_{\gamma(a)}$ является деформационным ретрактом пространства $G_{\alpha(a)}$ для $\beta(a) = d$.

Случай с) доказывается аналогично. $\square$

13.39. Следствие. Пусть X — клеточное пространство, $E = E(X)$ и F — произвольный спектр. Тогда $F \wedge E(X) \simeq F \wedge X$. $\square$

Докажем теперь естественность приведенного произведения $E \wedge F$. Функции $f: E \rightarrow G$ и $g: F \rightarrow H$ очевидным образом индуцируют функцию $f \wedge g: E \wedge F \rightarrow G \wedge H$. Однако, если $E' \subset E$ — кофинальный подспектр, то $E' \wedge F$, вообще говоря, не будет кофинальным подспектром в $E \wedge F$. В то же время, если $i: E' \rightarrow E$ — вложение, то оно является эквивалентностью в категории $\mathcal{SF}'$, и мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} E' \wedge F & \xrightarrow{i \wedge 1} & E \wedge F \\ \uparrow eq_{\text{вс}} & & \uparrow eq_{\text{вс}} \\ E' \wedge_{\text{вс}} F & \xrightarrow[i \wedge 1]{\simeq} & E \wedge_{\text{вс}} F \end{array}$$

для любых разбиений $A = B \cup C$. Если множества B и C бесконечны, то $eq_{\text{вс}}$ — гомотопическая эквивалентность. Следовательно, в этом случае $i \wedge 1: E' \wedge F \rightarrow E \wedge F$ также является гомотопической эквивалентностью. Таким образом, если задано произвольное отображение спектров $f: E \rightarrow G$, представляемое функцией $f': E' \rightarrow G$, где E' — кофинальный подспектр в E , то найдется такое отображение $f \wedge 1: E \wedge F \rightarrow G \wedge F$, что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E \wedge F & \xrightarrow{f \wedge 1} & G \wedge F \\ i \wedge 1 \swarrow & & \nearrow f' \wedge 1 \\ & E' \wedge F & \end{array}$$

Аналогично, отображение $g: F \rightarrow H$ индуцирует отображение $1 \wedge g: E \wedge F \rightarrow E \wedge H$. Поскольку $(E \wedge I^+) \wedge F \cong E \wedge (F \wedge I^+) \cong (E \wedge F) \wedge I^+$, то гомотопический класс отображения $f \wedge 1$ зависит лишь от гомотопического класса отображения f . То же самое справедливо и для отображения $1 \wedge g$.

Из построения отображений $f \wedge 1$ и $1 \wedge g$ следует, что

i) если B — бесконечное множество и $f: E \rightarrow G$ — отображение спектров, то диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E \wedge_{BC} F & \xrightarrow{eq_{BC}} & E \wedge F \\ \downarrow f \wedge 1 & & \downarrow f \wedge 1 \\ G \wedge_{BC} F & \xrightarrow{eq_{BC}} & G \wedge F \end{array}$$

коммутативна;

ii) если C — бесконечное множество и $g: F \rightarrow H$ — отображение спектров, то диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E \wedge_{BC} F & \xrightarrow{eq_{BC}} & E \wedge F \\ \downarrow 1 \wedge g & & \downarrow 1 \wedge g \\ E \wedge_{BC} H & \xrightarrow{eq_{BC}} & E \wedge H \end{array}$$

коммутативна.

Сформулируем теперь нашу главную теорему о приведенном произведении $E \wedge F$.

13.40. Теорема. а) Соответствие $(E, F) \mapsto E \wedge F$ является функтором двух переменных.

б) Существуют такие гомотопические эквивалентности (естественные в гомотопической категории $\mathcal{SF}'$)

$$a = a(E, F, G): (E \wedge F) \wedge G \rightarrow E \wedge (F \wedge G),$$

$$\tau = \tau(E, F): E \wedge F \rightarrow F \wedge E,$$

$$l = l(E): S^0 \wedge E \rightarrow E,$$

$$r = r(E): E \wedge S^0 \rightarrow E,$$

что в $\mathcal{SF}'$ коммутативны следующие диаграммы:

$$\begin{array}{ccccc} & & a & \nearrow & (E \wedge F) \wedge (G \wedge H) \xrightarrow{a} E \wedge (F \wedge (G \wedge H)) \\ & & & & \uparrow 1 \wedge a \\ \text{i) } ((E \wedge F) \wedge G) \wedge H & & & & \\ & a \wedge 1 \searrow & & & (E \wedge (F \wedge G)) \wedge H \xrightarrow{a} E \wedge ((F \wedge G) \wedge H) \end{array}$$

$$\text{ii)} \quad \begin{array}{ccc} & F \wedge E & \\ \tau \nearrow & & \searrow \tau \\ E \wedge F & \xrightarrow{1} & E \wedge F, \end{array}$$

$$\text{iii)} \quad \begin{array}{ccc} & (F \wedge E) \wedge G & \\ \tau \wedge 1 \nearrow & & \searrow a \\ (E \wedge F) \wedge G & & F \wedge (E \wedge G) \\ a \downarrow & & \downarrow 1 \wedge \tau \\ E \wedge (F \wedge G) & & F \wedge (G \wedge E) \\ \tau \searrow & & \nearrow a \\ & (F \wedge G) \wedge E, & \end{array}$$

$$\text{iv)} \quad \begin{array}{ccc} (S^0 \wedge E) \wedge F & \xrightarrow{a} & S^0 \wedge (E \wedge F) \\ l \wedge 1 \searrow & & \nearrow l \\ & E \wedge F, & \end{array}$$

$$\text{v)} \quad \begin{array}{ccc} (E \wedge S^0) \wedge F & \xrightarrow{a} & E \wedge (S^0 \wedge F) \\ r \wedge 1 \searrow & & \nearrow 1 \wedge l \\ & E \wedge F, & \end{array}$$

vi) \

vii)

viii)

$$\begin{array}{ccc} (E \wedge F) \wedge S^0 & \xrightarrow{a} & E \wedge (F \wedge S^0) \\ r \searrow & & \nearrow 1 \wedge r \\ & E \wedge F, & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} S^0 \wedge E & \xrightarrow{\tau} & E \wedge S^0 \\ l \searrow & & \nearrow r \\ & E, & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} S^0 \wedge S^0 & \xrightarrow{\tau} & S^0 \wedge S^0 \\ & \searrow 1 & \nearrow \\ & S^0 \wedge S^0. & \end{array}$$

Замечание. Используя эти восемь диаграмм, можно доказать коммутативность любой другой диаграммы, включающей отображения a , τ , l и r (разумеется, если она коммутативна!) (см. [50]).

Доказательство. Пункт а) мы уже доказали. Конструкция отображений l и r довольно проста: l представляет собой композицию

$$S^0 \wedge E \xrightarrow{eq_{\Phi}^{-1}} S^0 \wedge_{\Phi, A} E \simeq E,$$

а r — композицию

$$E \wedge S^0 \xrightarrow{eq_A^{-1}} E \wedge_{A, \Phi} S^0 \simeq E.$$

По лемме 13.38 отображения $eq_{\Phi, A}$ и $eq_{A, \Phi}$ являются гомотопическими эквивалентностями.

Рассмотрим теперь отображение τ . Было бы заманчиво определить τ требованием гомотопической коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
 E \wedge F & \xrightarrow{\tau} & F \wedge E \\
 \uparrow eq_{BC} & & \uparrow eq_{CB} \\
 E \wedge_{BC} F & \xrightarrow{\tau_{BC}} & F \wedge_{CB} E,
 \end{array}$$

13.41.

в которой оба множества B и C бесконечны и τ_{BC} задано формулой $\tau_{BC}[e, f] = [f, e]$, $e \in E_{\beta(a)}$, $f \in F_{\gamma(a)}$. Однако на этом пути возникают следующие трудности.

i) Отображение τ_{BC} не является функцией спектров. В самом деле, для этого должно бы выполняться условие $\tau_{BC}[e, f] = (-1)^{\beta(a)\gamma(a)}[f, e]$. Но это невозможно, поскольку не существует надстройки, результатом применения которой было бы умножение на $(-1)^{\beta(a)\gamma(a)}$. Самый простой способ преодолеть указанную трудность — это ограничиться такими разбиениями $A = B \cup C$, для которых оба прообраза $\alpha^{-1}(2n+1)$ и $\alpha^{-1}(2n)$ при всех $n \geq 0$ лежат одновременно в B или в C . В этом случае произведение $\beta(a)\gamma(a)$ всегда четно. В действительности, мы будем рассматривать более узкий класс разбиений:

13.42. Все прообразы $\alpha^{-1}(4n)$, $\alpha^{-1}(4n+1)$, $\alpha^{-1}(4n+2)$, $\alpha^{-1}(4n+3)$ лежат одновременно либо в B , либо в C для любых $n \geq 0$.

Причина, по которой мы рассматриваем сразу четыре прообраза, станет ясной в ближайшем будущем. Заметим, что разбиение $A = \emptyset \cup A$ удовлетворяет условию 13.42.

ii) Другая трудность состоит в том, что для наших целей (скажем, для доказательства утверждения vii)) недостаточно разбиений $A = B \cup C$, в которых и B и C бесконечны.

К счастью, все эти трудности преодолимы.

13.43. Лемма. Для любых спектров E и F существуют такой спектр Q и такие гомотопические эквивалентности

$$i_0: E \wedge F \rightarrow Q, \quad i_1: F \wedge E \rightarrow Q,$$

что для каждого разбиения $A = B \cup C$, удовлетворяющего условию 13.42, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 & & Q \\
 & \nearrow i_0 & \nwarrow i_1 \\
 E \wedge F & & F \wedge E \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 T(E \wedge_{BC} F) & \xrightarrow{T(\tau_{BC})} & T(F \wedge_{CB} E) \\
 \downarrow \rho & & \downarrow \rho \\
 E \wedge_{BC} F & \xrightarrow{\tau_{BC}} & F \wedge_{CB} E.
 \end{array}$$

Разумеется, мы определяем $\tau: E \wedge F \rightarrow F \wedge E$ как композицию $i_1^{-1} \cdot i_0$; в этом случае диаграмма 13.41 будет коммутативной для всех разбиений $A = B \cup C$, удовлетворяющих условию 13.42.

Доказательство леммы 13.43. Мы построим спектр Q над $[0, +\infty) \times [0, +\infty) \times I$ таким образом, чтобы часть его, расположенная над $[0, +\infty) \times [0, +\infty) \times 0$, равнялась $E \wedge F$, а часть, расположенная над $[0, +\infty) \times [0, +\infty) \times 1$, равнялась $F \wedge E$. Пусть e_{ij} — либо нульмерные клетки вида $[i] \times [j]$ для четных i или j , либо одномерные клетки вида $[i] \times [j+1]$ для четного i и $[i, i+1] \times [j]$ для четного j . Возьмем над клетками $e_{ij} \wedge I^+$ соответствующую часть $(E \wedge F)_n \wedge I^+$ и отождествим нижнее (нулевое) основание цилиндра с соответствующей частью $(E \wedge F)_n$, а на верхнем (единичном) основании отождествим точки

$$[u; e, f, s, t] \in S^{n-i-j} \wedge E_i \wedge F_j \wedge e_{ij}^\dagger$$

с точками

$$[u, f, e, t, s] \in S^{n-i-j} \wedge F_j \wedge E_i \wedge e_{ij}^\dagger.$$

В силу условия 13.42 эти отождествления согласованы.

Итак, мы уже описали часть Q_n над ∂e , где $e = [2i, 2i+2] \times [2j, 2j+2] \times I$. Эта часть содержит клеточное подпространство

$$S^{n-2i-2j-4} \wedge M(\tau') \wedge E_{2i} \wedge F_{2j},$$

где τ' — расслоение размерности 4 над ∂e . Как и прежде, расслоение τ' не зависит от n, i, j, E и F , а зависит лишь от произвола, допущенного при построении спектра $E \wedge F$. Обозначим через $\alpha \in \pi_1(SO, 1) \cong \mathbb{Z}_2$ гомотопический класс отображений, классифицирующих τ' .

В $e' = [4i, 4i+4] \times [4j, 4j+4] \times I$ имеются четыре клетки рассмотренного ранее типа — обозначим их e_1, e_2, e_3, e_4 . Спектр Q уже построен над $\partial e_1 \cup \partial e_2 \cup \partial e_3 \cup \partial e_4$ и содержит клеточное подпространство вида

$$S^{n-4i-4j-8} \wedge M(\tau'') \wedge E_{4i} \wedge F_{4j},$$

где τ'' — некоторое $SO(8)$ -расслоение над $\partial e_1 \cup \partial e_2 \cup \partial e_3 \cup \partial e_4$. Очевидно, что $\tau''|_{\partial e_i} \simeq \tau' \oplus \epsilon^4$. Следовательно, $\tau''|_{\partial e'}$ классифицируется элементом $4\alpha = 0$, т. е. τ'' может быть продолжено на клетку e' . Выберем это продолжение так, чтобы оно не зависело от n, i, j, E, F .

Из всех построенных пространств мы сохраним лишь следующие:

$$(E \wedge F)_n \wedge 0^+, (F \wedge E)_n \wedge 1^+, S^{n-4i-4j-d} \wedge M(\tau_d) \wedge E_{4i} \wedge F_{4j} \wedge I^+$$

для всех i, j с $4i+4j+d \leq n$ (где τ_d — подходящее расслоение размерности d над d -мерными клетками $[4i] \times [4j]$, $[4i, 4i+4] \times [4j]$ и т. д.) и, наконец,

$$S^{n-4i-4j-8} \wedge M(\tau'') \wedge E_{4i} \wedge F_{4j},$$

для всех i, j с $4i+4j+8 \leq n$. Этот набор мы назовем простран-

ством Q_n . Очевидно, что вложения $i_0: E \wedge F \rightarrow Q$, $i_1: F \wedge E \rightarrow Q$ являются отображениями спектров; по теореме 8.25 i_0 и i_1 — гомотопические эквивалентности. Включенных в Q пространств как раз достаточно, чтобы сделать диаграмму 13.43 коммутативной. $\square$

Теперь мы можем доказать теорему 13.40, b), ii). В силу п. 13.41, для этого достаточно установить коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} & F \wedge_{CB} E & \\ \tau_{BC} \nearrow & & \searrow \tau_{CB} \\ E \wedge_{BC} F & \xrightarrow{1} & E \wedge_{BC} F; \end{array}$$

но она коммутативна даже и как диаграмма функций. Точно так же для доказательства утверждения 13.40, b), vii) достаточно установить коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} S^0 \wedge_{\emptyset, A} E & \xrightarrow{\tau_{\emptyset, A}} & E \wedge_{A, \emptyset} S^0 \\ \searrow \cong & & \swarrow \cong \\ & E, & \end{array}$$

которая снова коммутативна как диаграмма функций. Утверждение 13.40, b), viii) следует из того факта, что отображение

$$S^0 \simeq S^0 \wedge S^0 \xrightarrow{\tau} S^0 \wedge S^0 \simeq S^0$$

имеет, по построению, степень 1.

Обратимся теперь к построению отображения a . Удобнее всего было бы определить a требованием, чтобы диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} & & (E \wedge F) \wedge G & \xrightarrow{a} & E \wedge (F \wedge G) & & \\ & \nearrow eq_{B \cup C, D} & \nearrow eq_{BC \wedge 1} & & \nearrow 1 \wedge eq_{CD} & \nearrow eq_{B, C \cup D} & \\ 13.44. & (E \wedge F) \wedge_{B \cup C, D} G & (E \wedge_{BC} F) \wedge G & & E \wedge (F \wedge_{CD} G) & & E \wedge_{B, C \cup D} (F \wedge G) \\ & \searrow eq_{BC \wedge 1} & \searrow eq_{B \cup C, D} & & \searrow eq_{B, C \cup D} & \searrow 1 \wedge eq_{CD} & \\ & (E \wedge_{BC} F) \wedge_{B \cup C, D} G & \xrightarrow{1} & E \wedge_{B, C \cup D} (F \wedge_{CD} G) & & & \end{array}$$

была коммутативной для всех разбиений $A = B \cup C \cup D$ с бесконечными B , C и D (заметим, что приведенные произведения $(E \wedge_{BC} F) \wedge_{B \cup C, D} G$ и $E \wedge_{B, C \cup D} (F \wedge_{CD} G)$ представляют собой, по существу, один и тот же спектр). Но, к сожалению, для того чтобы доказать утверждение 13.40, b) iv) — vi), таких разбиений недостаточно.

13.45. Лемма. Пусть E, F и G — произвольные спектры. Тогда существуют такие спектры P', P'' , что для любых разбиений $A = B \cup C \cup D$ с бесконечными $B \cup C, C \cup D$ коммутативны диаграммы

$$\begin{array}{ccccc}
 (E \wedge_{BC} F) \wedge G & \xleftarrow{\rho \wedge 1} & (T(E \wedge_{BC} F)) \wedge G & \xrightarrow{i \wedge 1} & (E \wedge F) \wedge G \\
 \uparrow i & & \nearrow j' & & \uparrow i' \\
 T((E \wedge_{BC} F) \wedge_{B \cup C, D} G) & \xrightarrow{k'} & & & P'
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 E \wedge (F \wedge_{CD} G) & \xleftarrow{1 \wedge \rho} & E \wedge T(F \wedge_{CD} G) & \xrightarrow{1 \wedge i} & E \wedge (F \wedge G) \\
 \uparrow i & & \nearrow j'' & & \uparrow i'' \\
 T(E \wedge_{B, C \cup D} (F \wedge_{CD} G)) & \xrightarrow{k''} & & & P''
 \end{array}$$

где i', i'' — эквивалентности, не зависящие от B, C, D . Кроме того, существует такая эквивалентность $e: P' \rightarrow P''$, для которой коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 P' & \xrightarrow{e} & P'' \\
 \uparrow k' & & \uparrow k'' \\
 T((E \wedge_{BC} F) \wedge_{B \cup C, D} G) & = & T(E \wedge_{B, C \cup D} (F \wedge_{CD} G))
 \end{array}$$

Считая эту лемму доказанной, положим $a = i'' \circ e \circ (i')^{-1}$; тогда коммутативна диаграмма 13.44.

Мы ограничимся здесь лишь идеей доказательства леммы 13.45. Приведенное произведение $(E \wedge F) \wedge G$ является «четырёхмерным телескопом», т. е. оно строится над клетками положительного конуса в четырёхмерном пространстве. Можно построить клеточное отображение θ трёхмерного конуса C^3 в четырёхмерный конус и перенести с его помощью на C^3 те элементы (расслоения и т. д.), из которых составлено $(E \wedge F) \wedge G$. Таким образом, если e_{ijk} — клетка из C^3 , то часть $((E \wedge F) \wedge G)_n$, расположенная над $\theta(e_{ijk})$, содержит клеточное подпространство вида

$$S^{n-i-j-k-d} \wedge M(\tau_d) \wedge E_i \wedge F_j \wedge G_k,$$

и мы определяем соответствующую часть спектра P' как

$$S^{n-i-j-k-d} \wedge M(\theta^* \tau_d) \wedge E_i \wedge F_j \wedge G_k,$$

где $\theta^* \tau_d$ — индуцированное расслоение на e_{ijk} . Спектр P'' строится аналогично, причем из построения ясно, что P' и P'' имеют одну и ту же структуру. Следовательно, определена естественная эквивалентность $e: P' \rightarrow P''$. Во всех подробностях это доказательство можно найти в лекциях Адамса [8].

Докажем теперь утверждение 13.40, б), i). С этой целью возьмем произвольное разбиение

$$A = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4,$$

в котором все множества B_i , $1 \leq i \leq 4$, бесконечны. Тогда утверждение 13.40, б), i) следует из того факта, что

$$\begin{array}{ccc} & (E \wedge_{B_1 B_2} F) \wedge_{B_1 \cup B_2, B_3 \cup B_4} (G \wedge_{B_3 B_4} H) & \\ \nearrow 1 & & \searrow 1 \\ ((E \wedge_{B_1 B_2} F) \wedge_{B_1 \cup B_2, B_3} G) \wedge_{B_1 \cup B_2 \cup B_3, B_4} H & & E \wedge_{B_1, B_2 \cup B_3 \cup B_4} (F \wedge_{B_2, B_3 \cup B_4} (G \wedge_{B_3 B_4} H)) \\ \downarrow 1 & & \uparrow 1 \\ (E \wedge_{B_1, B_2 \cup B_3} (F \wedge_{B_2 B_3} G)) \wedge_{B_1 \cup B_2 \cup B_3, B_4} H & \xrightarrow{1} & E \wedge_{B_1, B_2 \cup B_3 \cup B_4} ((F \wedge_{B_2 B_3} G) \wedge_{B_2 \cup B_3, B_4} H) \end{array}$$

представляет собой коммутативную диаграмму функций. Утверждение 13.40, б), iii) вытекает из коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} & (F \wedge_{CB} E) \wedge_{C \cup B, D} G & \\ \nearrow \tau \wedge 1 & & \searrow 1 \\ (E \wedge_{BC} F) \wedge_{B \cup C, D} G & & F \wedge_{C, B \cup D} (E \wedge_{BD} G) \\ \downarrow 1 & & \downarrow 1 \wedge \tau \\ E \wedge_{B, C \cup D} (F \wedge_{CD} G) & & F \wedge_{C, D \cup B} (G \wedge_{DB} E) \\ \searrow \tau & & \nearrow 1 \\ & (F \wedge_{CD} G) \wedge_{C \cup D, B} E & \end{array}$$

Доказательства утверждений iv), v) и vi) аналогичны. Тем самым теорема 13.40 полностью доказана. $\square$

13.46. Предложение. Для любых спектров E, F имеют место естественные гомотопические эквивалентности

$$\Sigma E \wedge F \simeq \Sigma (E \wedge F) \simeq E \wedge \Sigma F.$$

Доказательство. $\Sigma E \wedge F \simeq \Sigma (E \wedge F)$ представляет собой цепочку естественных гомотопических эквивалентностей $\Sigma E \wedge F \simeq (E \wedge S^1) \wedge F \underset{a}{\simeq} E \wedge (S^1 \wedge F) \underset{1 \wedge \tau}{\simeq} E \wedge (F \wedge S^1) \underset{a}{\simeq} (E \wedge F) \wedge S^1 \simeq \Sigma (E \wedge F)$,

а $E \wedge \Sigma F \simeq \Sigma (E \wedge F)$ — цепочку эквивалентностей $E \wedge \Sigma F \simeq E \wedge (F \wedge S^1) \simeq (E \wedge F) \wedge S^1 \simeq \Sigma (E \wedge F)$. $\square$

З а м е ч а н и е. Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & & \Sigma S^n \\ & \nearrow \simeq & \downarrow \simeq \\ S^{n+1} & & S^n \wedge S^1 \\ & \searrow \simeq & \end{array}$$

гомотопически коммутативна с точностью до знака $(-1)^n$. Точно так же диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^2(X \wedge Y) & \rightarrow & \Sigma(\Sigma X \wedge Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma(X \wedge \Sigma Y) & \rightarrow & \Sigma X \wedge \Sigma Y \end{array}$$

коммутативна с точностью до знака -1 .

13.47. Предложение. Если

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

— корасслоенная последовательность и H — произвольный спектр, то

$$H \wedge E \xrightarrow{1 \wedge f} H \wedge F \xrightarrow{1 \wedge g} H \wedge G$$

— также корасслоенная последовательность.

Доказательство. Если предположить, что

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

— специальная корасслоенная последовательность и заменить $\wedge$ наивным приведенным произведением $\wedge_{BC}$ с бесконечными B и C , то результат очевиден. Общий же случай сводится к рассмотренному. $\square$

13.48. Предложение. Для любых спектров E , X_α , $\alpha \in A$, имеет место естественная гомотопическая эквивалентность

$$E \wedge \left(\bigvee_\alpha X_\alpha \right) \simeq \bigvee_\alpha (E \wedge X_\alpha).$$

Доказательство. Снова, если заменить $\wedge$ на $\wedge_{BC}$ с бесконечными B и C , то результат очевиден. Но eq_{BC} является естественной гомотопической эквивалентностью. $\square$

Мы проделали тяжелую работу по построению приведенного произведения $E \wedge F$ и доказательству наиболее важных его свойств. Теперь начнем наслаждаться плодами нашего труда. Например,

очевидно, что можно продолжить теорию гомологий E_* , ассоциированную со спектром E на категорию спектров $\mathcal{S}\mathcal{P}$: для этого достаточно положить

$$E_n(X) = \pi_n(E \wedge X) = [S^n, E \wedge X],$$

$n \in \mathbb{Z}$, $X \in \mathcal{S}\mathcal{P}$. Поскольку для любого клеточного пространства X мы имеем $E \wedge X \simeq E \wedge E(X)$, то на категории клеточных пространств это определение совпадает с прежним. Аксиомы для теории гомологий на $\mathcal{S}\mathcal{P}'$ непосредственно следуют из предложений 13.46 — 13.48.

Как показывает следующее предложение, теорию гомологий $E_n(X)$ можно определить также в терминах прямых пределов.

13.49. Предложение. Для любых двух спектров E и X имеет место естественный изоморфизм

$$E_n(X) \cong \operatorname{dir} \lim_q \tilde{E}_{n+q}(X_q),$$

где морфизмы индуктивной системы определяются как композиции

$$\tilde{E}_{n+q}(X_q) \cong \tilde{E}_{n+q+1}(SX_q) \xrightarrow{\varepsilon_q} \tilde{E}_{n+q+1}(X_{q+1}),$$

$\varepsilon_q: SX_q \rightarrow X_{q+1}$ — включение.

Доказательство. Данное предложение является следствием формулируемого ниже алгебраического утверждения, доказательство которого мы оставляем читателю. Пусть

$$\{G_{ij}, \phi_{ij}^{kl}: (i, j), (k, l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$$

— индуктивная система абелевых групп G_{ij} и гомоморфизмов

$$\phi_{ij}^{kl}: G_{ij} \rightarrow G_{kl}$$

для $i \leq k$, $j \leq l$, где $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ рассматривается с отношением частичного порядка $(i, j) \leq (k, l) \Leftrightarrow i \leq k$, $j \leq l$. Образует группу

$$\operatorname{dir} \lim_i (\operatorname{dir} \lim_j G_{ij}).$$

Тогда для всех $k, l \in \mathbb{N}$ имеют место такие естественные гомоморфизмы

$$f_{kl}: G_{kl} \rightarrow \operatorname{dir} \lim_i (\operatorname{dir} \lim_j G_{ij}),$$

что $f_{mn} \cdot \phi_{kl}^{mn} = f_{kl}$. Пусть $\mathbb{N} = B \cup C$ — некоторое разбиение и функции $\beta, \gamma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ определены так же, как в конструкции наивного приведенного произведения. Тогда

$$f_{\beta(n), \gamma(n)}: G_{\beta(n), \gamma(n)} \rightarrow \operatorname{dir} \lim_i (\operatorname{dir} \lim_j G_{ij}), \quad n \in \mathbb{N},$$

определяют гомоморфизм

$$f_{BC} = \{f_{\beta(n), \gamma(n)}\}: \operatorname{dir} \lim_n G_{\beta(n), \gamma(n)} \rightarrow \operatorname{dir} \lim_i (\operatorname{dir} \lim_j G_{ij}).$$

Мы утверждаем, что если оба множества B и C бесконечны, то f_{BC} — изоморфизм.

Пусть теперь $N = B \cup C$ — произвольное разбиение с бесконечными B и C . Тогда мы имеем последовательность естественных изоморфизмов

$$\begin{aligned} E_n(X) &= \pi_n(E \wedge X) \xrightarrow{\cong} \pi_n(E \wedge_{BC} X) \cong \\ \operatorname{dir} \lim_r \pi_{n+r}((E \wedge_{BC} X)_r) &= \operatorname{dir} \lim_r \pi_{n+\beta(r)+\gamma(r)}(E_{\beta(r)} \wedge X_{\gamma(r)}) \xrightarrow{f_{BC}} \\ \operatorname{dir} \lim_i (\operatorname{dir} \lim_j \pi_{n+i+j}(E_j \wedge X_i)) &\cong \operatorname{dir} \lim_i \pi_{n+i}(E \wedge X_i). \quad \square \end{aligned}$$

С помощью приведенного произведения спектров в теории гомотопий и когомологий вводятся различные умножения.

13.50. Определение. *Кольцевым спектром* называется спектр E с заданными в нем умножением $\mu: E \wedge E \rightarrow E$ (μ — отображение спектров) и единицей $\iota: S^0 \rightarrow E$, для которых гомотопически коммутативны следующие диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} E \wedge E \wedge E & \xrightarrow{\mu \wedge 1} & E \wedge E \\ \downarrow 1 \wedge \mu & & \downarrow \mu \\ E \wedge E & \xrightarrow{\mu} & E, \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} S^0 \wedge E & \xrightarrow{\iota \wedge 1} & E \wedge E & \xrightarrow{1 \wedge \iota} & E \wedge S^0 \\ & \searrow \iota & \downarrow \mu & \swarrow r & \\ & & E & & \end{array}$$

Если, кроме того, гомотопически коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E \wedge E & \xrightarrow{\tau} & E \wedge E \\ \mu \searrow & & \swarrow \mu \\ & E, & \end{array}$$

то умножение μ называется *коммутативным* (а E — *коммутативным кольцевым спектром*).

Для любого кольцевого спектра E можно определить внешние умножения:

- i) $\wedge: E_n(X) \otimes E_m(Y) \rightarrow E_{n+m}(X \wedge Y)$,
- ii) $\wedge: E^n(X) \otimes E^m(Y) \rightarrow E^{n+m}(X \wedge Y)$,
- iii) $\wedge: E^p(X \wedge Y) \otimes E_q(Y) \rightarrow E^{p-q}(X)$,
- iv) $\wedge: E^p(X) \otimes E_q(X \wedge Y) \rightarrow E_{q-p}(Y)$

следующим образом:

i) Пусть $x \in E_n(X)$, $y \in E_m(Y)$ представлены отображениями $f: S^n \rightarrow E \wedge X$ и $g: S^m \rightarrow E \wedge Y$ соответственно. Тогда $x \wedge y$ представляется композицией

$$\begin{aligned} S^{n+m} &\simeq S^n \wedge S^m \xrightarrow{f \wedge g} (E \wedge X) \wedge (E \wedge Y) \xrightarrow{\wedge} \\ &E \wedge E \wedge X \wedge Y \xrightarrow{\mu \wedge 1} E \wedge X \wedge Y. \end{aligned}$$

Без труда проверяется, что операция $\wedge$ билинейна, так что в действительности мы получаем гомоморфизм из тензорного произведения.

ii) Пусть $x \in E^n(X)$ и $y \in E^m(Y)$ представлены отображениями $f: X \rightarrow \Sigma^n E$ и $g: Y \rightarrow \Sigma^m E$ соответственно. Тогда $x \wedge y$ представляется композицией

$$X \wedge Y \xrightarrow{f \wedge g} \Sigma^n E \wedge \Sigma^m E \simeq \Sigma^{n+m} (E \wedge E) \xrightarrow{\Sigma^{n+m} \mu} \Sigma^{n+m} E.$$

Как и прежде, $\wedge$ билинейно.

iii) Если $w \in E^p(X \wedge Y)$ и $y \in E_q(Y)$ представлены отображениями $f: X \wedge Y \rightarrow \Sigma^p E$ и $g: S^q \rightarrow E \wedge Y$ соответственно, то w / y представляется композицией

$$\begin{aligned} X &\simeq X \wedge S^0 \xrightarrow{1 \wedge \Sigma^{-q} g} X \wedge \Sigma^{-q} E \wedge Y \xrightarrow{1 \wedge 1} X \wedge Y \wedge \Sigma^{-q} E \xrightarrow{1 \wedge 1} \\ &\Sigma^p E \wedge \Sigma^{-q} E \simeq \Sigma^{p-q} E \wedge E \xrightarrow{\Sigma^{p-q} \mu} \Sigma^{p-q} E. \end{aligned}$$

iv) Если $x \in E^p(X)$ и $w \in E_q(X \wedge Y)$ представлены отображениями $f: X \rightarrow \Sigma^p E$ и $g: S^q \rightarrow E \wedge X \wedge Y$ соответственно, то $x \setminus w$ представляется композицией

$$\begin{aligned} S^{q-p} &\xrightarrow{\Sigma^{-p} g} \Sigma^{-p} E \wedge X \wedge Y \xrightarrow{1 \wedge 1} X \wedge \Sigma^{-p} E \wedge Y \xrightarrow{1 \wedge 1} \\ &\Sigma^p E \wedge \Sigma^{-p} E \wedge Y \simeq E \wedge E \wedge Y \xrightarrow{\mu \wedge 1} E \wedge Y. \end{aligned}$$

В силу замечания, следующего за предложением 13.46, мы должны договориться о том, что понимается под такими эквивалентностями, как $\Sigma^{n+m}(X \wedge Y) \simeq \Sigma^n X \wedge \Sigma^m Y$. В дальнейшем такая эквивалентность будет означать композицию

$$\Sigma^{n+m}(X \wedge Y) \simeq \Sigma^n(X \wedge \Sigma^m Y) \simeq \Sigma^n X \wedge \Sigma^m Y.$$

13.51. Замечания. i) Для $/$ - и $\setminus$ -умножений имеется следующее мнемоническое правило:

а) когомологическая переменная всегда расположена слева, а гомологическая переменная — справа от знака умножения;

б) символы, обозначающие пространства, подчиняются относительно этих умножений «правилу сокращения дробей», т. е.

$$„XY / Y \rightarrow X”, \quad „X \setminus XY \rightarrow Y”$$

ii) Для любых спектров E и F можно определить более общие умножения

$$E_n(X) \otimes F_m(Y) \rightarrow (E \wedge F)_{n+m}(X \wedge Y)$$

и т. д. (ср. с $\times$ -умножением $H_n(X; G) \otimes H_m(Y; G') \rightarrow H_{n+m}(X \otimes Y; G \otimes G')$ для двух произвольных абелевых групп G, G').

iii) Существует понятие *модульного спектра* F над кольцевым спектром E . Это означает, что задано такое отображение спек-

ров $\alpha: E \wedge F \rightarrow F$, для которого гомотопически коммутативны некоторые очевидные диаграммы. Комбинируя α с умножениями

$$E_n(X) \otimes F_m(Y) \rightarrow (E \wedge F)_{n+m}(X \wedge Y)$$

и т. д., мы получаем для любого модульного спектра F над E умножения

$$E_n(X) \otimes F_m(Y) \rightarrow F_{n+m}(X \wedge Y)$$

и т. д.

Для клеточных пар (X, A) мы имеем относительные группы $E_*(X, A)$, $E^*(X, A)$ и соответствующие внешние умножения, которые определяются, исходя из того факта, что

$$(X/A) \wedge (Y/B) \cong X \times Y / X \times B \cup A \times Y.$$

Таким образом, мы получаем умножения

- i) $\times: E_n(X, A) \otimes E_m(Y, B) \rightarrow E_{n+m}(X \times Y, X \times B \cup A \times Y)$,
- ii) $\times: E^n(X, A) \otimes E^m(Y, B) \rightarrow E^{n+m}(X \times Y, X \times B \cup A \times Y)$,
- iii) $/: E^p(X \times Y, X \times B \cup A \times Y) \otimes E_q(Y, B) \rightarrow E^{p-q}(X, A)$,
- iv) $\setminus: E^p(X, A) \otimes E_q(X \times Y, X \times B \cup A \times Y) \rightarrow E_{q-p}(Y, B)$.

Как известно, используя клеточные эквиваленты, можно определить $E_*(X, A)$ и $E^*(X, A)$ для произвольных пар (X, A) . Следовательно, наши умножения продолжаются на произвольные пары (X, A) и (Y, B) , удовлетворяющие лишь тому ограничению, что триада $(X \times B \cup A \times Y; X \times B, A \times Y)$ вырезаема относительно E .

Свойства естественности описанных выше умножений вытекают непосредственно из определений. Сформулируем их в виде следующего предложения.

13.52. Предложение. Пусть $f: X \rightarrow X'$, $g: Y \rightarrow Y'$ — некоторые отображения спектров.

- i) Если $x \in E_n(X)$, $y \in E_m(Y)$, то $(f \wedge g)_*(x \wedge y) = f_*(x) \wedge g_*(y)$.
- ii) Если $x \in E^n(X')$, $y \in E^m(Y')$, то $(f \wedge g)^*(x \wedge y) = f^*(x) \wedge g^*(y)$.
- iii) Если $u \in E^p(X' \wedge Y')$, $y \in E_q(Y)$, то $((f \wedge g)^* u) /' y = f^*(u / g_* y)$.
- iv) Если $x \in E^p(X')$, $v \in E_q(X \wedge Y)$, то $x \setminus (f \wedge g)_*(v) = g_*(f^* x \setminus v)$.

Если умножение μ коммутативно, то $\wedge$ удовлетворяет следующему соотношению коммутативности.

13.53. Предложение. Если умножение $\mu: E \wedge E \rightarrow E$ коммутативно и $x \in E_n(X)$, $y \in E_m(Y)$, то $\tau_*(x \wedge y) = (-1)^{nm} y \wedge x$. Аналогичный результат справедлив и для когомологий.

Вопрос: как должно быть сформулировано соотношение коммутативности для более общего умножения

$$\wedge: E_n(X) \otimes F_m(Y) \rightarrow (E \wedge F)_{n+m}(X \wedge Y)?$$

Доказательство. Предположим, что элемент $x \in E_n(X)$ представлен отображением $f: S^n \rightarrow E \wedge X$, а элемент $y \in E_m(Y)$ — отображением $g: S^m \rightarrow E \wedge Y$. Тогда результат следует из гомотопической коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} S^{n+m} \simeq S^n \wedge S^m & \xrightarrow{f \wedge g} & (E \wedge X) \wedge (E \wedge Y) & \xrightarrow{1 \wedge \tau \wedge 1} & \\ \downarrow (-1)^{nm} & \downarrow \tau & \downarrow \tau & & \\ S^{n+m} \simeq S^m \wedge S^n & \xrightarrow{g \wedge f} & (E \wedge Y) \wedge (E \wedge X) & \xrightarrow{1 \wedge \tau \wedge 1} & \\ & & & & \\ & & E \wedge E \wedge X \wedge Y & \xrightarrow{\mu \wedge 1} & E \wedge X \wedge Y \\ & & \downarrow \tau \wedge \tau & & \downarrow 1 \wedge \tau \\ & & E \wedge E \wedge Y \wedge X & \xrightarrow{\mu \wedge 1} & E \wedge Y \wedge X. \end{array}$$

Единственное место, в котором гомотопическая коммутативность не совсем очевидна, — это самый левый квадрат.

Коммутативность его получается двойной индукцией по (n, m) , базисом которой является утверждение о том, что отображения $\tau: S^1 \wedge S^1 \rightarrow S^1 \wedge S^1$ и $v' \wedge 1: S^1 \wedge S^1 \rightarrow S^1 \wedge S^1$ гомотопны (см. доказательство теоремы 8.26). $\square$

Построенные умножения связаны восемью соотношениями ассоциативности.

13.54. Предложение. i) Если $x \in E_n(X)$, $y \in E_m(Y)$, $z \in E_p(Z)$, то

$$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z) \in E_{n+m+p}(X \wedge Y \wedge Z).$$

ii) Если $x \in E^n(X)$, $y \in E^m(Y)$, $z \in E^p(Z)$, то

$$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z) \in E^{n+m+p}(X \wedge Y \wedge Z).$$

iii) Если $x \in E^n(X)$, $u \in E_m(X \wedge Y)$, $z \in E_p(Z)$, то

$$(x \searrow u) \wedge z = x \searrow (u \wedge z) \in E_{m+p-n}(Y \wedge Z).$$

iv) Если $x \in E^n(X)$, $u \in E^m(Y \wedge Z)$, $z \in E_p(Z)$, то

$$x \wedge (u / z) = (x \wedge u) / z \in E^{n+m-p}(X \wedge Y).$$

v) Если $w \in E^m(X \wedge Y \wedge Z)$, $y \in E_n(Y)$, $z \in E_p(Z)$, то

$$(w / z) / y = w / (\tau_*(z \wedge y)) \in E^{m-n-p}(X).$$

vi) Если $x \in E^m(X)$, $y \in E^n(Y)$, $w \in E_p(X \wedge Y \wedge Z)$, то $y \setminus (x \setminus w) = \tau^*(y \wedge x) \setminus w \in E_{p-m-n}(Z)$.

vii) Если $u \in E^m(X \wedge Z)$, $y \in E^n(Y)$, $v \in E_p(Y \wedge Z)$, то $u \setminus (y \setminus v) = [(1 \wedge \tau)^*(u \wedge y)] \setminus v \in E^{n+m-p}(X)$.

viii) Если $u \in E^m(X \wedge Y)$, $y \in E_n(Y)$, $v \in E_p(X \wedge Z)$, то $(u \setminus y) \setminus v = u \setminus [(\tau \wedge 1)_*(y \wedge v)] \in E_{n+p-m}(Z)$.

Доказательство этих утверждений заключается в выписывании соответствующих диаграмм и проверке их гомотопической коммутативности. При этом важную роль играет ассоциативность умножения μ .

Вопрос: как формулируются эти соотношения ассоциативности для более общих умножений замечания 13.51, ii)?

Замечание. Если умножение μ коммутативно, то с помощью предложения 13.53 можно переписать соотношения v) и vi) в следующем виде:

$$(w \setminus z) \setminus y = (-1)^{np} w \setminus (y \wedge z),$$

$$y \setminus (x \setminus w) = (-1)^{mn} x \wedge y \setminus w.$$

В частности, для любого кольцевого спектра E мы имеем умножение

$$\wedge: E_n(S^0) \otimes E_m(S^0) \rightarrow E_{n+m}(S^0 \wedge S^0) \rightarrow E_{n+m}(S^0),$$

т. е. спаривание

$$\pi_n(E) \otimes \pi_m(E) \rightarrow \pi_{n+m}(E), \quad n, m \in \mathbb{Z},$$

превращающее $\pi_*(E)$ в градуированное кольцо. Ассоциативность этого градуированного кольца следует из соотношения 13.54, i), если положить в нем $X=Y=Z=S^0$. Элемент $1 = [S^0 \xrightarrow{\quad} E] \in \pi_0(E)$ является единицей этого градуированного кольца. Если спектр E коммутативен, то $\pi_*(E)$ градуированно коммутативно, т. е. для $x \in \pi_n(E)$, $y \in \pi_m(E)$ имеет место равенство $xy = (-1)^{nm} yx$. Кроме того, для произвольного пространства X мы имеем умножения

$$\wedge: E_n(S^0) \otimes E_m(X) \rightarrow E_{n+m}(S^0 \wedge X) = E_{n+m}(X),$$

$$\wedge: E^n(S^0) \otimes E^m(X) \rightarrow E^{n+m}(S^0 \wedge X) = E^{n+m}(X),$$

превращающие $E_*(X)$ и $E^*(X)$ в градуированные (левые) модули над градуированным кольцом $\pi_*(E)$ (заметим, что $E^n(S^0) = \pi_{-n}(E)$). Аксиомы модульности следуют из предложений 13.54, i), ii) и условия на ι : $S^0 \rightarrow E$. Разумеется, точно так же можно определить и правые градуированные модули.

Исследуем теперь, как наши умножения ведут себя относительно надстроек. Оказывается, существует восемь соотношений

типа $\sigma(ab) = \sigma(a)b$ или $\sigma(ab) = a(\sigma b)$, задаваемых следующим предложением.

13.55. Предложение. Для любых спектров X, Y следующие диаграммы коммутативны с точностью до указанного знака:

$$\begin{array}{ccc} E_n(X) \otimes E_m(Y) & \xrightarrow{\sigma \otimes 1} & E_{n+1}(\Sigma X) \otimes E_m(Y) \\ \downarrow \wedge & & \downarrow \wedge \\ E_{n+m}(X \wedge Y) & \xrightarrow{\sigma} & E_{n+m+1}(\Sigma(X \wedge Y)) \cong E_{n+m+1}(\Sigma X \wedge Y), \end{array}$$

i)

$$\begin{array}{ccc} E_n(X) \otimes E_m(Y) & \xrightarrow{1 \otimes \sigma} & E_n(X) \otimes E_{m+1}(\Sigma Y) \\ \downarrow \wedge & (-1)^n & \downarrow \wedge \\ E_{n+m}(X \wedge Y) & \xrightarrow{\sigma} & E_{n+m+1}(\Sigma(X \wedge Y)) \cong E_{n+m+1}(X \wedge \Sigma Y), \end{array}$$

ii)

$$\begin{array}{ccc} E^n(X) \otimes E^m(Y) & \xleftarrow{\sigma \otimes 1} & E^{n+1}(\Sigma X) \otimes E^m(Y) \\ \downarrow \wedge & & \downarrow \wedge \\ E^{n+m}(X \wedge Y) & \xleftarrow{\sigma} & E^{n+m+1}(\Sigma(X \wedge Y)) \cong E^{n+m+1}(\Sigma X \wedge Y), \end{array}$$

iii)

$$\begin{array}{ccc} E^n(X) \otimes E^m(Y) & \xleftarrow{1 \otimes \sigma} & E^n(X) \otimes E^{m+1}(\Sigma Y) \\ \downarrow \wedge & (-1)^n & \downarrow \wedge \\ E^{n+m}(X \wedge Y) & \xleftarrow{\sigma} & E^{n+m+1}(\Sigma(X \wedge Y)) \cong E^{n+m+1}(X \wedge \Sigma Y), \end{array}$$

iv)

$$\begin{array}{ccc} E^n(X \wedge Y) \otimes E_m(Y) & \xleftarrow{\sigma \otimes 1} & E^{n+1}(\Sigma(X \wedge Y)) \otimes E_m(Y) \cong E^{n+1}(\Sigma X \wedge Y) \\ \downarrow / & & \downarrow / \\ E^{n-m}(X) & \xleftarrow{\quad} & E^{n-m+1}(\Sigma X), \end{array}$$

v)

$$\begin{array}{l}
\text{vi)} \quad \begin{array}{ccc}
E^{n+1}(\Sigma(X \wedge Y)) & \xrightarrow{1 \otimes \sigma} & E^{n+1}(\Sigma(X \wedge Y)) \otimes E_m(\Sigma Y) \cong E^{n+1}(X \wedge \Sigma Y) \\
\otimes E_{m-1}(Y) & & \otimes E_m(\Sigma Y) \\
\sigma \otimes 1 \downarrow & & \downarrow / \\
E^n(X \wedge Y) \otimes E_{m-1}(Y) & \xrightarrow{(-1)^{n+m} /} & E^{n-m+1}(X),
\end{array} \\
\\
\text{vii)} \quad \begin{array}{ccc}
E^n(\Sigma X) \otimes & \xrightarrow{1 \otimes \sigma} & E^n(\Sigma X) \otimes E_{m+1}(\Sigma(X \wedge Y)) \cong E^n(\Sigma X) \otimes \\
E_m(X \wedge Y) & & E_{m+1}(\Sigma X \wedge Y) \\
\sigma \otimes 1 \downarrow & & \downarrow \backslash \\
E^{n-1}(X) \otimes E_m(X \wedge Y) & \xrightarrow{(-1) \backslash} & E_{m-n+1}(Y),
\end{array} \\
\\
\text{viii)} \quad \begin{array}{ccc}
E^n(X) \otimes & \xrightarrow{1 \otimes \sigma} & E^n(X) \otimes E_{m+1}(\Sigma(X \wedge Y)) \cong E^n(X) \otimes E_{m+1}(X \wedge \Sigma Y) \\
E_m(X \wedge Y) & & \\
\downarrow \backslash & & \downarrow \backslash \\
E_{m-n}(Y) & \xrightarrow{\sigma} & E_{m-n+1}(\Sigma Y).
\end{array}
\end{array}$$

Доказательство. Доказательство состоит в выписывании отображений, представляющих умножения, и в проверке того, что соответствующие диаграммы гомотопически коммутативны. Например, для доказательства утверждения ii) требуется установить для любых $f: S^n \rightarrow E \wedge X$, $g: S^m \rightarrow E \wedge Y$ гомотопическую коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc}
S^{n+m+1} & \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} & \begin{array}{c} S^n \wedge \Sigma S^m \xrightarrow{f \wedge \Sigma g} (E \wedge X) \wedge \Sigma(E \wedge Y) \cong E \wedge X \wedge E \wedge \Sigma Y \xrightarrow{1 \wedge \tau \wedge 1} \\ \downarrow (-1)^n \parallel \quad \parallel \\ \Sigma(S^n \wedge S^m) \xrightarrow{\Sigma(f \wedge g)} \Sigma(E \wedge X \wedge E \wedge Y) \xrightarrow{\Sigma(1 \wedge \tau \wedge 1)} \end{array} \\
& & E \wedge E \wedge X \wedge \Sigma Y \xrightarrow{\mu \wedge 1} E \wedge X \wedge \Sigma Y \\
& & \parallel \quad \parallel \\
& & \Sigma(E \wedge E \wedge X \wedge Y) \xrightarrow{\Sigma(\mu \wedge 1)} \Sigma(E \wedge X \wedge Y)
\end{array}
\end{array}$$

(см. замечание, следующее за предложением 13.46). $\square$

$$\begin{array}{c}
E^n((X, A) \times B) \xleftarrow{\cong} E^n(X \times B \cup A \times Y, A \times Y) \xrightarrow{j^*} E^n(X \times B \cup A \times Y) \xrightarrow{\delta} E^{n+1}(X \times Y, X \times B \cup A \times Y) \\
\cong \quad \cong \\
\tilde{E}^n\left(\frac{X \times B}{A \times B}\right) \xleftarrow{\cong} \tilde{E}^n\left(\frac{X \times B \cup A \times Y}{A \times Y}\right) \xrightarrow{p^*} \tilde{E}^n(X \times B \cup A \times Y) \xleftarrow[\cong]{\sigma} \tilde{E}^{n+1}(S(X \times B \cup A \times Y^+)) \xrightarrow{k'^*} \tilde{E}^{n+1}\left(\frac{X \times Y}{X \times B \cup A \times Y}\right) \\
\cong \quad \uparrow \sigma \quad \nearrow Sp^* \\
\tilde{E}^{n+1}\left(S\left(\frac{X \times B}{A \times B}\right)\right) \cong \tilde{E}^{n+1}\left(S\left(\frac{X \times B \cup A \times Y}{A \times Y}\right)\right) \\
\cong \quad \xrightarrow{(1 \wedge k')^*} \tilde{E}^{n+1}(X/A \wedge Y/B)
\end{array}$$

Установив связи между σ и внешними умножениями, мы можем теперь изучить их поведение относительно граничных гомоморфизмов $\partial: E_n(X, A) \rightarrow E_{n-1}(A)$, $\Delta: E_n(X, A) \rightarrow E_{n-1}(A, B)$ и т. д.

Перечислим двенадцать соотношений, которые будут следовать из предложения 13.55 и естественности наших умножений сразу же, как только мы заметим, что диаграмма на с. 326 коммутативна для любых клеточных пар (X, A) и (Y, B) . Таким образом, $\Delta \cong$ является, по существу, композицией $(1 \wedge k')^* \cdot \sigma^{-1}$. Еще три таких диаграммы получаются заменой $(X, A) \times B$ на $A \times (Y, B)$ и E^* на E_* .

13.56. Предложение. Пусть (X, A) , (Y, B) — такие топологические пары, что триада $(X \times B \cup A \times Y; X \times B, A \times Y)$ вырезается относительно E . Тогда следующие диаграммы коммутативны с точностью до указанного знака:

$$\begin{array}{ccc}
 E_n(X, A) \otimes E_m(Y, B) & \xrightarrow{\partial \otimes 1} & E_{n-1}(A) \otimes E_m(Y, B) \\
 \downarrow \times & & \downarrow \times \\
 \text{i) } & & E_{n+m-1}(A \times Y, A \times B) \\
 & & \downarrow \cong \\
 E_{n+m}((X, A) \times (Y, B)) & \xrightarrow{\Delta} & E_{n+m-1}(X \times B \cup A \times Y, X \times B),
 \end{array}$$

где Δ — граничный гомоморфизм тройки $(X \times Y, X \times B \cup A \times Y, X \times B)$;

$$\begin{array}{ccc}
 E_n(X, A) \otimes E_m(Y, B) & \xrightarrow{1 \otimes \partial} & E_n(X, A) \otimes E_{m-1}(B) \\
 \downarrow \times & & \downarrow \times \\
 \text{ii) } & & (-1)^n E_{n+m-1}(X \times B, A \times B) \\
 & & \downarrow \cong \\
 E_{n+m}((X, A) \times (Y, B)) & \xrightarrow{\Delta} & E_{n+m-1}(X \times B \cup A \times Y, A \times Y),
 \end{array}$$

где Δ — граничный гомоморфизм тройки $(X \times Y, X \times B \cup A \times Y, A \times Y)$;

$$\begin{array}{ccc}
 E^n(A) \otimes E^m(Y, B) & \xrightarrow{\delta \otimes 1} & E^{n+1}(X, A) \otimes E^m(Y, B) \\
 \times \downarrow & & \downarrow \times \\
 \text{iii) } E^{n+m}(A \times Y, A \times B) & & \\
 \cong \uparrow & & \\
 E^{n+m}(X \times B \cup A \times Y, X \times B) & \xrightarrow{\Delta} & E^{n+m+1}((X, A) \times (Y, B)),
 \end{array}$$

где Δ — граничный гомоморфизм тройки $(X \times Y, X \times B \cup A \times Y, X \times B)$;

$$\begin{array}{ccc}
 E^n(X, A) \otimes E^m(B) & \xrightarrow{1 \otimes \delta} & E^n(X, A) \otimes E^{m+1}(Y, B) \\
 \times \downarrow & & \downarrow \times \\
 \text{iv) } E^{n+m}(X \times B, A \times B) & (-1)^n & \\
 \cong \uparrow & & \\
 E^{n+m}(X \times B \cup A \times Y, A \times Y) & \xrightarrow{\Delta} & E^{n+m+1}((X, A) \times (Y, B)),
 \end{array}$$

где Δ — граничный гомоморфизм тройки $(X \times Y, X \times B \cup A \times Y, A \times Y)$;

$$\begin{array}{ccc}
 E^n(X \times B \cup A \times Y, X \times B) & \xrightarrow{\Delta \otimes 1} & E^{n+1}((X, A) \times (Y, B)) \\
 \otimes E_m(Y, B) & & \otimes E_m(Y, B) \\
 \cong \otimes 1 \downarrow & & \downarrow 1 \\
 \text{v) } E^n(A \times Y, A \times B) \otimes E_m(Y, B) & & \\
 / \downarrow & & \downarrow \\
 E^{n-m}(A) & \xrightarrow{\delta} & E^{n-m+1}(X, A),
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 E^n(X \times B \cup A \times Y, A \times Y) & \xrightarrow{\Delta \otimes 1} & E^{n+1}((X, A) \times (Y, B)) \\
 \otimes E_m(Y, B) & & \otimes E_m(Y, B) \\
 \cong \otimes 1 \downarrow & & \downarrow I \\
 \text{vi) } E^n(X \times B, A \times B) \otimes E_m(Y, B) & \xrightarrow{(-1)^{n+m}} & E^{n+m+1}(X, A) \\
 1 \otimes \partial \downarrow & & \downarrow I \\
 E^n((X, A) \times B) \otimes E_{m-1}(B) & \xrightarrow{I} & E^{n-m+1}(X, A),
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 E^n(A) \otimes & 1 \otimes \Delta & \\
 E_m((X, A) \times (Y, B)) & \xrightarrow{\quad} & E^n(A) \otimes E_{m-1}(X \times B \cup A \times Y, X \times B) \\
 \delta \otimes 1 \downarrow & & \uparrow 1 \otimes \cong \\
 \text{vii) } & (-1)^* & E^n(A) \otimes E_{m-1}(A \times Y, A \times B) \\
 & & \downarrow I \\
 E^{n+1}(X, A) \otimes & \xrightarrow{\quad} & E_{m-n-1}(Y, B), \\
 E_m((X, A) \times (Y, B)) & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 E^n(X, A) \otimes & 1 \otimes \Delta & \\
 E_m((X, A) \times (Y, B)) & \xrightarrow{\quad} & E^n(X, A) \otimes E_{m-1}(X \times B \cup A \times Y, A \times Y) \\
 \downarrow \backslash & & \uparrow 1 \otimes \cong \\
 \text{viii) } & (-1)^n & E^n(X, A) \times E_{m-1}(X \times B, A \times B) \\
 & & \downarrow \backslash \\
 E_{m-n}(Y, B) & \xrightarrow{\partial} & E_{m-n-1}(B),
 \end{array}$$

ix)

$$\begin{array}{ccc}
 & i_1^* \otimes 1 \nearrow & E^n(A \times (Y, B)) \otimes E_m(Y, B) \xrightarrow{I} E^{n-m}(A) \\
 E^n(X \times Y, A \times B) \otimes E_m(Y, B) & & \downarrow \delta \\
 & i_2^* \otimes \partial \searrow & E^n((X, A) \times B) \otimes E_{m-1}(B) \xrightarrow{I} E^{n-m+1}(X, A), \\
 & & (-1)^{n+m+1}
 \end{array}$$

x)

$$\begin{array}{ccc}
 E^n(A) \otimes E_m(X \times B \cup A \times Y, X \times B) & \xrightarrow{\parallel} & E^n(A) \otimes E_m(A \times (Y, B)) \xrightarrow{\quad} E_{m-n}(Y, B) \\
 \uparrow 1 \otimes j_{1*} & & \downarrow \partial \\
 E^n(A) \otimes E_m(X \times B \cup A \times Y) & \xrightarrow{(-1)^n} & \\
 \downarrow \delta \otimes j_{2*} & & \\
 E^{n+1}(X, A) \otimes E_m(X \times B \cup A \times Y, A \times Y) & \xrightarrow{\parallel} & E^{n+1}(X, A) \otimes E_m((X, A) \times B) \xrightarrow{\quad} E_{m-n-1}(B), \\
 & & \downarrow \partial
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 & E_n(X, A) \otimes E_m(Y, B) & \\
 \partial \otimes 1 \swarrow & & \searrow 1 \otimes \partial \\
 E_{n-1}(A) \otimes E_m(Y, B) & & E_n(X, A) \otimes E_{m-1}(B) \\
 \downarrow \times & (-1)^{n+1} & \downarrow \times \\
 E_{n+m-1}(A \times (Y, B)) & & E_{n+m-1}((X, A) \times B) \\
 \searrow & & \swarrow \\
 & E_{n+m-1}(X \times Y, A \times B), &
 \end{array}$$

xi)

$$\begin{array}{ccc}
 & E^n(A) \otimes E^m(B) & \\
 \delta \otimes 1 \swarrow & & \searrow 1 \otimes \delta \\
 E^{n+1}(X, A) \otimes E^m(B) & & E^n(A) \otimes E^{m+1}(Y, B) \\
 \downarrow \times & & \downarrow \times \\
 E^{n+m+1}((X, A) \times B) & (-1)^{n+1} & E^{n+m+1}(A \times (Y, B)) \\
 \uparrow \cong & & \uparrow \cong \\
 E^{n+m+1}(X \times B \cup A \times Y, A \times Y) & & E^{n+m+1}(X \times B \cup A \times Y, X \times B) \\
 \searrow & & \swarrow \\
 & E^{n+m+1}(X \times B \cup A \times Y). &
 \end{array}$$

xii)

Доказательство. Доказательства соотношений i) — viii) почти не отличаются друг от друга; для примера установим коммутативность диаграммы vi). Мы будем считать, что (X, A) и

(Y, B) — клеточные пары; общий случай получается взятием клеточных эквивалентов. Так как $\Delta \circ \cong$ есть композиция $(1 \wedge k')^* \cdot \sigma^{-1}$, то для $u \in E^n((X, A) \times B)$, $y \in E_m(Y, B)$ мы имеем

$$\begin{aligned} \Delta u / y &= \\ (1 \wedge k')^* \sigma^{-1} u / y &= \sigma^{-1} u / k'_* y = \quad (\text{по 13.52, iii}) \\ (-1)^{n+m} u / \sigma^{-1} k'_* y &= \quad (\text{по 13.55, vi}) \\ (-1)^{n+m} u / \partial y. \end{aligned}$$

Соотношения ix) — xii) получаются из шестиугольной диаграммы 7.22 для триады $(X \times B \cup A \times Y; X \times B, A \times Y)$ и диаграмм i) — viii). $\square$

Используя внешние умножения и диагональное отображение, можно ввести внутренние умножения $\cup$ и $\cap$ аналогично тому, как это делалось для сингулярных гомологий и когомологий. Для любого пространства X определим

$$\cup: E^n(X) \otimes E^m(X) \rightarrow E^{n+m}(X),$$

полагая $\cup = \Delta^* \cdot \times$. (Заметим, что в категории спектров диагонального отображения не существует и поэтому нельзя задать умножение $\cup$ на $E^*(X)$ для произвольного спектра X .) Для топологических пар (X, A) и (X, B) мы также имеем $\cup$ -умножение

$$E^n(X, A) \otimes E^m(X, B) \xrightarrow{\times} E^{n+m}((X, A) \times (X, B)) \xrightarrow{\Delta^*} E^{n+m}(X, A \cup B),$$

где Δ представляет собой отображение

$$\Delta: (X, A \cup B) \rightarrow (X \times X, X \times B \cup A \times X) = (X, A) \times (X, B).$$

Определим теперь $\cap$ -умножение:

$$\cap: E^n(X, A) \otimes E_m(X, A \cup B) \rightarrow E_{m-n}(X, B)$$

как композицию

$$E^n(X, A) \otimes E_m(X, A \cup B) \xrightarrow{1 \otimes \Delta_*} E^n(X, A) \otimes E_m((X, A) \times (X, B)) \xrightarrow{\Delta_*} E_{m-n}(X, B).$$

Из определений и предложения 13.52 мы немедленно получаем следующие формулы естественности.

13.57. Предложение. i) Пусть $f: (X, A, B) \rightarrow (X', A', B')$ — произвольное отображение, $x \in E^n(X', A')$, $y \in E^m(X', B')$. Тогда

$$f^*(x \cup y) = f^* x \cup f^* y \in E^{n+m}(X, A \cup B).$$

ii) Пусть $f: (X, A, B) \rightarrow (X', A', B')$ — произвольное отображение, $x \in E^n(X', A')$, $y \in E_m(X, A \cup B)$. Тогда

$$x \cap f_*(y) = f_*(f^* x \cap y).$$

Из соотношений коммутативности для $\wedge$ мы получаем соотношения коммутативности для $\cup$.

13.58. Предложение. Если E — коммутативный кольцевой спектр, то для $x \in E^n(X, A)$, $y \in E^m(X, B)$ мы имеем

$$y \cup x = (-1)^{nm} x \cup y \in E^{n+m}(X, A \cup B).$$

Поведение $\cup$ -умножения относительно элемента

$$1 = [X^+ \simeq X^+ \wedge S^0 \xrightarrow{\epsilon} (\text{pt})^+ \wedge E \simeq E] \in E^0(X^+)$$

описывается следующей леммой.

13.59. Лемма. Пусть $\pi_1: X \times Y \rightarrow X$, $\pi_2: X \times Y \rightarrow Y$ — естественные проекции. Тогда для $x \in E^n(X)$, $y \in E^m(Y)$ мы имеем

$$\pi_1^*(x) = x \times 1, \quad \pi_2^*(y) = 1 \times y.$$

Доказательство тривиально.

13.60. Следствие. Для любых $x \in E^n(X, A)$, $y \in E_m(X, A)$ имеют место равенства $1 \cup x = x = x \cup 1$ и $1 \cap y = y$.

Доказательство. В самом деле, $1 \cup x = \Delta^*(1 \times x) = \Delta^* \pi_1^* x = (\pi_2 \cdot \Delta)^* x = x$, $x \cup 1 = \Delta^*(x \times 1) = \Delta^* \pi_1^* x = (\pi_1 \cdot \Delta)^* x = x$. Равенство $1 \cap y = y$ проверяется выписыванием представляющих отображений. $\square$

Соотношения ассоциативности для внешних умножений порождают большое число соотношений ассоциативности между умножениями $\times$, $/$, $\backslash$, $\cup$, $\cap$. В следующем предложении мы перечисляем те из них, которые будут использоваться в настоящей книге.

13.61. Предложение. i) Если $x \in E^n(X, A)$, $y \in E^m(X, B)$, $z \in E^p(X, C)$, то

$$(x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z) \in E^{n+m+p}(X, A \cup B \cup C).$$

ii) Если $x \in E^n(X, A)$, $x' \in E^m(X, A')$, $y \in E^p(Y, B)$, $y' \in E^q(Y, B')$ и E — коммутативный спектр, то

$$(x \cup x') \times (y \cup y') = (-1)^{mp} (x \times y) \cup (x' \times y') \in E^{n+m+p+q}((X, A \cup A') \times (Y, B \cup B')).$$

iii) Если $x \in E^n(X, A)$, $y \in E^m(X, B)$, $z \in E_p(X, A \cup B \cup C)$, то $(x \cup y) \cap z = x \cap (y \cap z) \in E_{p-m-n}(X, C)$.

iv) Если $a \in E^n((X, A) \times (Y, B))$, $y \in E^m(Y, C)$, $z \in E_p(Y, B \cup C)$, то

$$a / y \cap z = [a \cup (1 \times y)] / z \in E^{n+m-p}(X, A).$$

v) Если $a \in E^n((X, A) \times (Y, B))$, $y \in E^m(X, C)$, $z \in E_p(Y, B)$, то $y \cup (a / z) = [(y \times 1) \cup a] / z \in E^{n+m-p}(X, A \cup C)$.

vi) Если $a \in E^n((X, A) \times (Y, B))$, $y \in E_m(Y, B)$, $z \in E_p(X, A \cup C)$, то

$$(a / y) \cap z = \pi_{1*} [a \cap (z \times y)] \in E_{p+m-n}(X, C),$$

где $\pi_1: X \times Y \rightarrow X$ — проекция на первый множитель.

Доказательство. Утверждения i) и ii) очевидны. Для утверждения iii) мы имеем

$$\begin{aligned} x \cap (y \cap z) &= x \setminus \Delta_* (y \cap z) = x \setminus \Delta_* (y \setminus \Delta_* z) = \\ &= x \setminus (y \setminus (1 \times \Delta)_* \Delta_* z) = \quad (\text{по 13.52}) \\ \tau^* (x \times y) \setminus (\Delta \times 1)_* \Delta_* z &= \quad (\text{по 13.54}) \\ \Delta^* \tau^* (x \times y) \setminus \Delta_* z &= \quad (\text{по 13.52}) \\ \Delta^* (x \times y) \setminus \Delta_* z &= \quad (\tau \cdot \Delta = \Delta) \\ (x \cup y) \cap z. \end{aligned}$$

Для утверждения iv) имеем

$$\begin{aligned} [a \cup (1 \times y)] / z &= [\Delta_{X \times Y}^* (1 \times \pi_1^*) (a \times y)] / z = \\ &= [(1 \times \Delta_Y)^* (a \times y)] / z = a \times y / \Delta_{Y*} (z) = \\ &= (a \times y) / \tau_* \Delta_{Y*} z = [(1 \times \tau)^* (a \times y)] / \Delta_* z = \\ &= a / (y \setminus \Delta_* z) = \quad (\text{по 13.54}) \\ &= a / y \cap z. \end{aligned}$$

Доказательство утверждений v) и vi) оставляем читателю в качестве упражнения. $\square$

Связь между умножениями $\cup$ и $\cap$ и граничными гомоморфизмами может быть получена из предложения 13.56.

Кроме перечисленных умножений в дальнейшем нам понадобится еще одно — так называемое *умножение Кронекера*

$$\langle , \rangle: E^n(X) \otimes E_m(X) \rightarrow \tilde{E}_{m-n}(S^0) = \pi_{m-n}(E).$$

Оно определяется следующим образом. Если заданы $x \in E^n(X)$, $y \in E_m(X)$, то мы можем рассматривать x как элемент группы $E^n(S^0 \wedge X)$ или же y — как элемент группы $E_m(X \wedge S^0)$. Положим тогда

$$\langle x, y \rangle = x / y = x \setminus y \in \tilde{E}_{m-n}(S^0).$$

Если элементы x и y заданы своими представителями $f: X \rightarrow \Sigma^n E$, $g: S^m \rightarrow E \wedge X$, то $\langle x, y \rangle$ представляется композицией

$$S^{m-n} \xrightarrow{\Sigma^{-n}g} \Sigma^{-n}E \wedge X \xrightarrow{\tau} X \wedge \Sigma^{-n}E \xrightarrow{f \wedge 1} \Sigma^n E \wedge \Sigma^{-n}E \xrightarrow{\mu} E.$$

(В теории сингулярных гомологий умножение Кронекера может быть определено как отображение вычисления представляющего коцикла на представляющем цикле.) Умножение $\langle , \rangle$ обладает следующими очевидными свойствами естественности и ассоциативности.

13.62. Предложение. i) Если $f: X \rightarrow X'$ — произвольное отображение, $x \in E^n(X')$ и $y \in E_m(X)$, то

$$\langle x, f_* y \rangle = \langle f^* x, y \rangle.$$

ii) Если $a \in E^n(X \wedge Y)$, $y \in E_m(Y)$, $x \in E_p(X)$, то

$$\langle a / y, x \rangle = \langle a, \tau(y \wedge x) \rangle \in \pi_{m+p-n}(E).$$

iii) Если $y \in E^n(Y)$, $x \in E^m(X)$, $a \in E_p(X \wedge Y)$, то

$$\langle y, x \wedge a \rangle = \langle \tau^*(y \wedge x), a \rangle \in \pi_{p-n-m}(E).$$

iv) Если $y \in E^n(X, B)$, $x \in E^m(X, A)$, $z \in E_p(X, A \cup B)$, то

$$\langle y, x \cap z \rangle = \langle y \cup x, z \rangle \in \pi_{p-n-m}(E).$$

v) Если $x \in E^n(X)$, $y \in E^m(Y)$, $a \in E_p(X)$, $b \in E_q(Y)$, то

$$\langle x \wedge y, a \wedge b \rangle = (-1)^{mp} \langle x, a \rangle \langle y, b \rangle.$$

vi) Если $1 \in E^0(X)$, $y \in E^n(Y)$, $a \in E_m(Y)$, то

$$(1 \times y) / a = \langle y, a \rangle \cdot 1 \in E^{m-n}(X).$$

13.63. Из соотношений ассоциативности для $\cup$ и $\cap$ и из следствия 13.60 следует, что $\cup$ -умножение определяет на $E^*(X, A)$ структуру градуированного кольца для всех топологических пар (X, A) , а также структуру градуированного $E^*(X)$ -модуля на $E^*(X, A)$. Умножение $\cap$ определяет на $E_*(X, A)$ структуру градуированного $E^*(X)$ -модуля. В действительности мы имеем больше: $E^*(X, A)$ является не только градуированным кольцом, но даже *градуированной алгеброй* над градуированным кольцом $\pi_*(E) = \tilde{E}^*(S^0)$. Другими словами, $\cup$ индуцирует отображение

$$\cup: E^*(X, A) \otimes E^*(X, A) \rightarrow E^*(X, A),$$

которое является гомоморфизмом градуированных $\pi_*(E)$ -модулей. Кроме того, эти кольцевые и модульные структуры естественны относительно отображений $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$. Таким образом, нам удалось обогатить естественную структуру на $E^*(X, A)$, а это, как указывалось выше, является одной из главнейших внутренних задач алгебраической топологии. Сейчас мы продемонстрируем, какую пользу приносят эти более богатые структуры.

13.64. Пример. Пусть $X = S^2 \times S^3$, $Y = S^2 \vee S^3 \vee S^5$. Оба пространства X и Y имеют клеточные структуры с одной нульмерной, одной двумерной, одной трехмерной и одной пятимерной клетками. Для произвольной абелевой группы G мы имеем

$$H^q(X; G) = H^q(S^2 \times S^3; G) \cong \begin{cases} G, & q = 0, 2, 3, 5, \\ 0, & q \neq 0, 2, 3, 5 \end{cases}$$

(здесь мы воспользовались теоремой об универсальных коэффициентах и теоремой Кюннета). Когомологии пространства Y под-

считываются непосредственно:

$$H^q(Y; G) \cong \begin{cases} G, & q=0, 2, 3, 5, \\ 0, & q \neq 0, 2, 3, 5. \end{cases}$$

Таким образом, группы когомологий не различают пространств X и Y . Совсем иначе ведут себя кольца когомологий $H^*(X; \mathbb{Z})$, $H^*(Y; \mathbb{Z})$. Пусть $g_i \in H^i(S^i; \mathbb{Z})$ — образующая, $\pi_1: X \rightarrow S^2$, $\pi_2: X \rightarrow S^3$ — естественные проекции и $x = \pi_1^* g_2 \in H^2(X; \mathbb{Z})$, $y = \pi_2^* g_3 \in H^3(X; \mathbb{Z})$. Тогда

$$x \cup y = \pi_1^* g_2 \cup \pi_2^* g_3 = (g_2 \times 1) \cup (1 \times g_3) = (g_2 \cup 1) \times (1 \cup g_3) = g_2 \times g_3.$$

Но по когомологической теореме Кюннета гомоморфизм

$$\times: H^*(S^2; \mathbb{Z}) \otimes H^*(S^3; \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(X; \mathbb{Z})$$

является изоморфизмом. Следовательно,

$$x \cup y = g_2 \times g_3 \neq 0.$$

Пусть теперь $i: S^5 \rightarrow Y$ — вложение и $\pi: Y \rightarrow S^5$ — проекция ($Y/Y^4 \cong S^5$). Так как $\pi \circ i = 1_{S^5}$, то

$$i^*: H^5(Y; \mathbb{Z}) \rightarrow H^5(S^5; \mathbb{Z})$$

— эпиморфизм и, значит, изоморфизм. Но поскольку для любого $x \in H^2(Y; \mathbb{Z})$ обязательно

$$i^*(x) \in H^2(S^5; \mathbb{Z}) = 0,$$

то для $x \in H^2(Y; \mathbb{Z})$, $y \in H^3(Y; \mathbb{Z})$ имеем

$$i^*(x \cup y) = i^*(x) \cup i^*(y) = 0.$$

Следовательно, $x \cup y = 0$, т. е. кольцо $\tilde{H}^*(Y; \mathbb{Z})$ не имеет нетривиальных произведений. Таким образом, кольца $H^*(X; \mathbb{Z})$ и $H^*(Y; \mathbb{Z})$ не изоморфны, и, значит, $S^2 \times S^3 \not\cong S^2 \vee S^3 \vee S^5$.

Так как $\tilde{H}^*(S^n; R) = \tilde{H}^n(S^n; R)$ и для любых $x, y \in H^n(S^n; R)$ мы имеем

$$x \cup y \in \tilde{H}^{2n}(S^n; R) = 0,$$

то $\tilde{H}^*(S^n; R)$ имеет тривиальную кольцевую структуру для всех $n > 0$ и любых колец R . В то же время, совсем не очевидно, справедлив ли этот факт для произвольного кольцевого спектра E . Сейчас мы покажем, что $\tilde{E}^*(SX)$ имеет тривиальную кольцевую структуру для всех пространств X .

13.65. Предложение. Пусть $X = A \cup B$, где оба подпространства A и B стягиваемы по себе в точку $x_0 \in A \cap B$. Тогда для всех $x, y \in \tilde{E}^*(X) = E^*(X, \{x_0\})$ имеет место равенство $x \cup y = 0$.

Доказательство. Пусть

$$i_A: (X, \{x_0\}) \rightarrow (X, A), \quad i_B: (X, \{x_0\}) \rightarrow (X, B)$$

и $i: (X, \{x_0\}) \rightarrow (X, X)$ — очевидные включения. Тогда

$$i_A^*: E^*(X, A) \rightarrow \hat{E}^*(X) \quad \text{и} \quad i_B^*: E^*(X, B) \rightarrow \hat{E}^*(X)$$

являются изоморфизмами. Следовательно, найдутся такие элементы $x' \in E^*(X, A)$, $y' \in E^*(X, B)$, что $i_A^*(x') = x$, $i_B^*(y') = y$. Таким образом,

$$x \cup y = i_A^*(x') \cup i_B^*(y') = i^*(x' \cup y'),$$

но $x' \cup y' \in E^*(X, A \cup B) = E^*(X, X) = 0$. $\square$

13.66. Следствие. $\hat{E}^*(SX)$ имеет тривиальную кольцевую структуру.

Доказательство. $SX = C^+X \cup C^-X$ и конусы C^+X , C^-X стягиваемы. $\square$

Аналогичные рассуждения показывают, что если X — конечномерное клеточное пространство, то все элементы из $\hat{E}^*(X)$ нильпотентны.

13.67. Предложение. Пусть X — клеточное пространство с r -мерным остовом X^r и $F^r E^*(X) = \ker [E^*(X) \rightarrow E^*(X^{r-1})]$. Тогда для любых $a \in F^p E^*(X)$, $b \in F^q E^*(X)$ имеет место включение

$$a \cup b \in F^{p+q} E^*(X).$$

Доказательство. Пусть

$$j_1: X \rightarrow (X, X^{p-1}), \quad j_2: X \rightarrow (X, X^{q-1}),$$

$$j_3: X \rightarrow (X, X^{p+q-1})$$

— вложения. Тогда элемент a может быть записан в виде $a = j_1^*(a')$ для некоторого $a' \in E^*(X, X^{p-1})$ и, аналогично, $b = j_2^*(b')$ для некоторого $b' \in E^*(X, X^{q-1})$. Мы имеем гомотопически коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Delta} & X \times X \\ \downarrow j_3 & & \downarrow j_1 \times j_2 \\ (X, X^{p+q-1}) & \xrightarrow{\Delta'} & (X \times X, (X \times X)^{p+q-1}) \subset (X \times X, X \times X^{q-1} \cup X^{p-1} \times X), \end{array}$$

где Δ' — клеточное отображение, гомотопное диагонали $(X, X^{p+q-1}) \rightarrow (X \times X, X^{p+q-1} \times X^{p+q-1})$, см. предложение 6.35. Таким образом,

$$a \cup b = \Delta^*(a \times b) = \Delta^*(j_1 \times j_2)^*(a' \times b') = j_3^* \Delta'^*(a' \times b'),$$

т. е. $a \cup b \in F^{p+q} E^*(X)$. $\square$

13.68. Следствие. Если X — линейно связное клеточное пространство размерности n , то для всех $a \in \tilde{E}^*(X)$ выполнено соотношение $a^{n+1} = 0$.

Доказательство. Можно считать, что $X^0 = \{x_0\}$. Тогда $\tilde{E}^*(X) = E^*(X, \{x_0\}) = F^1 E^*(X)$. Следовательно, для любого $a \in \tilde{E}^*(X)$ мы имеем

$$a^{n+1} \in F^{n+1} E^*(X) = \ker [E^*(X) \rightarrow E^*(X^n)] = \ker [E^*(X) \rightarrow E^*(X)] = 0. \quad \square$$

13.69. До настоящего времени мы говорили только о кольцевой структуре на $E^*(X)$ (где X — некоторое топологическое пространство). Попытка определить таким же образом кольцевую структуру на $E_*(X)$ наталкивается на очевидное препятствие: в гомологиях отображение диагонали $\Delta: X \rightarrow X \times X$ действует не в том направлении. Чтобы такое определение оказалось возможным, необходимо иметь отображение $X \times X \rightarrow X$. Таким образом, хотя для произвольного X на $E_*(X)$ никакой кольцевой структуры не существует, в случае, когда X является H -группой с умножением $\mu: X \times X \rightarrow X$, а E — кольцевой спектр, мы получаем *умножение Понтрягина*

$$E_n(X) \otimes E_m(X) \xrightarrow{\mu_*} E_{n+m}(X \times X) \xrightarrow{\mu_*} E_{n+m}(X),$$

которое превращает $E_*(X)$ в градуированное кольцо и даже в градуированную алгебру над $\pi_*(E)$. Например, классифицирующие пространства BG для классических групп Ли $G = O, SO, Spin, U, SU, Sp$ имеют структуру H -группы, индуцированную суммой Уитни в $k_G = [-; BG]$. Следовательно, $E_*(BG)$ является кольцом Понтрягина. Более подробно мы рассмотрим эти кольца в главе 16.

Аналогично, для любого кольцевого спектра F с умножением $\mu: F \wedge F \rightarrow F$ мы имеем умножение Понтрягина

$$E_n(F) \otimes E_m(F) \xrightarrow{\Delta} E_{n+m}(F \wedge F) \xrightarrow{\mu_*} E_{n+m}(F).$$

13.70. Замечание. Можно определить абстрактное понятие *мультипликативных* теорий гомологий и когомологий. Например, теория гомологий h_* на $\mathcal{SP}'$ называется мультипликативной теорией гомологий, если для любых $n, m \in \mathbb{Z}$, $X, Y \in \mathcal{SP}$ существуют естественное преобразование

$$\wedge: h_n(X) \otimes h_m(Y) \rightarrow h_{n+m}(X \wedge Y),$$

удовлетворяющее условиям 13.54, i), 13.55, i), ii), и такой элемент $1 \in h_0(S^0)$, что для любого $x \in h_n(X)$ спаривание

$$h_0(S^0) \otimes h_n(X) \xrightarrow{\wedge} h_n(S^0 \wedge X) \cong h_n(X)$$

отображает $1 \otimes x$ в x . Определение для теории когомологий h^* аналогично.

13.71. Упражнение. Пусть h^* — мультипликативная теория когомологий и $T: E^* \rightarrow h^*$ — естественная эквивалентность на $\mathcal{SF}'$. Показать, что спектр E обладает умножением $\mu: E \wedge E \rightarrow E$ и единицей $\iota: S^0 \rightarrow E$, индуцирующими на h^* данное умножение.

Возможно, у читателя уже возник вопрос: переносятся ли теорема об универсальных коэффициентах и теорема Кюннета на произвольные теории E_* и E^* ? И хотя такой перенос возможен, в общем случае аналоги указанных теорем формулируются в терминах спектральных последовательностей. Мы рекомендуем интересующемуся читателю вначале прочесть главу 15, а затем познакомиться с этими теоремами по книгам [6] или [8]. Здесь же мы рассмотрим лишь наиболее важный для приложений частный случай, в котором теорема Кюннета сводится к изоморфизму.

13.72. Пусть R — кольцо с единицей 1, M — правый R -модуль и N — левый R -модуль. Определим *тензорное произведение* $M \otimes_R N$ этих модулей над кольцом R . С этой целью выделим в тензорном произведении $M \otimes N$ (здесь M и N рассматриваются как абелевы группы) подгруппу K , порожденную всеми элементами вида $mr \otimes n - m \otimes rn$ для $m \in M$, $r \in R$, $n \in N$, и положим

$$M \otimes_R N = M \otimes N / K.$$

Таким образом, мы имеем точную последовательность

$$M \otimes R \otimes N \xrightarrow{\alpha_M \otimes 1 - 1 \otimes \alpha_N} M \otimes N \rightarrow M \otimes_R N \rightarrow 0,$$

где $\alpha_M: M \otimes R \rightarrow M$, $\alpha_N: R \otimes N \rightarrow N$ — отображения, задающие на M и N структуры R -модулей. На неформальном уровне $M \otimes_R N$ получается из $M \otimes N$ добавлением соотношения $mr \otimes n = m \otimes rn$.

Упражнение. Показать, что $M \otimes_R R \cong M$, $R \otimes_R N \cong N$.

Из соотношений ассоциативности для $\wedge$ и $\langle, \rangle$ вытекает, что $\wedge$ и $\langle, \rangle$ индуцируют гомоморфизмы

$$\wedge: E_n(X) \otimes_{\check{E}_*(S^0)} E_m(Y) \rightarrow E_{n+m}(X \wedge Y),$$

$$\wedge: E^n(X) \otimes_{\check{E}^*(S^0)} E^m(Y) \rightarrow E^{n+m}(X \wedge Y),$$

$$\langle, \rangle: E^n(X) \otimes_{\pi_*(E)} E_m(X) \rightarrow \check{E}_{m-n}(S^0) = \pi_{m-n}(E).$$

Займемся отысканием достаточных условий, при которых отображения $\wedge$ и $\langle, \rangle$ являются изоморфизмами.

13.73. Определение. Левый R -модуль N называется *плоским*, если для любой точной последовательности

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

правых R -модулей последовательность

$$0 \rightarrow A \otimes_R N \rightarrow B \otimes_R N \rightarrow C \otimes_R N \rightarrow 0$$

также точна. Аналогично определяется плоский правый R -модуль.

13.74. Упражнение. Показать, что каждый свободный R -модуль является плоским.

13.75. Теорема. Пусть E — кольцевой спектр и X, Y — произвольные спектры

i) Предположим, что либо $E_*(X)$ — плоский правый $\tilde{E}_*(S^0)$ -модуль, либо $E_*(Y)$ — плоский левый $\tilde{E}_*(S^0)$ -модуль. Тогда

$$\wedge: E_*(X) \otimes_{\tilde{E}_*(S^0)} E_*(Y) \rightarrow E_*(X \wedge Y)$$

— изоморфизм.

ii) Предположим, что либо $E^*(X)$ — конечно порожденный свободный правый $\tilde{E}^*(S^0)$ -модуль, либо $E^*(Y)$ — конечно порожденный свободный левый $\tilde{E}^*(S^0)$ -модуль. Тогда

$$\wedge: E^*(X) \otimes_{\tilde{E}^*(S^0)} E^*(Y) \rightarrow E^*(X \wedge Y)$$

— изоморфизм.

[В главе 17 нам понадобится следующее утверждение: если $\pi_*(X \wedge E)$ является плоским правым $\pi_*(E)$ -модулем, то

$$\wedge: \pi_*(X \wedge E) \otimes_{\pi_*(E)} \pi_*(E \wedge Y) \rightarrow \pi_*(X \wedge E \wedge Y)$$

— изоморфизм. Доказывается оно в точности так же, как утверждение i) настоящей теоремы.]

Доказательство. i) Для определенности будем считать, что $E_*(Y)$ является плоским левым $\tilde{E}_*(S^0)$ -модулем; случай плоского правого $\tilde{E}_*(S^0)$ -модуля $E_*(X)$ рассматривается аналогично. Таким образом, пространство Y предполагается фиксированным, а X — переменным. Мы имеем два функтора

$$F_1 = E_*(-) \otimes_{\tilde{E}_*(S^0)} E_*(Y) \quad \text{и} \quad F_2 = E_*(- \wedge Y)$$

из категории $\mathcal{S}\mathcal{F}'$ в категорию градуированных абелевых групп. Оба этих функтора удовлетворяют аксиомам теории гомологий на $\mathcal{S}\mathcal{F}'$: F_1 точен на корасслоениях потому, что $E_*(Y)$ — плоский модуль, а F_2 — потому, что если $A \rightarrow B \rightarrow C$ — корасслоение, то $A \wedge Y \rightarrow B \wedge Y \rightarrow C \wedge Y$ — также корасслоение (13.47). Имеют место естественные эквивалентности степени 1

$$E_*(X) \otimes_{\tilde{E}_*(S^0)} E_*(Y) \xrightarrow{\sigma \otimes 1} E_*(\Sigma X) \otimes_{\tilde{E}_*(S^0)} E_*(Y)$$

и

$$E_*(X \wedge Y) \xrightarrow{\sigma} E_*(\Sigma(X \wedge Y)) \cong E_*(\Sigma X \wedge Y).$$

Функтор F_1 удовлетворяет аксиоме суммы потому, что $\otimes_R$ коммутирует с прямыми суммами и E_* — теория гомологий. Функтор F_2 удовлетворяет аксиоме суммы в силу соотношения $(\bigvee_{\alpha} X_{\alpha}) \wedge Y \simeq \bigvee_{\alpha} (X_{\alpha} \wedge Y)$ (13.48). Отображение $\wedge$ является естественным преобразованием $F_1 \rightarrow F_2$ теорий гомологий; очевидно, что $\wedge: F_1(S^0) \rightarrow F_2(S^0)$ — изоморфизм. Таким образом, по теореме 7.55 $\wedge$ — естественная эквивалентность.

ii) Рассуждения для теорий когомологий те же самые, что в i), за исключением того, что $\otimes_R$ в общем случае не коммутирует с прямыми произведениями. Поэтому мы предполагаем, что $E^*(Y)$ (или $E^*(X)$) является конечно порожденным свободным R -модулем (т. е. прямой суммой конечного числа экземпляров $R = \pi_*(E)$). Это гарантирует выполнение аксиомы суммы. $\square$

13.76. Пример. Пусть F — поле. Тогда $H_*(X; F)$ — плоский модуль над $\tilde{H}_*(S^0; F) \cong F$, и, следовательно, для любых X, Y имеет место изоморфизм

$$\tilde{H}_*(X; F) \otimes_F \tilde{H}_*(Y; F) \xrightarrow{\sim} \tilde{H}_*(X \wedge Y; F).$$

Аналогичный изоморфизм существует и для относительных групп:

$$H_*(X, A; F) \otimes_F H_*(Y, B; F) \xrightarrow{\sim} H_*((X, A) \times (Y, B); F).$$

Для когомологий требуется предположить дополнительно, что $H^*(X, A; F)$ или $H^*(Y, B; F)$ — конечномерное градуированное векторное пространство над полем F (на самом деле достаточно, чтобы были конечномерными все векторные пространства $H^n(X, A; F)$, $n \in \mathbb{Z}$).

Рассмотрим теперь умножение

$$\langle, \rangle: E^n(X) \otimes_{\pi_*(E)} E_m(X) \rightarrow \pi_{m-n}(E).$$

Оно индуцирует гомоморфизм

$$\kappa: E^n(X) \rightarrow \text{Hom}_{\pi_*(E)}^{-n}(E_*(X), \pi_*(E)),$$

где для градуированных R -модулей A_*, B_* символом $\text{Hom}_R^r(A_*, B_*)$ обозначается группа всех R -гомоморфизмов $\phi: A_* \rightarrow B_*$ степени r ($\phi(A_q) \subset B_{q+r}$ для всех $q \in \mathbb{Z}$). Точная формула для κ имеет вид

$$[\kappa(x)](y) = \langle x, y \rangle, \quad x \in E^n(X), \quad y \in E_m(X).$$

Как и прежде, естественно спросить, в каких случаях κ будет изоморфизмом. Из теоремы Адамса об универсальных коэффициентах [8] следует, что эта ситуация имеет место, если $E_*(X)$ — свободный $\pi_*(E)$ -модуль. Для $X = S^0$ результат очевиден. Если же $E_*(X) \cong E_*(S^0)$ и данный изоморфизм является в некотором смысле естественным (хотя, возможно, имеющим степень, отличную от 0), то соответствующий результат верен и для пространства X . В главе 16 мы встретимся с другими ситуациями, в которых

$$E^*(X) \rightarrow \text{Hom}_{\pi_*(E)}^*(E_*(X), \pi_*(E))$$

— изоморфизм.

13.77. Упражнение. Пусть R — кольцо, M — правый R -модуль и A — абелева группа. Показать, что существует естественный изоморфизм

$$\theta: \text{Hom}_R(A \otimes R, M) \rightarrow \text{Hom}(A, M),$$

задаваемый формулой $\theta(\phi) = \phi'$, где $\phi'(a) = \phi(a \otimes 1)$ для $\phi \in \text{Hom}_R(A \otimes R, M)$, $a \in A$. Таким образом, для поля F и топологической пары (X, A) мы имеем

$$\begin{aligned} S^n(X, A; F) &= \text{Hom}(S_n(X, A), F) \cong \text{Hom}_F(S_n(X, A) \otimes F, F) = \\ &= (S_n(X, A) \otimes F)^* = \{\text{векторное пространство, двойственное} \\ &\quad \text{к } S_n(X, A) \otimes F\}. \end{aligned}$$

Граничный гомоморфизм $d: S^n(X, A; F) \rightarrow S^{n+1}(X, A; F)$ является двойственным к гомоморфизму $d \otimes 1: S_{n+1}(X, A) \otimes F \rightarrow S_n(X, A) \otimes F$. Следовательно, $H^n(X, A; F) \cong H_n(X, A; F)^*$, и этот изоморфизм есть в точности изоморфизм

$$k: H^*(X, A; F) \rightarrow \text{Hom}_F(H_*(X, A; F), F),$$

описанный выше.

В п. 7.39 мы определили для всех приведенных теорий гомологий k_* с выделенным элементом $\iota_0 \in k_0(S^0)$ гомоморфизм Гуревича

$$h: \pi_n(Y, y_0) \rightarrow k_n(Y).$$

В частности, если E — кольцевой спектр с единицей $\iota: S^0 \rightarrow E$, то мы имеем элемент

$$\iota_0 = [\iota] \in \pi_0(E) = E_0(S^0).$$

В этом случае гомоморфизм Гуревича h совпадает с композицией

$$\pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n^S(X) \xrightarrow{(\iota \wedge 1)_*} \pi_n(E \wedge X) = E_n(X).$$

Более общо, если F — еще один произвольный спектр, то можно определить гомоморфизм Гуревича

$$\begin{aligned} F_n(X) = \pi_n(F \wedge X) &\cong \pi_n(S^0 \wedge F \wedge X) \xrightarrow{(\iota \wedge 1 \wedge 1)_*} \\ &\pi_n(E \wedge F \wedge X) = (E \wedge F)_n(X). \end{aligned}$$

Обозначим этот гомоморфизм через H . Если, в добавление ко всему, $E_*(F)$ является плоским $\pi_*(E)$ -модулем, то по теореме 13.75 имеет место изоморфизм

$$\pi_*(E \wedge F) \otimes_{\pi_*(E)} \pi_*(E \wedge X) \rightarrow \pi_*(E \wedge F \wedge X).$$

Таким образом, в этом случае H можно рассматривать как гомоморфизм

$$F_*(X) \xrightarrow{H} E_*(F) \otimes_{E_*(S^0)} E_*(X).$$

Двойственным к H (см. пример 13.76) является гомоморфизм Бордмана B :

$$\begin{aligned} F^n(X) = [X, \Sigma^n F] &= [X, \Sigma^n(S^0 \wedge F)] \xrightarrow{\Sigma^n(\iota \wedge 1)_*} \\ &[X, \Sigma^n(E \wedge F)] = (E \wedge F)^n(X). \end{aligned}$$

Определим гомоморфизмы

$$\alpha: F^n(X) \rightarrow \text{Hom}_{\tilde{E}_*(S^0)}^{-n}(E_*(X), E_*(F))$$

и

$$\tau: (E \wedge F)^n(X) \rightarrow \text{Hom}_{\tilde{E}_*(S^0)}^{-n}(E_*(X), E_*(F)),$$

полагая

$$\alpha[f] = \sigma^n f_*: E_*(X) \rightarrow E_*(F)$$

для $f: X \rightarrow \Sigma^n F$ и

$$(\tau[g])[h] = [S^{q-n} \xrightarrow{\Sigma^{-n} h} \Sigma^{-n} E \wedge X \xrightarrow{! \Delta} \Sigma^{-n} E \wedge \Sigma^n E \wedge F \xrightarrow{! \Delta} E \wedge F]$$

для $h: S^q \rightarrow E \wedge X$, $g: X \rightarrow \Sigma^n(E \wedge F)$. Тогда имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & B & \\ & \nearrow & \\ F^n(X) & & (E \wedge F)^n(X) \\ & \searrow \alpha & \downarrow \tau \\ & & \text{Hom}_{\tilde{E}_*(S^0)}^{-n}(E_*(X), E_*(F)). \end{array}$$

Если $E_*(X)$ — свободный $E_*(S^0)$ -модуль с конечным числом образующих в каждой размерности, то мы имеем изоморфизм

$$\text{Hom}_{\tilde{E}_*(S^0)}^*(E_*(X), E_*(F)) \cong (E_*(X))^* \hat{\otimes}_{\tilde{E}_*(S^0)} E_*(F)$$

модуля $\text{Hom}_{\tilde{E}_*(S^0)}^*(E_*(X), E_*(F))$ с пополненным тензорным произведением модулей $(E_*(X))^* = \text{Hom}_{\tilde{E}_*(S^0)}^*(E_*(X), \tilde{E}_*(S^0))$ и $E_*(F)$ ($A \hat{\otimes} B$ означает, в сущности, что мы допускаем бесконечные суммы $\sum_i a_i \otimes b_i$). Заявляя, что гомоморфизмы H и B двойственны друг другу, мы понимаем под этим следующее.

13.78. Теорема. Для любых кольцевых спектров E , F и произвольного спектра X коммутативна следующая диаграмма

$$\begin{array}{ccc} F^n(X) \otimes F_m(X) & \xrightarrow{\langle, \rangle} & \pi_{m-n}(F) \\ \downarrow B \otimes H & & \downarrow H \\ (E \wedge F)^n(X) \otimes (E \wedge F)_m(X) & \xrightarrow{\langle, \rangle} & \pi_{m-n}(E \wedge F). \end{array}$$

Если заменить в ней B гомоморфизмом α и если модуль $E_*(F)$ плоский, то она принимает вид

$$\begin{array}{ccc} F^n(X) \otimes F_m(X) & \xrightarrow{\langle, \rangle} & \pi_{m-n}(F) \\ \downarrow \alpha \otimes H & & \downarrow H \\ \text{Hom}_{\tilde{E}_*(S_0)}^n(E_*(X), E_*(F)) \otimes E_*(F) \otimes_{\tilde{E}_*(S_0)} E_*(X) & \xrightarrow{\kappa} & E_{m-n}(F), \end{array}$$

где κ задается формулой $\kappa(\phi \otimes f \otimes x) = \phi(x) \cdot f$ для $f \in E_q(F)$, $x \in E_{m-q}(X)$ и $\phi \in \text{Hom}_{\tilde{E}_*(S_0)}^n(E_*(X), E_*(F))$ (здесь $\cdot$ означает умножение Понтрягина в $E_*(F)$).

Доказательство. Оба гомоморфизма B и H являются естественными преобразованиями теорий гомологий и когомологий соответственно, индуцированными отображением представляющих спектров (а именно, отображением $\iota \wedge 1: F \rightarrow E \wedge F$). Кроме того, умножение $\langle, \rangle$ естественно. Отсюда следует коммутативность первой диаграммы. Что же касается второй диаграммы — все что нужно, это проверить равенство

$$\kappa \cdot (\tau \otimes (\wedge)^{-1}) = \langle, \rangle. \square$$

В главах 17 и 19 читатель найдет различные применения отображений Гуревича и Бордмана.

Мы завершим эту главу построением умножений $\mu: E \wedge E \rightarrow E$ в спектрах $E = H(R)$, где R — кольцо, $E = K$, KO и $E = MG$, где G — одна из серий классических групп Ли.

13.79. Начнем наше построение со спектра $H(R)$, где R — произвольное кольцо. Пусть

$$g_n = [1] \in [H(R, n), *, H(R, n), *] \cong \tilde{H}^n(H(R, n); R).$$

Тогда мы имеем элемент

$$g_n \wedge g_m \in \tilde{H}^{n+m}(H(R, n) \wedge H(R, m); R),$$

который представляется отображением

$$\bar{\mu}_{nm}: H(R, n) \wedge H(R, m) \rightarrow H(R, n+m).$$

Очевидно, что отображения $\bar{\mu}_{nm}$ удовлетворяют соотношениям гомотопической ассоциативности и коммутативности. Следующее предложение доставляет нам метод, позволяющий построить из этих отображений отображение спектров

$$\mu: H(R) \wedge H(R) \rightarrow H(R).$$

13.80. Предложение. Пусть E — спектр и $\iota_n: S^n \rightarrow E_n$, $\bar{\mu}_{nm}: E_n \wedge E_m \rightarrow E_{n+m}$ — система таких отображений, что для всех m, n и p коммутативны следующие диаграммы:

13.81.

$$\begin{array}{ccc}
 S^1 \wedge S^n & \xrightarrow{1 \wedge \bar{t}_n} & S^1 \wedge E_n \\
 \parallel & & \downarrow \varepsilon_{1,n} \\
 S^{n+1} & \xrightarrow{\bar{t}_{n+1}} & E_{n+1},
 \end{array}$$

13.82.

$$\begin{array}{ccccc}
 S^n \wedge E_m & \xrightarrow{\bar{t}_n \wedge 1} & E_n \wedge E_m & \xleftarrow{1 \wedge \bar{t}_m} & E_n \wedge S^m \\
 & \searrow \varepsilon_{nm} & \downarrow \bar{\mu}_{nm} & & \uparrow \tau' \\
 & & E_{n+m} & \xleftarrow{\varepsilon_{mn}} & S^m \wedge E_n,
 \end{array}$$

13.83.

$$\tau'[t, x] = [x, v'^{nm}(t)],$$

$$\begin{array}{ccc}
 E_n \wedge E_m \wedge E_p & \xrightarrow{1 \wedge \bar{\mu}_{mp}} & E_n \wedge E_{m+p} \\
 \downarrow \bar{\mu}_{nm} \wedge 1 & & \downarrow \bar{\mu}_{n, m+p} \\
 E_{n+m} \wedge E_p & \xrightarrow{\bar{\mu}_{n+m, p}} & E_{n+m+p},
 \end{array}$$

где $\varepsilon_{nm}: S^n \wedge E_m \rightarrow E_{n+m}$ — вложения. Предположим, далее, что

$$\begin{aligned}
 \lim^1 \tilde{E}^{n-1}(E_n) &= \lim^1 \tilde{E}^{\alpha(a)-1}(E_{\beta(a)} \wedge E_{\gamma(a)}) = \\
 \lim^1 \tilde{E}^{\alpha(a)-1}(E_{\beta(a)} \wedge E_{\gamma(a)} \wedge E_{\delta(a)}) &= 0
 \end{aligned}$$

для любых разбиений $A = B \cup C$ или $A = B \cup C \cup D$. Тогда для каждого разбиения $A = B \cup C$ с бесконечными B и C существуют такие отображения $\iota: S^0 \rightarrow E$ и $\mu_{BC}: E \wedge E \rightarrow E$, что гомотопический класс $[\mu] = [\mu_{BC}]$ не зависит от B, C и диаграммы

$$\begin{array}{ccccc}
 S^n \subset \Sigma^n S^0 & E_{\beta(a)} \wedge E_{\gamma(a)} \subset \Sigma^{\alpha(a)}(E \wedge_{BC} E) & \xrightarrow{\Sigma^{\alpha(a)} eq_{BC}} & \Sigma^{\alpha(a)}(E \wedge E) \\
 \bar{t}_n \downarrow & \downarrow \Sigma^n \iota & & \downarrow \Sigma^{\alpha(a)} \mu \\
 E_n \subset \Sigma^n E, & E_{\alpha(a)} & \xrightarrow{\hspace{10em}} & \Sigma^{\alpha(a)} E
 \end{array}$$

гомотопически коммутативны. Следовательно, тройка (E, μ, ι) является кольцевым спектром. Если, кроме того, гомотопически коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 E_{4n} \wedge E_{4m} & \xrightarrow{\tau} & E_{4m} \wedge E_{4n} \\
 \searrow \bar{\mu}_{4n, 4m} & & \swarrow \bar{\mu}_{4m, 4n} \\
 & E_{4n+4m}, &
 \end{array}$$

то (E, μ, ι) — коммутативный кольцевой спектр.

Доказательство. Из 13.82 и 13.83 следует гомотопическая коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccccc}
 & & SE_n \wedge E_m & \xrightarrow{\varepsilon_n \wedge 1} & E_{n+1} \wedge E_m \\
 & \nearrow \kappa & & & \downarrow \bar{\mu}_{n+1, m} \\
 S(E_n \wedge E_m) & \xrightarrow{S\bar{\mu}_{nm}} & SE_{n+m} & \xrightarrow{\varepsilon_{n+m}} & E_{n+m+1} \\
 & \searrow \lambda & & & \uparrow \bar{\mu}_{n, m+1} \\
 & & E_n \wedge SE_m & \xrightarrow{1 \wedge \varepsilon_m} & E_n \wedge E_{m+1}
 \end{array}$$

$$\kappa[t, [x, y]] = [[t, x], y], \quad \lambda[t, [x, y]] = [x, [v^n(t), y]].$$

Далее, в силу леммы 10.4 существуют такие функции спектров $\iota: S^0 \rightarrow E$ и $\bar{\mu}_{BC}: E \wedge_{BC} E \rightarrow E$, что $\iota_n \simeq \iota$ и $(\bar{\mu}_{BC})_{\alpha(a)} \simeq \mu_{\beta(a), \gamma(a)}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Определим μ_{BC} как композицию

$$E \wedge E \xrightarrow{\varepsilon_{BC}^{-1}} E \wedge_{BC} E \xrightarrow{\bar{\mu}_{BC}} E.$$

Тогда, если взять в диаграмме 13.84 в качестве μ отображение μ_{BC} , то она очевидным образом станет коммутативной.

Для доказательства ассоциативности отображения μ нам нужно показать, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 (E \wedge_{BC} E) \wedge_{B \cup C, D} E & \xrightarrow{\bar{\mu}_{BC} \wedge 1} & E \wedge_{B \cup C, D} E \\
 \parallel & & \downarrow \bar{\mu}_{B \cup C, D} \\
 13.86. \quad E \wedge_{B, C \cup D} (E \wedge_{CD} E) & & \\
 \downarrow 1 \wedge \bar{\mu}_{CD} & & \\
 E \wedge_{B, C \cup D} E & \xrightarrow{\bar{\mu}_{B, C \cup D}} & E
 \end{array}$$

гомотопически коммутативна для всех разбиений $A = B \cup C \cup D$ с бесконечными B, C, D . Но с учетом диаграммы 13.83 и условия

$$\lim^1 \tilde{E}^{\alpha(a)-1} (E_{\beta(a)} \wedge E_{\gamma(a)} \wedge E_{\delta(a)}) = 0,$$

это непосредственно вытекает из леммы 10.4, б).

Комбинируя диаграмму 13.86 с диаграммой 13.44, мы находим, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 (E \wedge E) \wedge E & \xrightarrow{\mu_{BC} \wedge 1} & E \wedge E \\
 \downarrow a & & \downarrow \mu_{B \cup C, D} \\
 E \wedge (E \wedge E) & & \\
 \downarrow 1 \wedge \mu_{CD} & & \\
 E \wedge E & \xrightarrow{\mu_{B, C \cup D}} & E
 \end{array}$$

коммутативна для всех разбиений $A = B \cup C \cup D$ с бесконечными B, C, D .

Включения $e_{nm}: S^n \wedge E_m \rightarrow E_{n+m}$ индуцируют такое отображение $e_{BC}: S^0 \wedge_{BC} E \rightarrow E$, что $(e_{BC})_{\alpha(a)} \simeq e_{\beta(a), \gamma(a)}: S^{\beta(a)} \wedge E_{\gamma(a)} \rightarrow E_{\alpha(a)}$ для всех $a \in A$ и всех разбиений $A = B \cup C$. Без труда проверяется, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 & S^0 \wedge_{BC} E & \\
 eq_{BC} \swarrow & & \searrow e_{BC} \\
 S^0 \wedge E & \xrightarrow{I} & E \\
 eq_{\emptyset A} \swarrow & & \searrow e_{\emptyset A} \\
 & S^0 \wedge_{\emptyset A} E &
 \end{array}$$

коммутативна. Следовательно диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 S^0 \wedge_{BC} E & \xrightarrow{1 \wedge I} & E \wedge_{BC} E \\
 eq_{BC} \downarrow & \searrow e_{BC} & \downarrow \bar{\mu}_{BC} \\
 S^0 \wedge E & \xrightarrow{I} & E
 \end{array}$$

13.87.

также коммутативна (коммутативность верхнего треугольника является следствием из 13.82). Таким образом, для любых разбиений $A = B \cup C$ с бесконечными B и C имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 S^0 \wedge E & \xrightarrow{1 \wedge I} & E \wedge E \\
 & \searrow I & \downarrow \mu_{BC} \\
 & & E
 \end{array}$$

Аналогичным образом доказывается коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
 E \wedge E & \xleftarrow{1 \wedge I} & E \wedge S^0 \\
 \mu_{BC} \downarrow & \nearrow r & \\
 E & &
 \end{array}$$

Для того чтобы завершить доказательство предложения 13.80, нам нужно показать еще, что гомотопический класс $[\mu_{BC}]$ не зависит от B, C . С этой целью рассмотрим внушающую строк

диаграмму на с. 348 (мы предполагаем, что входящие в нее множества B и D бесконечны). Эта диаграмма включает в себя десять поддиаграмм, пронумерованных цифрами 1, 2, ..., 10. Диаграмма 1 коммутативна в силу 13.40, b), v), 2 и 3 коммутативны в силу коммутативности диаграммы 13.87 и ее очевидного аналога, 4, 5, 6 и 7 коммутативны в силу естественности отображений $eq_{B, C \cup D}$ и $eq_{B \cup C, D}$, диаграммы 8 и 10 — в силу коммутативности диаграмм 13.44 и 13.86 соответственно. Коммутативность диаграммы 9 очевидна. Таким образом, если множества B и D бесконечны, то $\mu_{B \cup C, D} \simeq \mu_{B, C \cup D}$.

Предположим теперь, что $A = B_1 \cup C_1 = B_2 \cup C_2$ — два разбиения с бесконечными множествами B_1, B_2, C_1, C_2 . Тогда $B_1 = (B_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap C_2)$, так что либо $B_1 \cap B_2$, либо $B_1 \cap C_2$ должны быть бесконечными. Пусть, для определенности, бесконечным является множество $B_1 \cap B_2$. Аналогично, $C_1 = (C_1 \cap B_2) \cup (C_1 \cap C_2)$, так что одно из этих множеств, скажем, $C_1 \cap C_2$ бесконечно. Тогда мы имеем

$$\mu_{B_1, C_1} = \mu_{(B_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap C_2), C_1} = \mu_{B_1 \cap B_2, (B_1 \cap C_2) \cup (C_1 \cap B_2) \cup (C_1 \cap C_2)} = \\ \mu_{(B_1 \cap B_2) \cup (C_1 \cap B_2), (B_1 \cap C_2) \cup (C_1 \cap C_2)} = \mu_{B_2, C_2}.$$

Остальные три случая рассматриваются аналогично. Таким образом, мы показали, что гомотопический класс $[\mu_{BC}]$ не зависит от B, C . $\square$

Итак, для того чтобы задать на спектре E кольцевую структуру, достаточно лишь построить отображения $\iota_n: S^n \rightarrow E_n$, $\bar{\mu}_{nm}: E_n \wedge E_m \rightarrow E_{n+m}$, удовлетворяющие 13.81 — 13.83, и проверить, что выполняется условие на $\lim^1$. Сейчас мы сделаем это для $E = H(R)$, где R — кольцо, и для таких спектров E , как K, KO, MG , где G — одна из серий классических групп Ли.

13.88. В п. 13.79 мы построили такие отображения

$$\bar{\mu}_{nm}: H(R, n) \wedge H(R, m) \rightarrow H(R, n+m),$$

что $\bar{\mu}_{nm}^*(g_{n+m}) = g_n \wedge g_m$. Из соотношения $(g_n \wedge g_m) \wedge g_p = g_n \wedge (g_m \wedge g_p)$ вытекает, что $\bar{\mu}_{nm}$ удовлетворяют условию 13.83. Для каждого n мы имеем каноническую образующую $\iota_n \in \tilde{H}^n(S^n; R)$ ($\iota_n = \sigma^{-n}(\iota_0)$), которая представляется отображением $\iota_n: S^n \rightarrow H(R, n)$. Поскольку $\iota_{n+1} = \sigma^{-1}(\iota_n)$, то для ι_n выполняется соотношение 13.81. Для $\times$ - и $\wedge$ -умножений в сингулярных когомологиях, которые строятся, следуя теореме 13.36, очевидным образом выполнены соотношения 13.56, iii), iv) и поэтому также 13.55, iii), iv). Таким образом,

$$e_{nm}^*(g_{n+m}) = \sigma^{-n}(g_m) = \sigma^{-n}(\iota_0 \wedge g_m) = \sigma^{-n}(\iota_0) \wedge g_m = \\ \iota_n \wedge g_m = (\iota_n \wedge 1)^* \bar{\mu}_{nm}^*(g_{n+m}) = [\bar{\mu}_{nm} \circ (\iota_n \wedge 1)]^*(g_{n+m}),$$

откуда вытекает, что

$$e_{nm} \simeq \bar{\mu}_{nm} \circ (\iota_n \wedge 1).$$

Аналогично,

$$\varepsilon_{mn} \simeq \bar{\mu}_{nm} \circ (1 \wedge \bar{\iota}_m) \circ \tau'.$$

Следовательно, отображения $\bar{\mu}_{nm}$ и $\bar{\iota}_n$ удовлетворяют условию 13.82. Из соотношения $g_n \wedge g_m = (-1)^{nm} g_m \wedge g_n$ находим, что диаграмма 13.85 гомотопически коммутативна для любого коммутативного кольца R . И, наконец, условие на $\lim^1$ выполняется тривиально, поскольку в нашем случае пространство

$$H(R, n) \wedge H(R, m) \wedge H(R, p)$$

$(n + m + p - 1)$ -связно. Таким образом, $(H(R); \mu, \iota)$ представляет собой кольцевой спектр, коммутативный для коммутативного R . Кроме того, $\times$ -умножение, построенное по этому спектру, совпадает с алгебраическим $\times$ -умножением, описанным в теореме 13.36.

13.89. Следующим по сложности является спектр MG . В главе 11 мы определили такие отображения

$$\omega_{nm}: BG(n) \times BG(m) \rightarrow BG(n + m),$$

что если ξ_n — универсальное $G(n)$ -расслоение над $BG(n)$, то $\omega_{nm}^* \xi_{n+m} \simeq \xi_n \times \xi_m$. Эти отображения были построены лишь для $G = O, U, Sp$, но совершенно так же можно задать их и для $G = SO, SU$ или $Spin$. Тогда индуцированные отображения пространств Тома имеют вид:

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_{nm} = M(\omega_{nm}): MG(n) \wedge MG(m) &\cong M(\xi_n \times \xi_m) \rightarrow \\ &M(\xi_{n+m}) = MG(n + m). \end{aligned}$$

Вложение $* \rightarrow BG(n)$ индуцирует отображение $\bar{\iota}_n: S^n = M(\varepsilon^n) \rightarrow MG(n)$. Коммутативность диаграммы 13.81 следует из соотношения $\varepsilon^1 \times \varepsilon^n \simeq \varepsilon^{n+1}$; коммутативность диаграмм 13.82, 13.83 и 13.85 вытекает из следствий 11.53, 11.48 и 11.51 соответственно. Согласно замечанию, следующему за 10.4, условия на $\lim^1$ будут выполнены, если мы покажем, что $H^{n+q-1}(E_n^{2n}; \mathbb{Q}) \otimes H_q(E; \mathbb{Q}) = 0$ для всех q и бесконечного числа размерностей n . В нашем случае это равносильно такому утверждению: если $H_q(MG; \mathbb{Q}) \neq 0$, то группы $H^{en+q-1}(MG(n); \mathbb{Q})$, $H^{e(n+m)+q-1}(MG(n) \wedge MG(m); \mathbb{Q})$ и $H^{e(n+m+p)+q-1}(MG(n) \wedge MG(m) \wedge MG(p); \mathbb{Q})$ равны нулю для бесконечного числа значений n, m, p . Здесь e есть 1, 2 или 4, в зависимости от группы G . Для классических групп это утверждение будет следовать из результатов главы 16 (разумеется, тех, в которых не используется тот факт, что MG — кольцевой спектр!).

Умножение

$$MG_*(X) \otimes MG_*(Y) \rightarrow MG_*(X \times Y)$$

допускает геометрическое описание в терминах сингулярных многообразий. Если $f: M^m \rightarrow X$ и $g: N^n \rightarrow Y$ — некоторые сингулярные G -многообразия, то $M^m \times N^n$ имеет естественную $G(n + m)$ -струк-

туру и $f \times g: M^m \times N^n \rightarrow X \times Y$ является сингулярным G -многообразием. Тогда

$$[M^m, f] \times [N^n, g] = [M^m \times N^n, f \times g] \in MG_{n+m}(X \times Y).$$

В частности, в Ω_*^G мы имеем

$$[M^m] \cdot [N^n] = [M^m \times N^n].$$

Это соотношение получается применением конструкции Понтрягина — Тома. Вложим M^m в $\mathbb{R}^{n+m}$ с трубчатой окрестностью $N(M)$ и N^n в $\mathbb{R}^{n+l}$ с трубчатой окрестностью $N(N)$. Если рассмотреть S^q как аффинное пространство $\mathbb{R}^q$ с бесконечно удаленной точкой ∞ , то $S^{m+n+k+l} = (\mathbb{R}^{m+k} \times \mathbb{R}^{n+l}) \cup \infty$, и проекция

$$\pi_{M \times N}: S^{n+m+k+l} \rightarrow M(v_M \times v_N) \cong M(v_M) \wedge M(v_N)$$

есть не что иное, как

$$\pi_M \wedge \pi_N: S^{m+k} \wedge S^{n+l} \rightarrow M(v_M) \wedge M(v_N).$$

Следовательно, класс $[M^m \times N^n]$ представляется диаграммой

$$\begin{array}{ccccc} S^{m+n+k+l} & \xrightarrow{\pi_M \wedge \pi_N} & M(v_M) \wedge M(v_N) & \xrightarrow{M(\tilde{v}_M) \wedge M(\tilde{v}_N)} & MG(m) \wedge MG(n) \\ & \searrow \pi_{M \times N} & \parallel & & \downarrow \bar{\mu}_{mn} \\ & & M(v_M \times v_N) & \xrightarrow{M(\tilde{v}_{M \times N})} & MG(m+n), \end{array}$$

т. е. $[M^m \times N^n] = [M^m] \cdot [N^n]$.

Структура колец Ω_*^G для групп $G=O$, SO и U описана в главе 12; соответствующие вычисления будут проделаны в главе 20.

13.90. Займемся теперь построением умножений для K -теории. Поскольку K -теория определялась в терминах векторных расслоений, естественно определить эти умножения с помощью тензорного произведения расслоений.

Фиксируя базис в векторном пространстве F^n , — скажем, выбрав стандартный базис $e_1, e_2, \dots, e_n$, — можно отождествить $GL(n, F)$ с группой $\text{Aut}(F^n)$ линейных автоморфизмов F^n . Зададим гомоморфизм тензорного произведения

$$t_{nm}: GL(n, F) \times GL(m, F) \rightarrow GL(nm, F),$$

отождествляя $F^n \otimes F^m$ с F^{nm} при помощи того единственного изоморфизма, который переводит $e_i \otimes e_j$ в $e_{(i-1)m+j}$ для $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, и определяя затем $t_{nm}(A, B)$ как автоморфизм $A \otimes B: F^n \otimes F^m \rightarrow F^n \otimes F^m$, где $A \in GL(n, F)$, $B \in GL(m, F)$. Например, для $n=m=2$ мы имеем

$$t_{2,2} \left(\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} aa' & ac' & ca' & cc' \\ ab' & ad' & cb' & cd' \\ ba' & bc' & da' & dc' \\ bb' & bd' & db' & dd' \end{pmatrix}.$$

Без труда проверяется, что

$$t_{nm}(O(n, F) \times O(m, F)) \subset O(nm, F).$$

Пусть теперь F есть $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Если заданы два F -векторных расслоения $\xi \rightarrow X$ и $\eta \rightarrow Y$ размерностей n, m соответственно, то можно следующим образом определить векторное расслоение $\xi \otimes_F \eta \rightarrow X \times Y$ размерности nm со слоем $\xi_x \otimes_F \eta_y$ над точкой (x, y) . Возьмем для ξ, η максимальные атласы

$$\{(U_\alpha, h_\alpha): \alpha \in \Lambda\}, \{(V_\gamma, h'_\gamma): \gamma \in \Gamma\}$$

с соответствующими системами

$$\{U_\alpha, g_{\alpha\beta}: \alpha, \beta \in \Lambda\}, \{V_\gamma, g'_{\gamma\delta}: \gamma, \delta \in \Gamma\}$$

функций перехода. Тогда

$$\{U_\alpha \times V_\gamma, t_{nm} \cdot (g_{\alpha\beta} \times g'_{\gamma\delta}): \alpha, \beta \in \Lambda, \gamma, \delta \in \Gamma\}$$

будет системой функций перехода на произведении $X \times Y$ со значениями в $GL(n, m, F)$. Используя затем процедуру склеивания предложения 11.15, мы получим над $X \times Y$ nm -мерное векторное расслоение, которое и назовем $\xi \otimes_F \eta$.

Можно дать более элегантное описание класса расслоений, изоморфных $\xi \otimes_F \eta$. Представим ξ и η в виде $\xi = \xi' [F^n]$, $\eta = \eta' [F^m]$, где ξ' — главное $GL(n, F)$ -расслоение и η' — главное $GL(m, F)$ -расслоение (ξ' и η' определены лишь с точностью до изоморфизма). Тогда $(t_{nm})_*(\xi' \times \eta')$ является $GL(nm, F)$ -расслоением и мы имеем

$$\xi \otimes_F \eta \simeq ((t_{nm})_*(\xi' \times \eta')) [F^n \otimes_F F^m].$$

Из этого описания немедленно вытекают следующие свойства $\otimes_F$.

13.91. Предложение. i) $\otimes_F$ является функтором двух переменных.

$$\text{ii) } (\xi \otimes_F \eta) \otimes_F \zeta \simeq \xi \otimes_F (\eta \otimes_F \zeta).$$

iii) Если $\tau: X \times Y \rightarrow Y \times X$ — «масующее» отображение ($\tau(x, y) = (y, x)$), то $\tau^*(\eta \otimes_F \xi) \simeq \xi \otimes_F \eta$.

$$\text{iv) } \xi \otimes_F (\eta \times \zeta) \simeq (\xi \otimes_F \eta) \times (\xi \otimes_F \zeta).$$

v) Для любых отображений $f: X' \rightarrow X$, $g: Y' \rightarrow Y$ имеет место изоморфизм $(f \times g)^*(\xi \otimes_F \eta) \simeq f^* \xi \otimes_F g^* \eta$.

Разумеется, если F -векторные расслоения ξ и η заданы над одним и тем же пространством X , то применяя диагональное отображение Δ , мы получим внутреннее тензорное произведение $\xi \otimes_F \eta$ с $(\xi \otimes_F \eta)_x = \xi_x \otimes_F \eta_x$ для всех $x \in X$. Свойства этого внутреннего произведения, соответствующие свойствам из предложения 13.91, очевидны.

Замечание. Тензорное произведение $V \otimes_{\mathbb{H}} W$ двух кватернионных векторных пространств не является кватернионным век-

торным пространством и выдерживает всего лишь умножение на вещественные скаляры. Можно определить тензорное произведение $\xi \otimes_{\mathbb{H}} \eta$ двух кватернионных векторных расслоений; оно будет вещественным расслоением. В то же время, если V — вещественное векторное пространство и W — кватернионное векторное пространство, то их тензорное произведение $V \otimes_{\mathbb{R}} W$ является кватернионным векторным пространством. Аналогичное утверждение верно и для векторных расслоений.

Напомним теперь определение группы $K(X)$. Пусть X — конечное клеточное пространство и $V_{\mathbb{C}}(X)$ — абелева полугруппа классов изоморфных комплексных векторных расслоений над X . Тогда существует абелева группа $K(X)$ и гомоморфизм $\phi: V_{\mathbb{C}}(X) \rightarrow K(X)$ полугрупп, обладающий следующим универсальным свойством: для любой абелевой группы A и гомоморфизма $\psi: V_{\mathbb{C}}(X) \rightarrow A$ существует единственный гомоморфизм $\theta: K(X) \rightarrow A$ с $\theta \circ \phi = \psi$. Группа $K(X)$ состоит из классов эквивалентности пар $(\{\xi\}, \{\eta\})$, где ξ и η — комплексные векторные расслоения над X . Легко видеть, что для любых трех абелевых полугрупп S, S', S'' билинейное отображение $\theta: S \times S' \rightarrow S''$ индуцирует такое билинейное отображение $\theta': K(S) \times K(S') \rightarrow K(S'')$, что коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} S \times S' & \xrightarrow{\theta} & S'' \\ \downarrow \phi \times \phi & & \downarrow \phi \\ KS \times KS' & \xrightarrow{\theta'} & KS'' \end{array}$$

Таким образом, отображение

$$\theta: V_{\mathbb{C}}(X) \times V_{\mathbb{C}}(Y) \rightarrow V_{\mathbb{C}}(X \times Y),$$

заданное формулой

$$\theta(\{\xi\}, \{\eta\}) = \{\xi \otimes_{\mathbb{C}} \eta\},$$

индуцирует отображение

$$\times: K(X) \otimes K(Y) \rightarrow K(X \times Y).$$

Естественность, ассоциативность и коммутативность $\times$ следуют из предложения 13.91. Отправляясь от $\times$, мы получаем умножение

$$\wedge: \tilde{K}(X) \otimes \tilde{K}(Y) \rightarrow \tilde{K}(X \wedge Y)$$

для пунктированных клеточных пространств X и Y . Очевидно, что умножение $\wedge$ естественно, ассоциативно и коммутативно.

Мы хотим продолжить $\times$ и $\wedge$ на бесконечные клеточные пространства и спектры. Для этого необходимо построить умножение $K \wedge K \rightarrow K$ (или, согласно предложению 13.80, отображение μ :

$BU \wedge BU \rightarrow BU$ с подходящими свойствами), индуцирующее $\wedge$ -умножение на конечных клеточных пространствах.

В главе 11 мы определили BU как объединение

$$BU = \bigcup_{k \geq 1} BU(k),$$

где $BU(k) = \bigcup_{n \geq k} G_{k,n}(\mathbb{C})$. Нетрудно показать, что в действительности $\bigcup_{n \geq 1} G_{n,2n}(\mathbb{C})$ гомеоморфно $\bigcup_{k \geq 1} BU(k)$, так что

$$BU = \bigcup_{n \geq 1} G_{n,2n}(\mathbb{C}).$$

Мы рассматриваем здесь $\mathbb{C}^{2n+2}$ как прямую сумму $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^{2n} \oplus \mathbb{C}$ и сопоставляем каждой n -мерной плоскости $W \in \mathbb{C}^{2n}$ $(n+1)$ -мерную плоскость $W \oplus [e_{2n+2}]$, что определяет вложение

$$G_{n,2n} \subset G_{n+1,2n+2}.$$

В дальнейшем пространство $G_{n,2n}$ для краткости будет обозначаться через G_n . Пусть ξ_n — универсальное, а ε^n — тривиальное n -мерные расслоения над G_n . Положим $u_n = \xi_n - \varepsilon^n \in \tilde{K}(G_n)$. Если $i_n: G_n \rightarrow G_{n+1}$ — вложение, то $i_n^* u_{n+1} = u_n$. Таким образом, $\{u_n\}$ принадлежит группе $\lim^0 \tilde{K}(G_n)$ и определяет класс

$$u = [1_{BU}] \in [BU, BU] = \tilde{K}(BU).$$

Мы хотим построить элемент $u \wedge u \in \tilde{K}(BU \wedge BU)$. Поскольку отображение $\tilde{K}(BU \wedge BU) \rightarrow \lim^0 \tilde{K}(G_n \wedge G_n)$ сюръективно, то существует такой элемент $u \wedge u \in \tilde{K}(BU \wedge BU)$, что $u \wedge u|_{G_n \wedge G_n} = u_n \wedge u_n$ для всех $n \geq 1$. Если нам удастся доказать, что $u \wedge u$ единствен, то задача будет решена. Так как в силу предложения 7.66 имеет место точная последовательность

$$0 \rightarrow \lim^1 \tilde{K}^{-1}(G_n \wedge G_n) \rightarrow \tilde{K}(BU \wedge BU) \rightarrow \lim^0 \tilde{K}(G_n \wedge G_n) \rightarrow 0,$$

то для доказательства единственности $u \wedge u$ достаточно показать, что $\lim^1 \tilde{K}^{-1}(G_n \wedge G_n) = 0$. В главе 15 мы построим спектральную последовательность Атья — Хирцебруха и с ее помощью установим, что $\tilde{K}^{-1}(G_n \wedge G_n) = 0$ для всех n . Но тогда $\lim^1 \tilde{K}^{-1}(G_n \wedge G_n) = 0$.

Пусть теперь элементы $x \in \tilde{K}(X)$, $y \in \tilde{K}(Y)$ представляются отображениями $f: X \rightarrow BU$, $g: Y \rightarrow BU$ соответственно. Определим $x \wedge y$, полагая

$$x \wedge y = (f \wedge g)^*(u \wedge u).$$

Для того чтобы доказать ассоциативность умножения $\wedge$, достаточно проверить справедливость соотношения $(u \wedge u) \wedge u = u \wedge (u \wedge u)$. Ограничивая левую и правую части этого соотношения на

$G_n \wedge G_n \wedge G_n$, мы получаем $(u_n \wedge u_n) \wedge u_n = u_n \wedge (u_n \wedge u_n)$. Следовательно, соотношение $(u \wedge u) \wedge u = u \wedge (u \wedge u)$ будет доказано, если мы покажем, что $\lim^1 \tilde{K}^{-1}(G_n \wedge G_n \wedge G_n) = 0$. Но это опять вытекает из того факта, что $\tilde{K}^{-1}(G_n \wedge G_n \wedge G_n) = 0$.

Предположим теперь, что отображение $\iota_2: S^2 \rightarrow BU$ представляет элемент $\eta - 1 \in \tilde{K}(S^2)$, где $\eta \rightarrow S^2 \cong \mathbb{C}P^1$ — линейное расслоение Хопфа. Изоморфизм периодичности Ботта

$$\tilde{K}(X) \cong \tilde{K}(S^2 \wedge X)$$

задается формулой

$$x \mapsto (\eta - 1) \wedge x, \quad x \in \tilde{K}(X).$$

Это означает, что структурное отображение

$$S^2 \wedge BU \rightarrow BU$$

нашего спектра K является композицией

$$S^2 \wedge BU \xrightarrow{\iota_2 \wedge 1} BU \wedge BU \xrightarrow{\mu} BU,$$

где μ представляет элемент $u \wedge u \in \tilde{K}(BU \wedge BU)$. Таким образом, если считать, что

$$\mu_{2n, 2m}: K_{2n} \wedge K_{2m} \rightarrow K_{2n+2m}$$

есть не что иное, как $\mu: BU \wedge BU \rightarrow BU$, и определить

$$\iota_{2n}: S^{2n} \rightarrow K_{2n}$$

как композицию

$$S^{2n} \cong S^2 \wedge S^{2n-2} \xrightarrow{\iota_2 \wedge \iota_{2n-2}} BU \wedge BU \xrightarrow{\mu} BU, \quad n \geq 2,$$

го диаграммы 13.81 — 13.83 и 13.85 будут гомотопически коммутативны. Условия на $\lim^1$ удовлетворяются благодаря замечанию, следующему за леммой 10.4. Стало быть, мы получаем такой коммутативный кольцевой спектр (K, μ, ι) , что умножение

$$K(X) \otimes K(Y) \rightarrow K(X \times Y)$$

индуцировано тензорным произведением расслоений.

Аналогичным образом тензорное произведение векторных расслоений задает нам умножения

$$\Lambda_1: \tilde{K}\tilde{O}(X) \otimes \tilde{K}\tilde{O}(Y) \rightarrow \tilde{K}\tilde{O}(X \wedge Y),$$

$$\Lambda_2: \tilde{K}\tilde{O}(X) \otimes \tilde{K}\tilde{S}_p(Y) \rightarrow \tilde{K}\tilde{S}_p(X \wedge Y),$$

$$\Lambda_3: \tilde{K}\tilde{S}_p(X) \otimes \tilde{K}\tilde{O}(Y) \rightarrow \tilde{K}\tilde{S}_p(X \wedge Y),$$

$$\Lambda_4: \tilde{K}\tilde{S}_p(X) \otimes \tilde{K}\tilde{S}_p(Y) \rightarrow \tilde{K}\tilde{O}(X \wedge Y)$$

для конечных клеточных пространств X и Y и, значит, отображения спектров

$$\mu_1: BO \wedge BO \rightarrow BO,$$

$$\mu_2: BO \wedge BSp \rightarrow BSp,$$

$$\mu_3: BSp \wedge BO \rightarrow BSp,$$

$$\mu_4: BSp \wedge BSp \rightarrow BO,$$

с помощью которых мы строим умножение $\mu: KO \wedge KO \rightarrow KO$. Как и прежде, для того чтобы доказать единственность и ассоциативность построенного умножения, достаточно установить, что

$$\lim^1 \tilde{KO}^{-1}(G_{n, 2n}(\mathbb{H}) \wedge G_{n, 2n}(\mathbb{H})) = 0.$$

Этот факт вытекает из замечания, следующего за леммой 10.4, и результатов главы 16.

Пусть теперь $\iota_4: S^4 \rightarrow BSp$ — отображение, представляющее элемент $(\xi - 1) \in \tilde{KS}p(S^4)$, где $\xi \rightarrow S^4 \cong \mathbb{C}P^1$ — кватернионное расслоение Хопфа. Изоморфизм периодичности Ботта

$$KO(X) \cong \tilde{KS}p(S^4 \wedge X)$$

задается формулой

$$x \mapsto (\xi - 1) \wedge_3 x, \quad x \in \tilde{KO}(X).$$

Это означает, что структурное отображение

$$S^4 \wedge BO \rightarrow BSp$$

нашего спектра KO представляет собой композицию

$$S^4 \wedge BO \xrightarrow{\iota_4} BSp \wedge BO \xrightarrow{\mu_3} BSp.$$

Аналогично, отображение $S^4 \wedge BSp \rightarrow BO$ является композицией

$$S^4 \wedge BSp \xrightarrow{\iota_4} BSp \wedge BSp \xrightarrow{\mu_4} BO.$$

Таким образом, мы получаем коммутативный кольцевой спектр (KO, μ, ι_4) , умножение в котором индуцировано тензорным произведением расслоений.

Опишем теперь кольца коэффициентов $\tilde{K}^*(S^0) = \pi_*(K)$ и $\tilde{KO}^*(S^0) = \pi_*(KO)$. Ранее мы показали, что

$$\pi_q(K) = \pi_q(BU, *) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q \text{ четно,} \\ 0, & q \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Если $t = [\iota_2] \in \pi_2(BU) \cong \pi_2(K)$, то умножение на этот элемент является изоморфизмом

$$\pi_q(K) \xrightarrow{\cong} \pi_{q+2}(K).$$

Следовательно, для всех $q \in \mathbb{Z}$ элемент $t^q \in \pi_q(K)$ является образующей

Таким образом,

$$13.92. \pi_*(K) \cong \mathbb{Z}[t, t^{-1}],$$

где $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ — градуированное кольцо целочисленных полиномов Лорана от переменной t .

На векторных расслоениях имеются некоторые очевидные операции.

i) Для любого комплексного векторного расслоения η определено сопряженное расслоение $\Psi^{-1}(\eta)$.

ii) Для любого вещественного векторного расслоения ξ определено комплексное векторное расслоение $c(\xi) = \xi \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

iii) Любому комплексному векторному расслоению η соответствует вещественное векторное расслоение $r(\eta)$, которое получается игнорированием комплексной структуры.

iv) Для любого комплексного векторного расслоения η определено кватернионное векторное расслоение $s(\eta) = \eta \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{H}$.

v) Любому кватернионному векторному расслоению ξ соответствует комплексное векторное расслоение $c'(\xi)$, которое получается игнорированием кватернионной структуры с сохранением комплексной структуры.

Эти операции определяют естественные преобразования $\Psi^{-1}: \tilde{K}^* \rightarrow \tilde{K}^*$, $c: \tilde{K}\tilde{O}^* \rightarrow \tilde{K}^*$, $r: \tilde{K}^* \rightarrow \tilde{K}\tilde{O}^*$, $s: \tilde{K}^* \rightarrow \tilde{K}\tilde{S}p^*$, $c': \tilde{K}\tilde{S}p^* \rightarrow \tilde{K}^*$ и даже отображения спектров $\Psi^{-1}: K \rightarrow K$, $c: KO \rightarrow K$, $r: K \rightarrow KO$, $s: K \rightarrow \Sigma^4 KO$, $c': \Sigma^4 KO \rightarrow K$. Нетрудно проверить, что выполняются следующие соотношения:

13.93.

$$i) rc = 2, sc' = 2;$$

$$ii) cr = 1 + \Psi^{-1} = c's;$$

$$iii) \Psi^{-1}c = c, \Psi^{-1}c' = c', r\Psi^{-1} = r, s\Psi^{-1} = s, \Psi^{-1} \circ \Psi^{-1} = 1.$$

Мы уже знаем, что

$$\pi_q(KO) = \pi_q(BO, *) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q \equiv 0 \pmod{4}, \\ \mathbb{Z}_2, & q \equiv 1, 2 \pmod{8}, \\ 0, & q \equiv 3, 5, 6, 7 \pmod{8}. \end{cases}$$

Теперь мы хотим описать мультипликативную структуру в $\pi_*(KO)$. Для любой пары $G \subset H$ топологических групп имеет место точная последовательность (расслоений)

$$\dots \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow H/G \rightarrow BG \xrightarrow{B^1} BH$$

(см п. 11.43). Поскольку любую вещественную ортогональную матрицу можно рассматривать как унитарную, то определено отображение $O \rightarrow U$ и, стало быть, мы имеем расслоение

$$U/O \rightarrow BO \xrightarrow{c} BU.$$

Далее, один из промежуточных результатов для вещественной теоремы периодичности состоит в том, что пространство $\mathbb{Z} \times BO \simeq \Omega^4 BSp$ гомотопически эквивалентно $\mathbb{Z} \times BO \simeq \Omega(U/O)$ (см. главу 16). Используя эту эквивалентность, мы получаем точную гомотопическую последовательность

$$\dots \rightarrow \pi_{i-1}(BO) \rightarrow \pi_i(BO) \xrightarrow{c} \pi_i(BU) \rightarrow \pi_{i-2}(BO) \rightarrow \dots$$

Взяв $i=8$ и $i=4$, мы видим, что

$c: \pi_8(BO) \rightarrow \pi_8(BU)$ — изоморфизм и

$c: \pi_4(BO) \rightarrow \pi_4(BU)$ имеет своим образом $2\mathbb{Z}$.

Выберем элемент $x \in \pi_4(BO)$ с $c(x) = 2t^2$ и $y \in \pi_8(BO)$ с $c(y) = t^4$. Поскольку c — кольцевой гомоморфизм, то $x^2 = 4y$.

Пусть $\omega \rightarrow S^1 \cong \mathbb{R}P^1$ — вещественное линейное расслоение Хопфа и

$$\alpha = \omega - 1 \in \hat{K}O(S^1) = \pi_1(BO) = \pi_1(KO).$$

Тогда α — ненулевой элемент, и можно показать, что $\alpha^2 \neq 0 \in \pi_2(KO)$. В то же время $\alpha^3 = 0 = \alpha x$, поскольку $\alpha^3 \in \pi_3(KO)$ и $\alpha \cdot x \in \pi_5(KO)$. Так как умножение на y является изоморфизмом периодичности Ботта $\pi_q(KO) \cong \pi_{q+8}(KO)$, то мы доказали следующий результат.

13.94. Кольцо $\pi_*(KO)$ мультипликативно порождается элементами $\alpha \in \pi_1(KO)$, $x \in \pi_4(KO)$, $y \in \pi_8(KO)$, $y^{-1} \in \pi_{-8}(KO)$, связанными соотношениями $2\alpha = \alpha^3 = \alpha \cdot x = 0$, $x^2 = 4y$, $yy^{-1} = 1$.

13.95. Упражнение. Используя соотношения 13.93, описать гомоморфизм

$$r: \pi_*(BU) \rightarrow \pi_*(BO).$$

13.96. Упражнение. Показать, что отображения

$$\mu_{nm}: H(R, n) \wedge H(R, m) \rightarrow H(R, n+m)$$

можно определить, используя лишь гомотопическую теорию без предварительного построения $\times$ -умножения коцепей.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Представленная в настоящей главе теория умножений содержит, в принципе, все необходимое для конкретных вычислений. Однако, если читатель попытается на основании этого сосчитать кольцо когомологий $H^*(X; \mathbb{R})$ некоторого конкретного пространства X (скажем, $X = \mathbb{R}P^n$), то он найдет это занятие весьма непростым. В главе 15 мы вычислим некоторые кольца когомологий, правда, применяя для этой цели сферические расслоения и ассоциированные с ними точные последовательности групп когомологий. После того как в главе 10 мы научились вычислять группы гомологий и когомологий клеточных пространств, используя лишь их клеточную структуру, было бы заманчивым найти аналогичные «кле-

точные» методы и для вычисления кольцевой структуры $H^*(X; R)$. Но на этом пути возникает серьезная трудность, заключающаяся в том, что отображение $\Delta: X \rightarrow X \times X$ не является клеточным. Разумеется, оно гомотопно клеточному отображению Δ' , но в общем случае об этом Δ' ничего нельзя сказать. В тех немногих случаях, когда Δ' допускает точное описание, оно и в самом деле используется для нахождения кольцевой структуры на $H^*(X; R)$.

Исторически теория умножений в гомологиях и когомологиях развивалась совершенно иначе, чем это описано в настоящей главе. В те времена, когда создавалась эта теория, топологи работали почти исключительно с многообразиями и пытались, например, представлять циклы вложенными подмногообразиями. С этой точки зрения естественно определить $a \cup b$, $a, b \in H^*(M; R)$, следующим образом: нужно найти в M дуальные циклы $N_a \subset M$, $N_b \subset M$, образовать их пересечение (N_a и N_b должны находиться в «общем положении») и затем дуализировать цикл $N_a \cap N_b$. Теория «чисел пересечений» явилась предвестником современных умножений и по настоящее время представляет собой весьма эффективный метод вычисления мультипликативной структуры в $H^*(M; R)$ для большого числа многообразий M и в особенности тех, которые имеют алгебро-геометрическое происхождение. Для читателя, который серьезно заинтересовался предметом, было бы очень полезным прочесть главу 14, а затем заглянуть в одну из старых книг по алгебраической топологии (например, книгу Зейферта и Трельфалля) и попытаться перевести теорию чисел пересечения на более современный язык.

ССЫЛКИ НА ЛИТЕРАТУРУ

1. Адамс [6, §].
2. Спеньер [72].
3. Уайтхед [81].

В предыдущих главах мы познакомились с тем, как, исходя из спектра E , построить теорию гомологий E_* и теорию когомологий E^* . Кроме того, в случае, когда E — кольцевой спектр, были построены различные умножения, связывающие E_* и E^* . Однако в ряде случаев для подходящих пространств X можно установить более тесные связи между $E_*(X)$ и $E^*(X)$. Одно из первых крупных открытий в алгебраической топологии состояло в следующем: если M — некоторое замкнутое n -мерное ориентируемое многообразие, то $H_r(M; \mathbb{Z}) \cong H^{n-r}(M; \mathbb{Z})$ для всех r , $0 \leq r \leq n$. В этой главе мы докажем эту теорему двойственности Пуанкаре для произвольных теорий гомологий.

В главе 12 мы показали, что каждое дифференцируемое многообразие имеет касательное векторное расслоение. Хотя в случае топологических многообразий это уже не верно, оказывается возможным заменить касательное расслоение некоторым его обобщением, подходящим для наших целей. Таким образом мы придем к введенному Милнором понятию микрорасслоения.

14.1. Определение. *Микрорасслоением размерности n* называется четверка $\chi = (B, p, X, i)$, где B и X — топологические пространства, а $i: B \rightarrow X$, $p: X \rightarrow B$ — отображения, удовлетворяющие следующим условиям:

$$i) \quad p \circ i = 1_B;$$

ii) для каждой точки $b \in B$ существуют такие открытые окрестности $U \ni b$, $V \ni i(b)$ и гомеоморфизм

$$h_b: U \times \mathbb{R}^n \rightarrow V \cap p^{-1}(U),$$

что $p \circ h_b(u, v) = u$ для всех $(u, v) \in U \times \mathbb{R}^n$ и $h_b(u, 0) = i(u)$ для всех $u \in U$. Пары (U, h) из ii) называются *картами* микрорасслоения χ .

14.2. Примеры. i) Тривиальное микрорасслоение над B имеет вид $(B, p_B, B \times \mathbb{R}^n, i)$, где $i(b) = (b, 0)$, $b \in B$.

ii) Если $\xi = (B, p, E, \mathbb{R}^n)$ — некоторое n -мерное векторное расслоение, то четверка (B, p, E, i) , где i — нулевое сечение, т. е. $i(b) = 0 \in p^{-1}(b)$ для всех $b \in B$, является n -мерным микрорасслоением.

iii) Если M — топологическое n -мерное многообразие без края ($\partial M = M = \emptyset$), то касательное микрорасслоение многообразия M определяется как $(M, \pi_1, M \times M, \Delta)$, где π_1 — проекция на первый сомножитель и Δ — диагональное отображение. Выберем для

любой точки $x \in M$ карту (U, f) , содержащую эту точку и определим отображение

$$h_x: U \times \mathbb{R}^n \rightarrow U \times U,$$

полагая $h_x(y, v) = (y, f^{-1}(f(y) - v))$. Тогда h_x — гомеоморфизм требуемого вида. Если многообразие M имеет край $\bar{M}$, то касательное микрорасслоение многообразия M определяется как ограничение на M касательного микрорасслоения многообразия $M \cup C$, где $C = \bar{M} \times [0, 1]$ — крайка и где мы отождествляем точки $x \in M$ с точками $(x, 0) \in C$.

14.3. Определение. Два микрорасслоения (B, p, X, i) и (B, p', X', i') называются *эквивалентными*, или *изоморфными*, если существуют такие окрестность $V \subset X$ множества $i(B)$, окрестность $V' \subset X'$ множества $i'(B)$ и гомеоморфизм $h: V \rightarrow V'$, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{i} & V \\ & \searrow i' & \downarrow h \\ & & V' \\ & \nearrow i' & \uparrow p'|V' \\ B & \xrightarrow{p|V} & B \end{array}$$

коммутативна.

14.4. Упражнение. Показать, что если M — дифференцируемое многообразие, то его касательное расслоение и касательное микрорасслоение эквивалентны в смысле определения 14.3.

14.5. Определение. Пусть $x = (B, p, X, i)$ — некоторое n -мерное микрорасслоение и E — кольцевой спектр. Для любой точки $b \in B$ мы имеем карту $h: U \times \mathbb{R}^n \rightarrow p^{-1}(U) \cap V$, где $U \subset B$ — окрестность точки b , $V \subset X$ — окрестность точки $i(b)$. Кроме того, имеет место изоморфизм

$$E^*(p^{-1}(b), p^{-1}(b) - i(b)) \cong E^*(p^{-1}(b) \cap V, p^{-1}(b) \cap V - i(b)) \xrightarrow{h^*} E^*(b \times (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})).$$

Элемент $t \in E^n(X, X - i(b))$ называется *ориентацией* или *классом Тома* микрорасслоения x , если для всех $b \in B$

$$j_b^*(t) \in E^n(p^{-1}(b), p^{-1}(b) - i(b))$$

является образующей модуля $E^*(p^{-1}(b), p^{-1}(b) - i(b))$ над кольцом $E^*(pt)$. Здесь $j_b: (p^{-1}(b), p^{-1}(b) - i(b)) \rightarrow (X, X - i(b))$ — включение пар. Микрорасслоение x называется *ориентируемым* относительно спектра E , если у этого микрорасслоения существует класс Тома. Топологическое многообразие (с краем или без края) называется *ориентируемым* относительно E , если его касательное микрорасслоение обладает классом Тома.

Примеры. i) Пусть $\xi = (B, \rho, X, \mathbb{R}^n)$ — некоторое $O(n)$ -расслоение. Тогда мы имеем изоморфизм

$$E^n(X, X - i(B)) \cong E^n(D(\xi), D(\xi) - i(B)) \cong E^n(D(\xi), S(\xi)) \cong_{p^*} \tilde{E}^n(M(\xi)).$$

Элемент $t \in \tilde{E}^n(M(\xi))$ называется классом Тома расслоения ξ , если его прообраз в $E^n(X, X - i(B))$ является классом Тома ассоциированного микрорасслоения. Для каждой точки $b \in B$ вложение $i_b: \{b\} \rightarrow B$ индуцирует отображение $M(i_b): S^n = M(e^n) \rightarrow M(\xi)$. Ясно, что элемент $t \in \tilde{E}^n(M(\xi))$ будет классом Тома тогда и только тогда, когда для всех $b \in B$ элемент $M(i_b)^*(t)$ из $\tilde{E}^n(S^n)$ — образующая $\tilde{E}^*(S^0)$ -модуля $\tilde{E}^*(S^n)$.

Пусть

$$\begin{array}{ccc} X_n & \xrightarrow{f_n} & BO(n) \\ g_n \downarrow & & \downarrow Bi_n \\ X_{n+1} & \xrightarrow{f_{n+1}} & BO(n+1) \end{array}$$

— система отображений и расслоений из определения 12.19, причем пространство X_n линейно связно. Пусть, далее, ξ — расслоение с X -структурой, т. е. такое расслоение, что его классифицирующее отображение $f: B \rightarrow BO(n)$ допускает поднятие $\tilde{f}: B \rightarrow X_n$. Тогда $\tilde{f}$ индуцирует отображение $M(\tilde{f}): M(\xi) \rightarrow MX_n$ и, следовательно, определяет некоторый элемент $t_\xi = \{M(\tilde{f})\} \in MX^n(M(\xi))$. Для любой точки $b \in B$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{M(i_b)} & M(\xi) \\ & \searrow i_n & \downarrow M(\tilde{f}) \\ & & MX_n \end{array}$$

гомотопически коммутативна, откуда вытекает, что $M(i_b)^*(t_\xi) = \iota_n \in \tilde{MX}^n(S^n)$. Таким образом, t_ξ есть класс Тома расслоения ξ .

ii) Предположим, что ξ — некоторое $O(n)$ -расслоение и что $\xi \oplus e^q$ имеет класс Тома

$$t \in \tilde{E}^{n+q}(M(\xi \oplus e^q)) \cong \tilde{E}^{n+q}(S^q M(\xi)).$$

Тогда легко видеть, что $t' = \sigma^q(t) \in \tilde{E}^n(M(\xi))$ является классом Тома расслоения ξ .

iii) Пусть M — некоторое X -многообразие. Тогда стабильное нормальное расслоение многообразия M обладает X -структурой и, следовательно, ориентируемо относительно спектра MX . Для классических групп Ли $G(n) = O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$ или $Sp(n)$ мы имеем, кроме того, отображения $\rho: G_{k,n+k} \rightarrow G_{n,n+k}$, переводящие k -мерную плоскость в ортогональную к ней n -мерную плоскость. Если отображение $\hat{\nu}: M \rightarrow G_{k,n+k}$ определяет G -структуру на M , то композиция $\rho \circ \hat{\nu}$ задает G -структуру на $\tau(M)$. Таким образом, расслоение $\tau(M)$ является MG -ориентируемым. Следовательно, каждое G -многообразие ориентируемо относительно теории гомотопий $MG^* = \Omega_k^*$.

iv) В главе 16 мы построим классы Тома для некоторых других спектров. В частности, мы увидим, что $U(n)$ -расслоения всегда ориентируемы относительно K^* , а $Sp(n)$ -расслоения всегда ориентируемы относительно KO^* . Удивительно, однако, что не все $O(n)$ -расслоения ориентируемы относительно KO^* : Атья, Ботт и Шапиро [17] показали, что $O(n)$ -расслоение ξ является KO^* -ориентируемым тогда и только тогда, когда оно допускает (стабильно) редукцию к группе $Spin(n)$.

14.6. Теорема Тома об изоморфизме. Пусть $\underline{x} = (B, \rho, X, i)$ — некоторое n -мерное микрорасслоение с классом Тома $t \in E^n(X, X - i(B))$, и пусть пространство B линейно связно и паракомпактно. Предположим, далее, что либо B — конечномерное клеточное пространство, либо $\pi_q(E) = 0$ при $q < 0$. Тогда гомоморфизмы

$$\phi_i^*: E^r(B) \rightarrow E^{n+r}(X, X - i(B)), \quad \phi_i^*(x) = \rho^*(x) \cup t, \quad x \in E^*(B),$$

$$\phi_i: E_{n+r}(X, X - i(B)) \rightarrow E_r(B), \quad \phi_i(x) = \rho_*(t \cap x), \\ x \in E_{n+r}(X, X - i(B))$$

являются изоморфизмами.

Доказательство. Предположим сначала, что микрорасслоение $\underline{x}$ имеет атлас, состоящий из m карт, и докажем в этом случае теорему индукцией по числу m . Пусть $m = 1$. Тогда существует такой гомеоморфизм $h: B \times \mathbb{R}^n \rightarrow V$, что $h(b, 0) = i(b)$, $\rho(h(b, v)) = b$ для всех $b \in B$, $v \in \mathbb{R}^n$, где V — некоторая окрестность множества $i(B)$. Другими словами, $\underline{x}$ эквивалентно тривиальному микрорасслоению и

$$E^*(X, X - i(B)) \cong E^*(V, V - i(B)) \xrightarrow{\cong} E^*(B \times \mathbb{R}^n, B \times (\mathbb{R}^n - \{0\}))$$

Следовательно, без ограничения общности можно считать, что $\underline{x} = (B, \rho_B, B \times \mathbb{R}^n, i)$ и $t \in E^n(B \times (\mathbb{R}^n - \{0\}))$. Поскольку

$E^*(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$ — свободный $E^*(pt)$ -модуль, из теоремы 13.75 следует, что гомоморфизм

$$E^*(B) \otimes_{E^*(pt)} E^*(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) \xrightarrow{\sim} E^*(B \times (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}))$$

является изоморфизмом. Так как t — класс Тома, то он имеет вид $(1 + \alpha) \times g$, где $g \in E^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$ — образующая $E^*(pt)$ -модуля и $\alpha \in \tilde{E}^0(B)$. Если B — клеточное пространство размерности n , то $\alpha^{n+1} = 0$, т. е. элемент $1 + \alpha$ обратим. Если же $\pi_q(E) = 0$ для $q < 0$, то $\tilde{E}^0(B) = 0$, и поэтому $\alpha = 0$. В любом случае

$$\begin{aligned} \phi_i^*(x) &= p_B^*(x) \cup t = (x \times 1) \cup ((1 + \alpha) \times g) = \\ &= (1 + \alpha) x \times g = \times ((1 + \alpha) x \otimes g) \end{aligned}$$

для $x \in E^*(B)$, откуда следует, что ϕ_i^* — изоморфизм.

Предположим теперь, что теорема доказана для тех B , которые покрываются менее чем m картами, и пусть $x = (B, p, X, i)$ — микрорасслоение с атласом, состоящим ровно из m карт $U_1, U_2, \dots, U_m$. Пусть

$$U = U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_{m-1}, \quad V = U_m, \quad X_1 = p^{-1}U, \quad X_2 = p^{-1}V.$$

Тогда $(U, p|X_1, X_1, i|U)$, $(V, p|X_2, X_2, i|V)$ и $(U \cap V, p|X_1 \cap X_2, X_1 \cap X_2, i|U \cap V)$ являются микрорасслоениями и

$$t_1 = t|(X_1, X_1 - i(U)), \quad t_2 = t|(X_2, X_2 - i(V)),$$

$$t_3 = t|(X_1 \cap X_2, X_1 \cap X_2 - i(U \cap V))$$

— их классы Тома. Так как пространства U , V и $U \cap V$ покрываются менее чем m картами, то $\phi_{t_1}^*$, $\phi_{t_2}^*$ и $\phi_{t_3}^*$ — изоморфизмы.

Теперь было бы естественно использовать точную последовательность Майера — Вьеториса 7.19, однако для этого ее придется слегка модифицировать. Именно, справедливо следующее утверждение: если $(X; A, B)$ — триада, где $X = \dot{A} \cup \dot{B}$, и C — подпространство в X , для которого $A \cup C = \dot{A} \cup \dot{C}$, $B \cup C = \dot{B} \cup \dot{C}$, то имеет место точная последовательность групп когомологий

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow h^q(X, C) \rightarrow h^q(A, A \cap C) \oplus h^q(B, B \cap C) \rightarrow \\ \rightarrow h^q(A \cap B, A \cap B \cap C) \rightarrow h^{q+1}(X, C) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Для доказательства этого утверждения нужно взять последовательность 7.19 для триады $(X; A', B')$, в которой $A' = A \cup C$, $B' = B \cup C$, и заметить, что $A' \cap B' = (A \cap B) \cup C$, $h^*(A', C) \cong h^*(A, A \cap C)$, $h^*(B', C) \cong h^*(B, B \cap C)$, $h^*(A' \cap B', C) \cong h^*(A \cap B, A \cap B \cap C)$.

В нашем случае возьмем $h^* = E^*$, $A = X_1$, $B = X_2$ и $C = X - i(B)$. В результате мы получим коммутативную диаграмму точных последовательностей

$$\begin{array}{c}
\cdots \longrightarrow E^{r-1}(U) \oplus E^{r-1}(V) \longrightarrow \\
\downarrow \phi_{i_1}^* \oplus \phi_{i_2}^* \\
[\cdots \rightarrow E^{n+r-1}(X_1, X_1 - iU) \oplus E^{n+r-1}(X_2, X_2 - iV) \rightarrow \\
E^{r-1}(U \cap V) \xrightarrow{\Delta'} \\
\downarrow \phi_{i_3}^* : \\
E^{n+r-1}(X_1 \cap X_2, X_1 \cap X_2 - i(U \cap V)) \xrightarrow{\Delta'} \\
E^r(B) \longrightarrow E^r(U) \oplus E^r(V) \longrightarrow \\
\downarrow \phi_i^* \qquad \qquad \downarrow \phi_{i_1}^* \oplus \phi_{i_2}^* \\
E^{n+r}(X, X - iB) \rightarrow E^{n+r}(X_1, X_1 - iU) \oplus E^{n+r}(X_2, X_2 - iV) \rightarrow \\
E^r(U \cap V) \longrightarrow \cdots \\
\downarrow \phi_{i_3}^* \\
E^{n+r}(X_1 \cap X_2, X_1 \cap X_2 - i(U \cap V)) \rightarrow \cdots
\end{array}$$

Из леммы о пяти гомоморфизмах следует, что ϕ_i^* — изоморфизм.

Пусть теперь микрорасслоение x не допускает конечного атласа. В этом случае нетрудно показать, что оно обладает счетным атласом $\{U_i\}_{i \geq 0}$ (см., например, [96], с. 50 русского издания).

Положим $V_j = \bigcup_{i=0}^j U_i$, $X_j = p^{-1}V_j$, $t_j = t|_{(X_j, X_j - i(V_j))}$ для $j \geq 0$.

Тогда имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \varinjlim_j E^{r-1}(V_j) & \longrightarrow & E^r(B) & \longrightarrow & \\
& & \cong \downarrow \varinjlim_j \phi_{i_j}^* & & \downarrow \phi_i^* & & \\
0 & \longrightarrow & \varinjlim_j E^{n+r-1}(X_j, X_j - i(V_j)) & \longrightarrow & E^{n+r}(X, X - i(B)) & \longrightarrow & \\
& & & & \varinjlim_j E^r(V_j) & \longrightarrow & 0 \\
& & & & \cong \downarrow \varinjlim_j \phi_{i_j}^* & & \\
& & & & \varinjlim_j E^{n+r}(X_j, X_j - i(V_j)) & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Строки этой диаграммы точны в силу утверждения, двойственного к упражнению 7.73, а $\lim^0 \phi_i^*$ и $\lim^1 \phi_i^*$ — изоморфизмы, поскольку каждое множество V_j покрывается конечным числом карт. Следовательно, ϕ_i^* — изоморфизм. Доказательство для ϕ_i аналогично. $\square$

Читатель может самостоятельно проверить, что диаграмма последовательностей Майера — Вьеториса коммутативна, в частности, что $\phi_i^* \circ \Delta' = \Delta' \circ \phi_{i+1}^*$.

14.7. Следствие. Пусть $x = (B, p, X, i)$ — микрорасслоение, в котором пространство B линейно связно и паракомпактно. Пусть, кроме того, или B — конечномерное клеточное пространство, или же $\pi_q(E) = 0$ для $q < 0$. Тогда для любых двух классов Тома $t, t' \in E^n(X, X - i(B))$ имеет место равенство¹⁾ $t' = p^*(u) \cup t$, где $u \in E^0(B)$ — обратимый элемент. Если же, вдобавок,

$$j_b^*(t) = j_b^*(t') \in E^n(p^{-1}(b), p^{-1}(b) - i(b))$$

для некоторой точки $b \in B$, то $u = 1 + \alpha$, где $\alpha \in \tilde{E}^0(B) = E^0(B, \{b\})$.

Доказательство. Так как в силу теоремы 14.6 отображение $\phi_i^*: E^0(B) \rightarrow E^n(X, X - i(B))$ является изоморфизмом, то $t' = p^*(u) \cup t$ для некоторого $u \in E^0(B)$. Аналогично, $t = p^*(u') \cup t' = p^*(u') \cup p^*(u) \cup t = p^*(u'u) \cup t$. Другими словами, $\phi_i^*(u'u) = \phi_i^*(1)$. Следовательно, $u'u = 1$, т. е. u — обратимый элемент.

Гомоморфизм $j_b^*: E^n(X, X - i(B)) \rightarrow E^n(p^{-1}(b), p^{-1}(b) - i(b))$ отображает $p^*(u) \cup t$ в $i^*(u) \cdot j_b^*(t)$, где $i^*(u) \in E^0(b)$. Таким образом, если $j_b^*(t) = j_b^*(t')$, то мы имеем $1 \cdot j_b^*(t) = i^*(u) j_b^*(t)$. Поскольку $E^n(p^{-1}(b), p^{-1}(b) - i(b))$ — свободный $E^0(\text{pt})$ -модуль, то $i^*(u) = 1$, т. е. $i^*(1 - u) = 0$. Следовательно, элемент $-\alpha = 1 - u$ принадлежит ядру $\ker i^* = \tilde{E}^0(B)$. $\square$

14.8. Условимся называть спектр E связным, если $\pi_q(E) = 0$ для $q < 0$. Для связных E и B следствие 14.7 утверждает, что класс Тома t однозначно определяется элементами $j_b^*(t)$, $b \in B$.

14.9. Предложение. Пусть E — связный спектр и $x = (B, p, X, i)$ — некоторое микрорасслоение. Пусть, далее, $\{U_i: 1 \leq i \leq m\}$ — конечное покрытие пространства B открытыми множествами и

$$t_i \in E^n(p^{-1}(U_i), p^{-1}(U_i) - i(U_i))$$

такие элементы, что

i) для каждой точки $b \in U_i$ элемент $j_b^* t_i$ является образующей $E^0(\text{pt})$ -модуля $E^n(p^{-1}(b), p^{-1}(b) - i(b))$;

ii) для любых i, k и для каждой точки $b \in U_i \cap U_k$ имеем $j_b^* t_i = j_b^* t_k$;

Тогда существует и единствен такой класс Тома $t \in E^n(X, X - i(B))$, что $t|_{p^{-1}U_i} = t_i$, $1 \leq i \leq m$.

¹⁾ Здесь $\cup$ — это спаривание $E^*(X) \otimes E^*(X, X - i(B)) \rightarrow E^*(X, X - i(B))$. — Прим. ред.

Доказательство. Будем доказывать это предложение индукцией по m . Если $m=1$, то t_1 — искомый класс Тома. Предположим поэтому, что предложение доказано для всех $m' < m$ и что пространство B в микрорасслоении x имеет покрытие, состоящее из m множеств U_i . Пусть $U = U_1 \cup \dots \cup U_{m-1}$, $V = U_m$, $X_1 = p^{-1}(U)$, $X_2 = p^{-1}(V)$. По предположению индукции существует такой класс Тома $t_U \in E^n(X_1, X_1 - i(U))$, что $t_U|p^{-1}(U_i) = t_i$, $1 \leq i \leq m-1$; обозначим $t_V = t_m$. Согласно п. 14.8 и условию ii) настоящего предложения ограничения отображений t_U и t_V на подпространство $X_1 \cap X_2$ совпадают. Поэтому из точности последовательности Майера — Вьеториса

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow E^n(X, X - i(B)) &\rightarrow E^n(X_1, X_1 - i(U)) \oplus \\ &E^n(X_2, X_2 - i(V)) \rightarrow E^n(X_1 \cap X_2, X_1 \cap X_2 - i(U \cap V)) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

вытекает существование такого элемента $t \in E^n(X, X - i(B))$, что $t|X_1 = t_U$, $t|X_2 = t_V$. Элемент t и является требуемым классом Тома. Если t' — еще один класс Тома, то t и t' будут совпадать в любой точке $b \in B$ и, значит, будут равны в силу п. 14.8. Следовательно, класс Тома t единствен. $\square$

14.10. Предположим теперь, что открытые множества U_i предложения 14.9 являются картами микрорасслоения x . Другими словами, существуют такие окрестности $V_i \subset X$ множеств $i(U_i)$ и такие гомеоморфизмы $h_i: U_i \times \mathbb{R}^n \rightarrow p^{-1}(U_i) \cap V_i$, что $p \circ h_i(u, v) = u$, $h_i(u, 0) = i(u)$, $u \in U_i$. Для каждого i , $1 \leq i \leq m$, выберем образующую $g_i \in E^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$ и обозначим через t_i прообраз элемента $1 \times g_i$ относительно композиции

$$\begin{aligned} E^n(p^{-1}U_i, p^{-1}U_i - i(U_i)) &\cong \\ E^n(p^{-1}U_i \cap V_i, p^{-1}U_i \cap V_i - i(U_i)) &\xrightarrow{h_i^*} E^n(U_i \times (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})). \end{aligned}$$

Тогда элементы t_i удовлетворяют условию i) предложения 14.9, но уже не удовлетворяют условию ii). Вообще, для каждой компоненты N из $U_i \cap U_k$ найдется обратимый элемент $u_N \in E^0(\text{pt})$, для которого $t_i|p^{-1}(N) = u_N \cdot (t_k|p^{-1}(N))$.

В случае $E = H(\mathbb{Z}_2)$ кольцо $E^0(\text{pt})$ имеет лишь один обратимый элемент — единицу 1 этого кольца. Таким образом, в этом случае класс Тома существует, т. е. относительно спектра $H(\mathbb{Z}_2)$ любое микрорасслоение ориентируемо.

У п р а ж н е н и е. Предположим, что многообразие M обладает таким атласом $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$, что все гомеоморфизмы $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}: \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ сохраняют ориентацию. Показать, что тогда касательное микрорасслоение t_M ориентируемо относительно любого связного кольцевого спектра E .

Вернемся теперь к теоремам двойственности для многообразий. Все они будут вытекать из двойственности Александера, которую мы докажем в первую очередь.

Пусть $B \subset A \subset M - \dot{M}$ — некоторые подпространства n -мерного многообразия M . Вложение $A \times (M - B) \rightarrow M \times M$ индуцирует отображение

$$j: (A, B) \times (M - B, M - A) \rightarrow (M \times M, M \times M - \Delta).$$

Если $t \in E^n(M \times M, M \times M - \Delta)$, то можно определить гомоморфизм

$$\gamma: E_r(M - B, M - A) \rightarrow E^{n-r}(A, B),$$

полагая $\gamma_i(x) = j^*t/x$ для всех $x \in E_r(M - B, M - A)$. Гомоморфизм γ_i естествен относительно вложений $(A', B') \subset (A, B)$.

14.11. Теорема (двойственность Александера). Пусть M — некоторое n -мерное многообразие с краем M , $t \in E^n(M \times M, M \times M - \Delta)$ — класс Тома для M и $B \subset A \subset M - \dot{M}$ — компактные полиэдры в $M - \dot{M}$. Тогда гомоморфизм

$$\gamma: E_r(M - B, M - A) \rightarrow E^{n-r}(A, B)$$

является изоморфизмом для всех $r \in \mathbb{Z}$. Аналогично, имеет место изоморфизм

$$\gamma: E_r(A, B) \rightarrow E^{n-r}(M - B, M - A).$$

Доказательство. Рассмотрим различные случаи.

i) $(A, B) = (\{x\}, \emptyset)$, $x \in M - \dot{M}$. Тогда

$$(A, B) \times (M - B, M - A) = \{x\} \times (M, M - \{x\}).$$

Так как t — класс Тома, то $j^*t = 1 \times g$, где $g \in E^n(M, M - \{x\})$ — образующая над $E^*(pt)$ (для любой карты (U, h) , содержащей точку x , имеют место изоморфизмы

$$E^n(M, M - \{x\}) \cong E^n(U, U - \{x\}) \xrightarrow[\cong]{h_*} E^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}).$$

Таким образом, для любого элемента $y \in E_r(M, M - \{x\})$ мы имеем $(1 \times g)/y = \langle g, y \rangle \cdot 1$, откуда следует, что γ_i — изоморфизм.

ii) $(A, B) = (\sigma^q, \emptyset)$, где $\sigma^q \subset M - \dot{M}$ — вложенный q -мерный симплекс, настолько малый, что $\sigma^q \subset U$ для некоторой карты (U, h) . Выберем в симплексе σ^q некоторую вершину v . Тогда имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} E^{n-r}(\sigma^q) & \xleftarrow{\gamma_i} & E_r(M, M - \sigma^q) & \xleftarrow{\cong} & E_r(U, U - \sigma^q) & \xrightarrow[\cong]{h_*} & \\ \cong \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ E^{n-r}(v) & \xleftarrow[\gamma_i]{\cong} & E_r(M, M - \{v\}) & \xleftarrow{\cong} & E_r(U, U - \{v\}) & \xrightarrow[\cong]{h_*} & \\ & & & & & & \\ & & & & E_r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - h(\sigma^q)) & \xrightarrow[\cong]{k_*} & E_r(S^n, S^n - kh(\sigma^q)) \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & E_r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - h(v)) & \xrightarrow[\cong]{k_*} & E_r(S^n, S^n - kh(v)), \end{array}$$

изоморфизм k_* в которой индуцирован вложением $k: \mathbb{R}^n \rightarrow S^n - H_+^n \subset S^n$. Таким образом, $\gamma_i: E_r(M, M - \sigma^q) \rightarrow E^{n-r}(\sigma^q)$ является изоморфизмом одновременно с

$$E_r(S^n, S^n - kh(\sigma^q)) \rightarrow E_r(S^n, S^n - kh(v)).$$

Применяя лемму о пяти гомоморфизмах к точным последовательностям пар $(S^n, S^n - kh(\sigma^q))$ и $(S^n, S^n - kh(v))$, мы видим, что последний гомоморфизм будет изоморфизмом в том и только в том случае, когда $\tilde{E}_r(S^n - kh(\sigma^q)) \cong \tilde{E}_r(S^n - kh(v)) = 0$. Поэтому достаточно показать, что $\tilde{E}_r(S^n - \phi(\sigma^q)) = 0$, $r \in \mathbb{Z}$, для любых вложений $\phi: \sigma^q \rightarrow S^n$, $q \geq 0$, или, эквивалентно, что $\tilde{E}_r(S^n - \phi(I^q)) = 0$ для любых вложений $\phi: I^q \rightarrow S^n$, $q \geq 0$.

Докажем это индукцией по размерности q . Случай $q = 0$ тривиален. Предположим, что $\tilde{E}_*(S^n - \phi(I^{q-1})) \neq 0$ для всех $\phi: I^{q-1} \rightarrow S^n$, и рассмотрим вложение $\phi: I^q \rightarrow S^n$. Пусть $A_0 = \phi(I^q)$, $B_1 = \phi(I^{q-1} \times [0, 1/2])$, $B_2 = \phi(I^{q-1} \times [1/2, 1])$. Тогда мы имеем точную последовательность Майера — Вьеториса

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \tilde{E}_{r+1}(S^n - B_1 \cap B_2) \xrightarrow{\Delta'} \tilde{E}_r(S^n - A_0) \xrightarrow{\alpha} \\ \tilde{E}_r(S^n - B_1) \oplus \tilde{E}_r(S^n - B_2) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Так как $B_1 \cap B_2 = \phi(I^{q-1} \times \{1/2\})$, то из предположения индукции следует, что $\tilde{E}_*(S^n - B_1 \cap B_2) = 0$. Значит, отображение $\alpha: \tilde{E}_*(S^n - A_0) \rightarrow \tilde{E}_*(S^n - B_1) \oplus \tilde{E}_*(S^n - B_2)$ — изоморфизм. Пусть $i_k: S^n - A_0 \rightarrow S^n - B_k$, $k = 1, 2$, — очевидные включения. Если при некотором $r \in \mathbb{Z}$ найдется ненулевой элемент

$$x \in \tilde{E}_r(S^n - A_0),$$

то либо $i_{1*}(x) \in \tilde{E}_r(S^n - B_1)$, либо $i_{2*}(x) \in \tilde{E}_r(S^n - B_2)$ отличен от нуля, — для определенности возьмем $i_{1*}(x)$. Положим $A_1 = B_1$, $x_1 = i_{1*}(x)$. Повторяя этот процесс, мы получим такую последовательность подпространств

$$A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_k \supset \dots$$

и ненулевых элементов $x_k \in \tilde{E}_r(S^n - A_k)$, что $\tilde{E}_r(S^n - A_k) \rightarrow \tilde{E}_r(S^n - A_{k+1})$ переводит x_k в x_{k+1} и $\bigcap_{k \geq 0} A_k = \phi(I^{q-1} \times \{s\})$ для некоторого $s \in I$. В силу упражнения 7.73 и предположения индукции

$$\operatorname{dir} \lim \tilde{E}_r(S^n - A_k) = \tilde{E}_r\left(S^n - \bigcap_{k \geq 0} A_k\right) = 0.$$

С другой стороны, последовательность $\{x_k\}$ определяет ненулевой элемент в $\operatorname{dir} \lim \tilde{E}_r(S^n - A_k)$. Полученное противоречие показывает, что $\tilde{E}_*(S^n - \phi(I^q)) = 0$.

iii) Каждый компактный полиэдр является компактным метрическим пространством, поэтому для любого его открытого покрытия определено число Лебега. Следовательно, мы всегда можем настолько мелко триангулировать наш компактный полиэдр A , чтобы любой симплекс этой триангуляции лежал в некоторой карте заданного на M атласа. Такую триангуляцию полиэдра A назовем хорошей.

Предположим теперь, что теорема доказана для всех пар (A', ϕ) , где A' хорошо триангулирован и число симплексов триангуляции не превосходит $m-1$. Если полиэдр $A \subset M$ имеет хорошую триангуляцию с числом симплексов, равным m , то мы можем считать, что $A = A' \cup \sigma^q$, где $A' \subset A$ — собственное симплициальное подпространство и σ^q — симплекс из A размерности q . Тогда A' и σ^q имеют меньше чем m симплексов.

Рассмотрим триады $(A; \sigma, A')$ и $(M - \dot{\sigma}; M - \sigma, M - A')$, в которых $\sigma \cap A' = \dot{\sigma}$ и $(M - \sigma) \cap (M - A') = (M - A)$, и применим к ним еще один вариант точной последовательности Майера — Вьеториса 7.19. Именно, если $(X; A, B)$ — триада, вырезаемая для теории гомологий h_* и $Y \supset X$, то имеет место точная последовательность

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow h_r(Y, A \cap B) &\xrightarrow{\alpha} h_r(Y, A) \oplus h_r(Y, B) \xrightarrow{\beta} \\ &h_r(Y, X) \xrightarrow{\Delta'} h_{r-1}(Y, A \cap B) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Доказывается это утверждение точно так же, как теорема 7.19. В нашем случае это дает коммутативную диаграмму точных последовательностей

$$\begin{array}{ccccccc} E_{q+1}(M, M - \sigma) \oplus E_{q+1}(M, M - A') & \rightarrow & E_{q+1}(M, M - \dot{\sigma}) & \xrightarrow{\Delta'} & & & \\ \cong \downarrow \gamma_t \oplus \gamma_t & & \cong \downarrow \gamma_t & & & & \\ E^{n-q-1}(\sigma) \oplus E^{n-q-1}(A') & \longrightarrow & E^{n-q-1}(\dot{\sigma}) & \longrightarrow & & & \\ & & & & & & \\ E_q(M, M - A) & \rightarrow & E_q(M, M - \sigma) \oplus E_q(M, M - A') & \rightarrow & E_q(M, M - \dot{\sigma}) & & \\ \downarrow \gamma_t & & \cong \downarrow \gamma_t \oplus \gamma_t & & \cong \downarrow \gamma_t & & \\ E^{n-q}(A) & \longrightarrow & E^{n-q}(\sigma) \oplus E^{n-q}(A') & \longrightarrow & E^{n-q}(\dot{\sigma}). & & \end{array}$$

Из леммы о пяти гомоморфизмах следует, что $\gamma_t: E_q(M, M - A) \rightarrow E^{n-q}(A)$ — изоморфизм для всех q . Поэтому, по предположению индукции, γ_t — изоморфизм для любых пар (A, ϕ) . (Мы снова предлагаем читателю самостоятельно убедиться в том, что указанная выше диаграмма коммутативна, в частности, что $\Delta' \circ \gamma_t = \gamma_t \circ \Delta'$.)

iv) Для любой пары (A, B) мы имеем коммутативную диаграмму точных последовательностей

$$\begin{array}{ccccccc}
 E_{q+1}(M, M-A) & \rightarrow & E_{q+1}(M, M-B) & \rightarrow & E_q(M-B, M-A) & \rightarrow & \\
 \cong \downarrow \gamma_t & & \cong \downarrow \gamma_t & & \downarrow \gamma_t & & \\
 E^{n-q-1}(A) & \longrightarrow & E^{n-q-1}(B) & \longrightarrow & E^{n-q}(A, B) & \longrightarrow & \\
 & & & & E_q(M, M-A) & \rightarrow & E_q(M, M-B) \\
 & & & & \cong \downarrow \gamma_t & & \cong \downarrow \gamma_t \\
 & & & & E^{n-q}(A) & \longrightarrow & E^{n-q}(B).
 \end{array}$$

Применяя к ней лемму о пяти гомоморфизмах, находим, что $\gamma_t: E_q(M-B, M-A) \rightarrow E^{n-q}(A, B)$ — изоморфизм для всех $a \in \mathbb{Z}$. Доказательство того, что $E_r(A, B) \rightarrow E^{n-r}(M-B, M-A)$ является изоморфизмом для всех $q \in \mathbb{Z}$, совершенно аналогично. $\square$

Из только что доказанного утверждения вытекают следующие две теоремы двойственности.

14.12. Теорема (двойственность Лефшеца). Если M — компактное триангулируемое n -мерное многообразие с краем $\dot{M}$ и t — класс Тома для M , то имеют место изоморфизмы

$$E_r(M, \dot{M}) \xrightarrow{\gamma_t} E^{n-r}(M - \dot{M}) \xrightarrow{i^*} E^{n-r}(M)$$

и

$$E_r(M) \xrightarrow{i^*} E_r(M - \dot{M}) \xrightarrow{\gamma_t} E^{n-r}(M, \dot{M}), \quad r \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Рассмотрим воротник края $\dot{M}$, т. е. окрестность $N \cong \dot{M} \times [0, 1)$ края $\dot{M}$ в многообразии M (см. [28], приложение 2). Тогда имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 E_r(M, \dot{M}) & \xrightarrow{\gamma_t} & E^{n-r}(M - \dot{M}) \\
 \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
 E_r(M, N) & \xrightarrow{\gamma_t} & E^{n-r}(M - N)
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \swarrow i^* \\
 E^{n-r}(M) \\
 \swarrow i'^*
 \end{array}$$

Применяя теорему 14.11 к паре $(M-N, \Phi)$, получим, что $\gamma_t: E_r(M, N) \rightarrow E^{n-r}(M-N)$ — изоморфизм. Легко видеть, что край $\dot{M}$ является сильным деформационным ретрактом воротника N , а $M-N$ — сильным деформационным ретрактом многообразия $M - \dot{M}$ и, значит, многообразия M . Следовательно, i'^* и две вер-

тикальные стрелки — также изоморфизмы. Аналогично устанавливается и другой изоморфизм. $\square$

14.13. Теорема (двойственность Пуанкаре). *Если M — компактное триангулируемое n -мерное многообразие без края и t — его класс Тома, то существует изоморфизм*

$$\gamma_r: E_r(M) \rightarrow E^{n-r}(M), \quad r \in \mathbb{Z}.$$

14.14. В то время когда создавалась эта книга, оставался открытым вопрос: триангулируемо ли произвольное топологическое многообразие¹⁾. Если ответ на этот вопрос окажется утвердительным, то теоремы 14.12 и 14.13 справедливы для любых компактных ориентируемых топологических многообразий. Если $E = H(R)$ для некоторого кольца R , то теоремы 14.12 и 14.13 могут быть доказаны для всех топологических многообразий M и без предположения триангулируемости.

Приведенные выше теоремы 14.12 и 14.13 о двойственности Лефшеца и Пуанкаре обычно формулируют в несколько ином виде. Более привычные формулировки включают в себя понятие «фундаментального класса».

14.15. Определение. Пусть M — произвольное n -мерное многообразие. Элемент $z \in E_n(M, \dot{M})$ называется *фундаментальным классом* многообразия M тогда и только тогда, когда для любой точки $x \in M - \dot{M}$ элемент $j_*(z) \in E_n(M, M - \{x\}) (\cong E_-(U, U - \{x\}) \cong E_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}))$ является образующей $E_*(p!)$ -модуля $E_*(M, M - \{x\})$.

Покажем, что изоморфизм, обратный к изоморфизму двойственности Лефшеца, с точностью до знака задается формулой $y \mapsto y \cap z$ для подходящего фундаментального класса z . Для этого нам понадобится следующая лемма Спеньера.

14.16. Лемма. *Пусть M — компактное, ориентируемое, триангулируемое n -мерное многообразие и $\pi_1, \pi_2: M \times M \rightarrow M$ — проекции. Для любых элементов*

$$a \in E^p(M \times M, M \times M - \Delta), \quad b \in E_q(M \times M, M \times M - \Delta)$$

и $c \in E^r(M)$ имеют место равенства

$$\pi_{1*}(a \cap b) = \pi_{2*}(a \cap b) \in E_{q-p}(M),$$

$$a \cup \pi_1^*c = a \cup \pi_2^*c \in E^{p+r}(M \times M, M \times M - \Delta).$$

Доказательство. Перестановка сомножителей

$$1 \times \tau \times 1: M \times M \times M \times M \rightarrow M \times M \times M \times M$$

¹⁾ В настоящее время (декабрь 1984 года) ответ на этот вопрос по-прежнему неизвестен. Современное состояние указанной проблемы изложено в работе Galewski D. E., Stern R. J. Classification of simplicial triangulations of topological manifolds. — Ann. Math., 1980, 111, № 1. — Прим. перев.

определяет отображение

$$T: (M^4, M^4 - \Delta(M^2)) \rightarrow (M^2, M^2 - \Delta) \times (M^2, M^2 - \Delta).$$

Легко видеть, что если $t \in E^n(M^2, M^2 - \Delta)$ — класс Тома многообразия M , то

$$t' = T^*(t \times t) \in E^{2n}(M^4, M^4 - \Delta(M^2))$$

— класс Тома многообразия $M \times M$. Поскольку $T \circ (\tau \times \tau) = \tau' \circ T$, где $\tau'(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_3, x_4, x_1, x_2)$, то $(\tau \times \tau)^*(t') = (-1)^n t'$. Следовательно, диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E_q(M^2, M^2 - \Delta) & \xrightarrow{\tau_*} & E_q(M^2, M^2 - \Delta) \\ & \searrow \cong \gamma_{t'} & \swarrow \cong (-1)^n \gamma_{t'} \\ & E^{2n-q}(\Delta) & \end{array}$$

коммутативна и $\gamma_{t'}$ — изоморфизм в силу теоремы 14.11. Таким образом, $\tau_*(b) = (-1)^n b$ для всех $b \in E_q(M^2, M^2 - \Delta)$ и, аналогично, $\tau^*(a) = (-1)^n a$ для всех $a \in E^p(M^2, M^2 - \Delta)$. Поэтому

$$\pi_{1*}(a \cap b) = \pi_{2*}\tau_*(a \cap b) = \pi_{2*}(\tau^*a \cap \tau_*b) = \pi_{2*}(a \cap b)$$

и

$$a \cup \pi_1^*c = (-1)^n \tau^*(a \cup \pi_1^*c) = a \cup \tau^*\pi_1^*c = a \cup \pi_2^*c. \quad \square$$

14.17. Предложение. Пусть M — компактное триангулируемое n -мерное многообразие с классом Тома t . Тогда существует такой единственный фундаментальный класс $z \in E_n(M, \dot{M})$, что гомоморфизм $\gamma_t: E_n(M, \dot{M}) \rightarrow E^0(M - \dot{M})$ переводит z в 1. Сверх того, изоморфизмы, обратные к двум изоморфизмам двойственности Лефшеца, задаются (с точностью до знака) посредством $\cap$ -умножения на класс z .

Доказательство. В силу теоремы 14.12 гомоморфизм γ_t является изоморфизмом, поэтому найдется такой элемент z , что $\gamma_t(z) = 1$. Для любой точки $x \in M - \dot{M}$ мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} E_n(M, \dot{M}) & \xrightarrow{j_*} & E_n(M, M - \{x\}) \\ \cong \downarrow \gamma_t & & \cong \downarrow \gamma_t \\ E^0(M - \dot{M}) & \xrightarrow{i^*} & E^0(\{x\}). \end{array}$$

Так как $i^*(1) = 1$, то $j_*(z) = \gamma_t^{-1}(1)$. Но γ_t является изоморфизмом $E_*(pt)$ -модулей, поэтому $\gamma_t^{-1}(1)$ есть образующий элемент в $E_*(M, M - \{x\})$. Следовательно, z — фундаментальный класс.

Покажем теперь, что диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
 E^{n-q}(M) & \xrightarrow{\cap z} & E_q(M, \dot{M}) \\
 \searrow i^* & & \swarrow \gamma_t \\
 & E^{n-q}(M - \dot{M}) & \\
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 E_q(M - \dot{M}) & \xrightarrow{\gamma_t} & E^{n-q}(M, \dot{M}) \\
 \searrow i_* & & \swarrow \cap z \\
 & E_q(M) &
 \end{array}$$

коммутативны с точностью до знака. Пусть

$$\begin{aligned}
 j_1: (M - \dot{M}) \times (M, \dot{M}) &\rightarrow (M \times M, M \times M - \Delta), & k_1: (M - \dot{M}) \times M &\rightarrow M \times M, \\
 j_2: (M, \dot{M}) \times (M - \dot{M}) &\rightarrow (M \times M, M \times M - \Delta), & k_2: M \times (M - \dot{M}) &\rightarrow M \times M
 \end{aligned}$$

— включения. Тогда для $y \in E^{n-q}(M)$ имеем

$$\begin{aligned}
 \gamma_t(y \cap z) &= j_1^* t / (y \cap z) = [j_1^* t \cup (1 \times y)] / z = \\
 &= (j_1^* [t \cup \pi_2^* y]) / z = (j_1^* [t \cup \pi_1^* y]) / z = \quad (\text{по 14.16}) \\
 (-1)^{n(n-q)} (j_1^* [\pi_1^* y \cup t]) / z &= (-1)^{n+nq} [(i^* y \times 1) \cup j_1^* t] / z = \\
 &= (-1)^{n+nq} i^* y \cup (j_1^* t / z) = \quad (\text{по 13.61}) \\
 (-1)^{n+nq} i^* y \cup 1 & \quad (\text{по выбору } z) = (-1)^{n+nq} i^* y.
 \end{aligned}$$

Аналогично, для $x \in E_q(M - \dot{M})$ имеем

$$\begin{aligned}
 \gamma_t(x) \cap z &= (j_2^* t / x) \cap z = \pi_{1*} [j_2^* t \cap (z \times x)] = \quad (\text{по 13.61}) \\
 \pi_{1*} k_{2*} [j_2^* t \cap (z \times x)] &= \pi_{1*} [t \cap j_{2*} (z \times x)] = \\
 \pi_{2*} [t \cap j_{2*} (z \times x)] &= \quad (\text{по 14.16}) \\
 \pi_{1*} \tau_* [t \cap j_{2*} (z \times x)] &= (-1)^n \pi_{1*} [t \cap j_{1*} \tau_* (z \times x)] = \\
 (-1)^{n+nq} \pi_{1*} [t \cap j_{1*} (x \times z)] &= \\
 (-1)^{n+nq} \pi_{1*} k_{1*} [j_1^* t \cap (x \times z)] &= \\
 (-1)^{n+nq} i_* \pi_{1*} [j_1^* t \cap (x \times z)] &= \\
 (-1)^{n+nq} i_* [(j_1^* t / z) \cap x] &= \quad (\text{по 13.61}) \\
 (-1)^{n+nq} i_* (x). \quad \square
 \end{aligned}$$

Разумеется, отсюда следует, что изоморфизм, обратный к изоморфизму двойственности Пуанкаре, также задается (с точностью до знака) посредством $\cap$ -умножения на фундаментальный класс.

14.18. Предложение. Пусть E — связный кольцевой спектр. Тогда компактное триангулируемое n -мерное многообразие ориентируемо тогда и только тогда, когда оно имеет фундаментальный класс.

Доказательство. Мы только что видели, что если многообразие M ориентируемо, то оно имеет фундаментальный класс. Пусть теперь z — фундаментальный класс в M ; покажем, как построить по нему класс Тома t . Для каждой точки $b \in M$ мы

имеем изоморфизмы

$$E_n(M, M - \{b\}) \cong E_n(U, U - \{b\}) \xrightarrow[h_*]{} E_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}),$$

$$E^n(M, M - \{b\}) \cong E^n(U, U - \{b\}) \xrightarrow[h^*]{} E^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}),$$

где $h: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ — карта, содержащая b , причем $h(b) = 0$. Пусть $i_b: (M, M) \rightarrow (M, M - \{b\})$ — включение и $z_b = i_{b*}(z) \in E_n(M, M - \{b\})$. Обозначим через $t_b \in E^n(M, M - \{b\})$ такой однозначно определенный элемент, что $\langle t_b, z_b \rangle = 1$.

Возьмем теперь на многообразии M некоторый конечный атлас $\{V_i, h_i\}$. Тогда атлас касательного микрорасслоения к M будет иметь вид $\{V_i, H_i\}$, где $H_i: V_i \times \mathbb{R}^n \rightarrow V_i \times V_i$ — отображение, задаваемое для любых $v \in V_i$, $x \in \mathbb{R}^n$ формулой $H_i(v, x) = (v, h_i^{-1}(h_i(v) - x))$. Пусть (V, h) — некоторая карта атласа $\{V_i, h_i\}$. Введем следующие обозначения: $b_0 = h^{-1}(0) \in V$; для любой точки $b \in V$

$$j_b: (V, V - \{b\}) \rightarrow (V \times V, V \times V - \Delta(V))$$

— включение слоя над b ; отображение

$$h_b: (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) \rightarrow (V, V - \{b\})$$

задается формулой $h_b(x) = \pi_2 \circ H(b, x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, и

$$g_{b_1 b_2} = h_{b_1} \circ h_{b_2}^{-1}: (V, V - \{b_2\}) \rightarrow (V, V - \{b_1\}), \quad b_1, b_2 \in V.$$

Пусть $t_V = (H^{-1})^*(1 \times h_{b_0}^*(t_{b_0} | (V, V - \{b_0\}))) \in E^n(V \times V, V \times V - \Delta(V))$ (см. п. 14.10). Мы хотим показать, что $j_b^*(t_V) = t_b | (V, V - \{b\})$ для любой точки $b \in V$. Так как диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & (V, V - \{b\}) & \\ b \times h_b^{-1} \swarrow & & \searrow j_b \\ V \times (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) & \xrightarrow{H} & (V \times V, V \times V - \Delta(V)) \end{array}$$

коммутативна, соотношение $j_b^*(t_V) = t_b | (V, V - \{b\})$ равносильно следующей цепочке равенств:

$$\begin{aligned} t_b | (V, V - \{b\}) &= (b \times h_b^{-1})^*(1 \times h_{b_0}^*(t_{b_0} | (V, V - \{b_0\}))) \\ &= (h_b^{-1})^* \circ h_{b_0}^*(t_{b_0} | (V, V - \{b_0\})) \\ &= g_{b_0 b}^*(t_{b_0} | (V, V - \{b_0\})) \end{aligned}$$

Отображение $g_{b_0 b}$ можно включить в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} (V, V - \{b\}) & \xrightarrow{g_{b_0 b}} & (V, V - \{b_0\}) \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{h(b)\}) & \xrightarrow{T_b} & (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}), \end{array}$$

где T_b — параллельный перенос на вектор $-h(b)$. Параллельный перенос T_b гомотопен гомеоморфизму $s: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, тождественному вне некоторого шара B , содержащего $h(b)$ и 0 , и отображающему $h(b)$ в 0 . Поэтому g_{b_0b} гомотопно отображению G_{b_0b} , тождественному вне $h^{-1}(B)$. Мы можем, следовательно, продолжить G_{b_0b} до отображения $G_{b_0b}: (M, \dot{M}) \rightarrow (M, \dot{M})$, гомотопного тождественному отображению 1_M . Таким образом, мы получаем гомотопически коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} (V, V - \{b\}) & \xrightarrow{g_{b_0b}} & (V, V - \{b_0\}) \\ \cap J_b & & \cap J_{b_0} \\ (M, M - \{b\}) & \xrightarrow{G_{b_0b}} & (M, M - \{b_0\}) \\ & \nwarrow i_b \quad \nearrow i_{b_0} & \\ & (M, \dot{M}) & \end{array}$$

Значит, $g_{b_0b}^*(t_{b_0} | (V, V - \{b_0\})) = g_{b_0b}^* \circ J_{b_0}^*(t_{b_0}) = J_b^*(G_{b_0b}^*(t_{b_0}))$. Поэтому

$$\begin{aligned} \langle g_{b_0b}^*(t_{b_0} | (V, V - \{b_0\})), J_{b_0}^{-1}(z_b) \rangle &= \langle J_b^* \circ G_{b_0b}^*(t_{b_0}), J_{b_0}^{-1}(z_b) \rangle = \\ &= \langle t_{b_0}, (G_{b_0b})_* i_{b_0}(z) \rangle = \langle t_{b_0}, z_{b_0} \rangle = 1. \end{aligned}$$

Это равенство показывает, что $j_b^*(t_V) = t_b | (V, V - \{b\})$ для всех $b \in V$ и любой карты V . Таким образом, элементы $t_i \in E^n(p^{-1}(V_i), p^{-1}(V_i) - i(V_i))$, соответствующие классам t_{V_i} , удовлетворяют условиям предложения 14.9, и, следовательно, существует такой класс Тома t , что $t | (V_i \times V_i, V_i \times V_i - \Delta(V_i)) = t_{V_i}$. $\square$

З а м е ч а н и е. Условие связности кольцевого спектра E в предложении 14.18 существенно. К сожалению, это условие не выполняется для таких интересных спектров, как K и KO .

Теорема двойственности Александра утверждает, что если X и Y — дополнительные конечные клеточные подпространства евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ (т. е. $Y \simeq \mathbb{R}^n - X$), то для любого кольцевого спектра E существует изоморфизм двойственности между $E^*(X)$ и $E_*(Y)$:

$$E_r(Y) \cong E_r(\mathbb{R}^n - X) \xrightarrow{\gamma} E^{n-r}(\mathbb{R}^n, X) \xrightarrow{\Delta} \tilde{E}^{n-r-1}(X).$$

Существует другое описание этого изоморфизма. Действительно, определим отображение $\mu: X \times Y \rightarrow S^{n-1}$, полагая

$$\mu(u, v) = \frac{u-v}{\|u-v\|}.$$

Тогда изоморфизм двойственности задается формулой

$$\gamma(y) = \mu^*(g) / y, \quad y \in E_*(Y),$$

где $g \in \tilde{E}^{n-1}(S^{n-1})$ — образующая $\tilde{E}^*(S^0)$ -модуля $\tilde{E}^*(S^{n-1})$. Это наблюдение привело Спеньера и Уайтхеда к определению более общей формы двойственности.

14.19. Пусть X, X^* — спектры и $\mu: X^* \wedge X \rightarrow S^0$ — некоторое отображение. Для любых двух спектров U и V построим отображения

$$D_\mu: [U, V \wedge X^*] \rightarrow [U \wedge X, V]$$

и

$${}_\mu D: [U, X \wedge V] \rightarrow [X^* \wedge U, V].$$

Для произвольного отображения $f: U \rightarrow V \wedge X^*$ определим $D_\mu[f]$ как гомотопический класс композиции

$$U \wedge X \xrightarrow{f \wedge 1} V \wedge X^* \wedge X \xrightarrow{1 \wedge \mu} V \wedge S^0 \simeq V.$$

Для отображения $g: U \rightarrow X \wedge V$ определим ${}_\mu D[g]$ как гомотопический класс композиции

$$X^* \wedge U \xrightarrow{1 \wedge g} X^* \wedge X \wedge V \xrightarrow{\mu \wedge 1} S^0 \wedge V \simeq V.$$

Отображения D_μ и ${}_\mu D$ естественны относительно $U' \rightarrow U$ и $V' \rightarrow V$ и поэтому являются гомоморфизмами. Подобным образом для данного отображения $\rho: S^0 \rightarrow X^* \wedge X$ можно определить гомоморфизмы

$$D^\rho: [U \wedge X^*, V] \rightarrow [U, V \wedge X],$$

$${}^\rho D: [X \wedge U, V] \rightarrow [U, X^* \wedge V].$$

14.20. Определение. Говорят, что $\mu: X^* \wedge X \rightarrow S^0$ есть *отображение S-двойственности*, если D_μ и ${}_\mu D$ — изоморфизмы для любых спектров U, V . В этом случае спектр X^* называется *S-двойственным* к спектру X .

14.21. Пример. Если $X = \Sigma^p S^0$, $X^* = \Sigma^{-p} S^0$ и $\mu: X^* \wedge X \rightarrow S^0$ — стандартная гомотопическая эквивалентность $\Sigma^{-p} S^0 \wedge \Sigma^p S^0 \simeq S^0$, то μ является отображением S-двойственности.

14.22. Предложение. Если X, X^* — конечные спектры, то $\mu: X^* \wedge X \rightarrow S^0$ является отображением S-двойственности тогда и только тогда, когда D_μ и ${}_\mu D$ — изоморфизмы для $U = \Sigma^p S^0$, $V = \Sigma^q S^0$ и всех $p, q \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Пусть $U = \Sigma^p S^0$ и $\{V^n\}$ — фильтрация слоями спектра V . Тогда $V^1 = \bigvee_{\alpha \in A_1} \Sigma^{d_\alpha} S^0$, и мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} [U, V^1 \wedge X^*] & \xrightarrow{D_\mu} & [U \wedge X, V^1] \\ \uparrow \{(i_\alpha \wedge 1)_*\} & & \uparrow \{i_{\alpha*}\} \\ \bigoplus_{\alpha \in A_1} [U, \Sigma^{d_\alpha} S^0 \wedge X^*] & \xrightarrow[\bigoplus_{\alpha \in A_1} D_\mu]{\cong} & \bigoplus_{\alpha \in A_1} [U \wedge X, \Sigma^{d_\alpha} S^0]. \end{array}$$

Вертикальные стрелки в этой диаграмме являются изоморфизмами. Это вытекает из следующего общего утверждения: для любого конечного спектра W и любого семейства спектров $\{X_\alpha\}$ имеет место изоморфизм $\{i_{\alpha*}\}: \bigoplus_{\alpha \in A} [W, X_\alpha] \rightarrow [W, \bigvee_{\alpha \in A} X_\alpha]$.

Действительно, если $W = \Sigma^d S^0$, то $\{i_{\alpha*}\}$ — изоморфизм в силу следствия 8.36. Пусть теперь $W = W' \cup C(\Sigma^d S^0)$. Тогда имеет место коммутативная диаграмма с точными строками

$$\begin{array}{ccccc} \bigoplus_\alpha [\Sigma^d S^0, X_\alpha] & \leftarrow & \bigoplus_\alpha [W', X_\alpha] & \leftarrow & \bigoplus_\alpha [W, X_\alpha] \\ \downarrow \{i_{\alpha*}\} & & \downarrow \{i_{\alpha*}\} & & \downarrow \{i_{\alpha*}\} \\ [\Sigma^d S^0, \bigvee_\alpha X_\alpha] & \leftarrow & [W', \bigvee_\alpha X_\alpha] & \leftarrow & [W, \bigvee_\alpha X_\alpha] \\ & & & & \leftarrow \bigoplus_\alpha [\Sigma^{d+1} S^0, X_\alpha] \leftarrow \bigoplus_\alpha [\Sigma W', X_\alpha] \\ & & & & \downarrow \{i_{\alpha*}\} \quad \downarrow \{i_{\alpha*}\} \\ & & & & \leftarrow [\Sigma^{d+1} S^0, \bigvee_\alpha X_\alpha] \leftarrow [\Sigma W', \bigvee_\alpha X_\alpha], \end{array}$$

с помощью которой требуемый изоморфизм доказывается индукцией по числу клеток в W . Итак, в изображенной выше диаграмме $\{(i_\alpha \wedge 1)_*\}$ и $\{i_{\alpha*}\}$ — изоморфизм. Поэтому $D_\mu: [U, V^1 \wedge X^*] \rightarrow [U \wedge X, V^1]$ — также изоморфизм.

Предположим теперь, что D_μ — изоморфизм для $U = \Sigma^p S^0$ и V^{n-1} . Рассмотрим коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \rightarrow [U, \bigvee_{\beta \in A_n} \Sigma^{d_\beta} S^0 \wedge X^*] & \rightarrow & [U, V^{n-1} \wedge X^*] & \rightarrow & & & \\ & \cong \downarrow D_\mu & & \cong \downarrow D_\mu & & & \\ \cdots \rightarrow [U \wedge X, \bigvee_{\beta \in A_n} \Sigma^{d_\beta} S^0] & \rightarrow & [U \wedge X, V^{n-1}] & \rightarrow & & & \\ & & & & [U, V^n \wedge X^*] & \rightarrow & [U, \bigvee_{\beta \in A_n} \Sigma^{d_\beta+1} S^0 \wedge X^*] \rightarrow \cdots \\ & & & & \downarrow D_\mu & \cong \downarrow D_\mu & \\ & & & & [U \wedge X, V^n] & \rightarrow & [U \wedge X, \bigvee_{\beta \in A_n} \Sigma^{d_\beta+1} S^0] \rightarrow \cdots \end{array}$$

В силу леммы о пяти гомоморфизмах D_μ — изоморфизм для $U = \Sigma^p S^0$ и V^n ; поэтому по индукции D_μ является изоморфизмом для $U = \Sigma^p S^0$ и любого слоя фильтрации V^n , $n \geq 0$.

Воспользуемся теперь коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} [U, V \wedge X^*] & \xrightarrow{D_\mu} & [U \wedge X, V] \\ \cong \uparrow \{(i_n \wedge 1)_*\} & & \cong \uparrow \{i_{n*}\} \\ \operatorname{dir} \lim [U, \check{V}^n \wedge X^*] & \xrightarrow[\operatorname{dir} \lim D_\mu]{\cong} & \operatorname{dir} \lim [U \wedge X, V^n], \end{array}$$

в которой $\{(i_n \wedge 1)_*\}$ и $\{i_{n*}\}$ — изоморфизмы согласно лемме 8.34. Тогда D_μ — изоморфизм для $U = \Sigma^p S^0$ и любого спектра V .

Пусть теперь V — произвольный, но фиксированный спектр и $\{U^n\}$ — фильтрация слоями спектра U . Соображения индукции, аналогичные использованным выше, показывают, что $D_\mu: [U^n, V \wedge X^*] \rightarrow [U^n \wedge X, V]$ — изоморфизм для всех $n \geq 0$. И, наконец, имеет место коммутативная диаграмма с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow \lim^1 [U^n, \Sigma^{-1} V \wedge X^*] & \rightarrow & [U, V \wedge X^*] & \rightarrow & \lim^0 [U^n, V \wedge X^*] & \rightarrow & 0 \\ & \cong \downarrow & \downarrow D_\mu & & \cong \downarrow & & \\ & \lim^1 D_\mu & & & \lim^0 D_\mu & & \\ 0 \rightarrow \lim^1 [U^n \wedge X, \Sigma^{-1} V] & \rightarrow & [U \wedge X, V] & \rightarrow & \lim^0 [U^n \wedge X, V] & \rightarrow & 0, \end{array}$$

из которой следует, что D_μ — изоморфизм для любых спектров U и V .

Изоморфизм ${}_\mu D$ доказывается аналогично. $\square$

Замечание. Аналогичными рассуждениями можно показать, что D^0 и ${}^0 D$ будут изоморфизмами для любых спектров U, V в том и только в том случае, если они — изоморфизмы для $U = \Sigma^p S^0, V = \Sigma^q S^0, p, q \in \mathbb{Z}$.

14.23. Предложение. Если $\mu: X^* \wedge X \rightarrow S^0$ — отображение S -двойственности, то таковым же является и отображение $\mu \circ \tau: X \wedge X^* \rightarrow S^0$.

Доказательство. Так как диаграмма

$$\begin{array}{ccc} [U, V \wedge X^*] & \xrightarrow{D_\mu} & [U \wedge X, V] \\ \cong \downarrow \tau_* & & \cong \downarrow \tau^* \\ [U, X^* \wedge V] & \xrightarrow{{}_\mu D} & [X \wedge U, V] \end{array}$$

коммутативна, то ${}_\mu D$ является изоморфизмом одновременно с D_μ . Аналогично, $D_{\mu\tau}$ является изоморфизмом одновременно с ${}_\mu D$. $\square$

Таким образом, если спектр X^* S -двойствен к X , то X является S -двойственным к X^* .

Пусть $\mu: X^* \wedge X \rightarrow S^0$, $\nu: Y^* \wedge Y \rightarrow S^0$ — отображения S -двойственности. В этом случае композиция $\theta(\mu, \nu)$

$$[X, Y] \xrightarrow{\nu^D} [Y^* \wedge X, S^0] \xrightarrow{D_\mu} [Y^*, X^*]$$

является изоморфизмом. Если $f: X \rightarrow Y$ — некоторое отображение, то $[f^*] = \theta(\mu, \nu)[f]$ характеризуется тем свойством, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} Y^* \wedge X & \xrightarrow{f^* \wedge 1} & X^* \wedge X \\ 1 \wedge f \downarrow & & \downarrow \mu \\ Y^* \wedge Y & \xrightarrow{\nu} & S^0 \end{array}$$

коммутативна с точностью до гомотопии.

14.24. Предложение. Пусть $\mu: X^* \wedge X \rightarrow S^0$, $\nu: Y^* \wedge Y \rightarrow S^0$, $\pi: Z^* \wedge Z \rightarrow S^0$ — отображения S -двойственности и $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ — некоторые отображения спектров. Тогда

i) $f^{**} \simeq f$; ii) $(g \cdot f)^* \simeq f^* \cdot g^*$; iii) $1^* \simeq 1$.

Доказательство. Согласно предложению 14.23 можно считать, что $X^{**} = X$, $Y^{**} = Y$. Так как диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} X \wedge Y^* & \xrightarrow{f \wedge 1} & Y \wedge Y^* & & \\ \downarrow 1 \wedge f^* & \searrow \tau & \downarrow \tau & & \\ & Y^* \wedge X & \xrightarrow{1 \wedge f} & Y^* \wedge Y & \\ & \downarrow f^* \wedge 1 & & \downarrow \nu & \\ X \wedge X^* & \xrightarrow{\tau} & X^* \wedge X & \xrightarrow{\mu} & S^0 \end{array}$$

гомотопически коммутативна по определению отображения f^* , то $f \simeq f^{**}$

Далее, диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} Z^* \wedge X & \xrightarrow{1 \wedge f} & Z^* \wedge Y & \xrightarrow{1 \wedge g} & Z^* \wedge Z \\ g^* \wedge 1 \downarrow & & \downarrow g^* \wedge 1 & & \downarrow \pi \\ Y^* \wedge X & \xrightarrow{1 \wedge f} & Y^* \wedge Y & & \\ f^* \wedge 1 \downarrow & & \searrow \nu & & \\ X^* \wedge X & \xrightarrow{\mu} & & & S^0 \end{array}$$

гомотопически коммутативна по определению отображений f^* и g^* . Следовательно, $f^* \cdot g^* \simeq (g \cdot f)^*$. Утверждение iii) очевидно. $\square$

14.25. Следствие. Пусть $\mu: X^* \wedge X \rightarrow S^0$ и $\hat{\mu}: \hat{X}^* \wedge X \rightarrow S^0$ — два отображения S -двойственности. Тогда существует такая гомотопическая эквивалентность $h: X^* \rightarrow \hat{X}^*$, что $\hat{\mu} \cdot (h \wedge 1) \simeq \mu$. При этом h единственна с точностью до гомотопии.

Доказательство. Тождественное отображение $1: X \rightarrow X$ индуцирует отображения $1^* = h: X^* \rightarrow \hat{X}^*$ и $1^* = k: \hat{X}^* \rightarrow X^*$, единственные с точностью до гомотопии и такие, что $\hat{\mu} \cdot (h \wedge 1) \simeq \mu$, $\mu \cdot (k \wedge 1) \simeq \hat{\mu}$. Тогда $h \cdot k$ и $1_{\hat{X}^*}$ представляют собой одно и то же отображение $1^*: \hat{X}^* \rightarrow \hat{X}^*$. Следовательно, $h \cdot k \simeq 1_{\hat{X}^*}$. Аналогично, $k \cdot h \simeq 1_{X^*}$. $\square$

Таким образом, любые два спектра, S -двойственные данному спектру X , каноническим образом гомотопически эквивалентны между собой.

Покажем теперь, что любой конечный спектр обладает S -двойственным спектром.

14.26. Лемма. Пусть $\mu: X^* \wedge X \rightarrow S^0$ и $\nu: Y^* \wedge Y \rightarrow S^0$ — отображения S -двойственности. Тогда их композиция (μ, ν) , определяемая как

$$X^* \wedge Y^* \wedge Y \wedge X \xrightarrow{1 \wedge \nu \wedge 1} X^* \wedge S^0 \wedge X \simeq X^* \wedge X \xrightarrow{\mu} S^0,$$

также будет отображением S -двойственности.

Доказательство. Без труда проверяется, что следующая диаграмма коммутативна для любых спектров U и V :

$$\begin{array}{ccc} [U, V \wedge X^* \wedge Y^*] & \xrightarrow{D_{(\mu, \nu)}} & [U \wedge Y \wedge X, V] \\ D_\nu \searrow \cong & & \cong \nearrow D_\mu \\ & [U \wedge Y, V \wedge X^*] & \end{array}$$

Пусть $\mu: X^* \wedge X \rightarrow S^0$, $\nu: Y^* \wedge Y \rightarrow S^0$ — отображения S -двойственности и $\rho: Y \wedge X \rightarrow S^0$ — произвольное отображение. Поскольку $(Y \wedge X)^* = X^* \wedge Y^*$, то существует такое отображение $\rho^*: S^0 \rightarrow X^* \wedge Y^*$, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} S^0 \wedge Y \wedge X & \xrightarrow{\rho^* \wedge 1} & X^* \wedge Y^* \wedge Y \wedge X \\ \downarrow 1 \wedge \rho & & \downarrow (\mu, \nu) \\ S^0 \wedge S^0 & \simeq & S^0 \end{array}$$

гомотопически коммутативна.

14.27. Лемма. *Отображение $\rho: Y \wedge X \rightarrow S^0$ является отображением S -двойственности тогда и только тогда, когда $D^{\rho*}$ и ${}^{\rho*}D$ — изоморфизмы для всех спектров U, V .*

Доказательство. Так как диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} [U, V \wedge Y] & \xrightarrow[\cong]{\tau_*} & [U, Y \wedge V] & \xrightarrow[\cong]{{}^{\rho}D} & [Y^* \wedge U, V] \\ \downarrow D_{\rho} & & & & \downarrow {}^{\rho*}D \\ [U \wedge X, V] & \xleftarrow[\cong]{D_{\mu}} & [U, V \wedge X^*] & \xleftarrow[\cong]{\tau_*} & [U, X^* \wedge V] \end{array}$$

коммутативна, то D_{ρ} является изоморфизмом одновременно с ${}^{\rho*}D$. Аналогичным образом ${}^{\rho}D$ является изоморфизмом одновременно с $D^{\rho*}$. $\square$

Следовательно, если отображение $\rho: S^0 \rightarrow X^* \wedge X$ тако, что D^{ρ} и ${}^{\rho}D$ — изоморфизмы, то оно также может быть названо отображением S -двойственности. Лемма 14.27 доставляет нам взаимно однозначное соответствие между отображениями S -двойственности $\rho: S^0 \rightarrow X^* \wedge X$ и отображениями S -двойственности, определенными в п. 14.20.

14.28. Лемма. *Если $\mu: X^* \wedge X \rightarrow S^0$, $\nu: Y^* \wedge Y \rightarrow S^0$ — отображения S -двойственности и $f: X \rightarrow Y$ — отображение спектров, то $(\Sigma^p f)^* \simeq \Sigma^{-p}(f^*)$.*

Доказательство. По определению отображения f^* диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^{-p} Y^* \wedge \Sigma^p X & \xrightarrow{\Sigma^{-p} f^* \wedge 1} & \Sigma^{-p} X^* \wedge \Sigma^p X \\ \downarrow 1 \wedge \Sigma^p f & \searrow \cong & \downarrow \mu_p \\ & Y^* \wedge X \xrightarrow{f^* \wedge 1} X^* \wedge X & \\ & \downarrow 1 \wedge f & \swarrow \mu \\ & Y^* \wedge Y & \\ \Sigma^{-p} Y^* \wedge \Sigma^p Y & \xrightarrow{\nu_p} & S^0 \end{array}$$

в которой μ_p, ν_p — очевидные отображения S -двойственности, гомотопически коммутативна. Следовательно, $\Sigma^{-p}(f^*) \simeq (\Sigma^p f)^*$. $\square$

14.29. Лемма. *Пусть $\mu: X^* \wedge X \rightarrow S^0$, $\nu: Y^* \wedge Y \rightarrow S^0$ — отображения S -двойственности и $f: X \rightarrow Y$ — отображение спектров.*

Тогда имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} [U, V \wedge X^*] & \xrightarrow{D_u} & [U \wedge X, V] \\ \uparrow (1 \wedge f^*)_* & & \uparrow (1 \wedge f)^* \\ [U, V \wedge Y^*] & \xrightarrow{D_v} & [U \wedge Y, V]. \end{array}$$

14.30. Лемма. Пусть $f: X \rightarrow Y$, $g: U \rightarrow V$ — непрерывные отображения топологических пространств и $Z = Y \cup_f CX$, $W = V \cup_g CV$. Тогда

$$Z \wedge W / Y \wedge V \cong [(SX \wedge V) \vee (Y \wedge SU)] \cup_h CS[X \wedge U],$$

где h — композиция

$$\begin{aligned} S(X \wedge U) &\xrightarrow{\mu'} S(X \wedge U) \vee S(X \wedge U) \cong \\ &(SX \wedge U) \vee (X \wedge SU) \xrightarrow{(1 \wedge g, f \wedge v')} (SX \wedge V) \vee (Y \wedge SU). \end{aligned}$$

Доказательство. Рассмотрим гомеоморфизм

$$\frac{I \times I}{I \times \{0, 1\} \cup \{0\} \times I} \rightarrow \frac{I \times I}{I \times \{0\} \cup \{0\} \times I},$$

заданная формулой

$$[s, t] \mapsto \begin{cases} [2st, s], & 0 \leq t \leq 1/2, \\ [s, 2s - 2st], & 1/2 \leq t \leq 1 \text{ (рис. 27)}. \end{cases}$$



Рис. 27.

Определим теперь отображение $\phi: [(SX \wedge V) \vee (Y \wedge SU)] \cup_h CS[X \wedge U] \rightarrow Z \wedge W / Y \wedge V$, полагая

$$\phi[t, x, v] = [t, x, v], \quad [t, x, v] \in SX \wedge V,$$

$$\phi[y, t, u] = [y, t, u], \quad [y, t, u] \in Y \wedge SU,$$

$$\phi[s, t, x, u] = \begin{cases} [2st, x, s, u], & 0 \leq t \leq 1/2, \\ [s, x, 2s - 2st, u], & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Легко получить формулы для обратного к ϕ отображения ϕ^{-1} . Непосредственно проверяется, что ϕ и ϕ^{-1} непрерывны. $\square$

14.31. Лемма. Пусть $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} SX \xrightarrow{Sf} CY$ и $Y^* \xrightarrow{f^*} X^* \xrightarrow{g^*} Z^* \xrightarrow{h^*} SY^* \xrightarrow{Sf^*} SX^*$ — корасслоенные последовательности пространств.

Пусть, далее, $\mu: X^* \wedge X \rightarrow S^n$, $\nu: Y^* \wedge Y \rightarrow S^n$ — такие отображения, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} Y^* \wedge X & \xrightarrow{f^* \wedge 1} & X^* \wedge X \\ 1 \wedge f \downarrow & & \downarrow \mu \\ Y^* \wedge Y & \xrightarrow{\nu} & S^n \end{array}$$

гомотопически коммутативна. Тогда найдется такое отображение $\pi: Z^* \wedge Z \rightarrow S^{n+1}$, что имеют место гомотопически коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} Z^* \wedge Y & \xrightarrow{g^* \wedge 1} & SY^* \wedge Y \\ \downarrow 1 \wedge g & & \downarrow S\nu \\ Z^* \wedge Z & \xrightarrow{\pi} & S^{n+1} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X^* \wedge Z & \xrightarrow{h^* \wedge 1} & Z^* \wedge Z \\ \downarrow 1 \wedge h & & \downarrow \pi \\ X^* \wedge SX \cong S(X^* \wedge X) & \xrightarrow{S\mu} & S^{n+1} \end{array}$$

Доказательство. Можно считать, что $Z = Y \cup_f CX$, $Z^* = X^* \cup_f CY^*$. Определим отображение $k: S(Y^* \wedge X) \rightarrow (SY^* \wedge Y) \vee (X^* \wedge SX)$ так же, как в лемме 14.30:

$$S(Y^* \wedge X) \xrightarrow{\mu'} (SY^* \wedge X) \vee (Y^* \wedge SX) \xrightarrow{(1 \wedge f, f^* \wedge \nu')} (SY^* \wedge Y) \vee (X^* \wedge SX).$$

Тогда композиция

$$S(Y^* \wedge X) \xrightarrow{k} (SY^* \wedge Y) \vee (X^* \wedge SX) \xrightarrow{(S\nu, S\mu)} S^{n+1}$$

нульгомотопна. Следовательно, согласно лемме 14.30 существует такое отображение $\rho: Z^* \wedge Z / X^* \wedge Y \rightarrow S^{n+1}$, что $\rho|[(SY^* \wedge Y) \vee (X^* \wedge SX)] \simeq (S\nu, S\mu)$. Определим $\pi: Z^* \wedge Z \rightarrow S^{n+1}$ как композицию

$$Z^* \wedge Z \rightarrow Z^* \wedge Z / X^* \wedge Y \xrightarrow{\rho} S^{n+1}$$

Так как диаграмма

$$\begin{array}{ccc} (Z^* \wedge Y) \vee (X^* \wedge Z) & \xrightarrow{(1 \wedge g, h^* \wedge 1)} & Z^* \wedge Z \\ (g^* \wedge 1) \vee (1 \wedge h) \downarrow & & \downarrow \\ (SY^* \wedge Y) \vee (X^* \wedge SX) & \longrightarrow & Z^* \wedge Z / X^* \wedge Y \\ & \searrow (S\nu, S\mu) \quad \swarrow \rho & \\ & S^{n+1} & \end{array}$$

гомотопически коммутативна, то оба квадрата 14.32 также гомотопически коммутативны. $\square$

14.33. Следствие. Пусть $X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Sigma X \xrightarrow{\Sigma i} \Sigma Y$ — корасслоенная последовательность и $\mu: X^* \wedge X \rightarrow S^0$, $\nu: Y^* \wedge Y \rightarrow S^0$ — отображения S -двойственности. Если X , X^* , Y , Y^* — конечные спектры, то можно построить отображение S -двойственности $\pi: Z^* \wedge Z \rightarrow S^0$ и корасслоенную последовательность

$$X^* \xrightarrow{i^*} Y^* \xrightarrow{g^*} Z^* \xrightarrow{h^*} \Sigma^{-1} X^* \xrightarrow{\Sigma^{-1} i^*} \Sigma^{-1} Y^*.$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что каждый конечный спектр E имеет кофинальный подспектр вида $\Sigma^d E(X)$ для некоторых целого числа d и конечного клеточного пространства X . Действительно, существует такое N , что $E_m = S^{m-N} E_N$ для $m \geq N$ и E_N — конечное клеточное пространство. Поэтому можно взять $X = E_N$ и $d = -N$.

Предположим теперь, что $\mu: X^* \wedge X \rightarrow S^0$ имеет вид $\Sigma^{-d} E(\bar{\mu}): \Sigma^{-d} E(\bar{X}^* \wedge \bar{X}) \rightarrow \Sigma^{-d} E(S^d)$ для некоторого отображения $\bar{\mu}: \bar{X}^* \wedge \bar{X} \rightarrow S^d$ конечных клеточных пространств $\bar{X}$, $\bar{X}^*$. Аналогичным образом предположим, что ν индуцировано отображением конечных клеточных пространств $\bar{Y}: \bar{Y}^* \wedge \bar{Y} \rightarrow S^{d'}$. Переходя, если необходимо, к надстройке, мы можем считать, что $d' = d$. Точно так же полагаем, что f индуцировано отображением $\bar{f}: \bar{X} \rightarrow \bar{Y}$, а f^* — отображением $\bar{f}^*: \bar{Y}^* \rightarrow \bar{X}^*$ (мы снова заменяем, если необходимо, пространства $\bar{X}$, $\bar{Y}$ и т. д. подходящими итерированными надстройками). Применив лемму 14.31 к корасслоенным последовательностям

$$\bar{X} \xrightarrow{i} \bar{Y} \xrightarrow{g} (\bar{Y} \cup_{\bar{f}} C\bar{X}) \xrightarrow{h} S\bar{X} \xrightarrow{S\bar{f}} S\bar{Y}$$

и

$$\bar{Y}^* \xrightarrow{\bar{f}^*} \bar{X}^* \xrightarrow{\bar{h}^*} (\bar{X}^* \cup_{\bar{f}^*} C\bar{Y}^*) \xrightarrow{\bar{g}^*} S\bar{Y}^* \xrightarrow{S\bar{f}^*} S\bar{X}^*,$$

получим отображение $\bar{\pi}: Z^* \wedge Z \rightarrow S^{d+1}$, где $Z = \bar{Y} \cup_{\bar{f}} C\bar{X}$, $Z^* = \bar{X}^* \cup_{\bar{f}^*} C\bar{Y}^*$. Можно считать, что $Z = \Sigma^{-d} E(\bar{Z})$; тогда $Z^* = \Sigma^{d-1} E(\bar{Z}^*)$. Отображение $\bar{\pi}: Z^* \wedge Z \rightarrow S^{d+1}$ определяет функцию $\Sigma^{-d-1} E(\bar{Z}^* \wedge \bar{Z}) \rightarrow \Sigma^{-d-1} E(S^{d+1})$, что, в свою очередь, задает отображение спектров $\pi: Z^* \wedge Z \rightarrow S^0$.

Отображения спектров g^* , h^* определяются посредством отображений g , h . И, наконец, для любых спектров U , V имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}
 [U, V \wedge X^*] & \xleftarrow{(1 \wedge f^*)^*} & [U, V \wedge Y^*] & \xleftarrow{(1 \wedge g^*)^*} & [U, V \wedge Z^*] \\
 \cong \downarrow D_\mu & & \cong \downarrow D_\nu & & \downarrow D_\pi \\
 [U \wedge X, V] & \xleftarrow{(1 \wedge f)^*} & [U \wedge Y, V] & \xleftarrow{(1 \wedge g)^*} & [U \wedge Z, V] \\
 & & & & \downarrow \\
 & & & & \xleftarrow{(1 \wedge h^*)^*} [U, V \wedge \Sigma^{-1} X^*] \xleftarrow{\quad} [U, V \wedge \Sigma^{-1} Y^*] \\
 & & & & \cong \downarrow D_\mu \quad \quad \quad \cong \downarrow D_\nu \\
 & & & & \xleftarrow{(1 \wedge h)^*} [U \wedge \Sigma X, V] \xleftarrow{\quad} [U \wedge \Sigma Y, V].
 \end{array}$$

Согласно лемме о пяти гомоморфизмах D_π — изоморфизм. Тот факт, что πD — изоморфизм, доказывается аналогично. $\square$

14.34. Теорема. *Каждый конечный спектр обладает S -двойственным спектром.*

Доказательство. Мы знаем, что спектр $\Sigma^{-p} S^0$ является S -двойственным для $\Sigma^p S^0$ при любом $p \in \mathbb{Z}$. Поэтому доказательство получается индукцией по числу клеток в спектре с использованием следствия 14.33 в качестве шага индукции. $\square$

В качестве применения понятия S -двойственности докажем теорему о представимости для теорий гомологий. Заметим, что для любого спектра E и отображения S -двойственности $\mu: X^* \wedge X \rightarrow S^0$ имеют место изоморфизмы

$$\begin{aligned}
 D_\mu: E_p(X^*) &\rightarrow E^{-p}(X), \\
 D_{\mu\tau}: E_p(X) &\rightarrow E^{-p}(X^*), \quad p \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

14.35. Теорема. *Пусть k_* — теория гомологий на категории $\mathcal{W}'_F$ конечных клеточных пространств с отмеченной точкой или на категории $\mathcal{S}\mathcal{F}'_F$ конечных спектров. Тогда существуют спектр E и естественная эквивалентность $T_*: E_* \rightarrow k_*$ (на $\mathcal{W}'_F$ или на $\mathcal{S}\mathcal{F}'_F$).*

Доказательство. Можно считать, что теория гомологий k_* определена на категории $\mathcal{S}\mathcal{F}'_F$. В самом деле, если она задана на $\mathcal{W}'_F$, то ее всегда можно продолжить на конечные спектры F , полагая $k_n(F) = \text{dir lim } k_{n+p}(F_p)$. Если $F = \Sigma^d E(X)$ для некоторого конечного клеточного пространства X , то $k_n(F) = k_{n-d}(X)$. Если $f: F \rightarrow F'$ — произвольная функция, то $\{f_{p*}: k_{n+p}(F_p) \rightarrow k_{n+p}(F'_p)\}$ — морфизм прямых систем, и, значит, определен гомоморфизм $f_*: k_n(F) \rightarrow k_n(F')$. В качестве $\sigma: k_n(F) \rightarrow k_{n+1}(\Sigma F)$ возьмем естественную эквивалентность

$$k_n(F) = \text{dir lim } k_{n+p}(F_p) \cong \text{dir lim } k_{n+p+1}(F_{p+1}) = k_{n+1}(\Sigma F).$$

Наконец, если $F \xrightarrow{t} G \xrightarrow{g} H$ — специальная корасслоенная последовательность, то для каждого p имеет место точная последовательность групп и гомоморфизмов

$$k_{n+p}(F_p) \xrightarrow{t_*} k_{n+p}(G_p) \xrightarrow{g_*} k_{n+p}(H_p),$$

остающаяся точной после перехода к прямому пределу (7.50). Поэтому для любой корасслоенной последовательности $F \xrightarrow{t} G \xrightarrow{g} H$ последовательность

$$k_n(F) \xrightarrow{t_*} k_n(G) \xrightarrow{g_*} k_n(H)$$

точна для всех $n \in \mathbb{Z}$. Таким образом, k_* определяет теорию гомологий на $\mathcal{SP}'_F$.

Зададим теперь кофункторы $k^n: \mathcal{SP}'_F \rightarrow \mathcal{A}$, полагая $k^n(X) = k_{-n}(X^*)$, где $X \in \mathcal{SP}'_F$, а X^* — конечный спектр, S -двойственный к X . Так как X^* единствен с точностью до гомотопического типа, то группы $k^n(X)$ корректно определены. Если $f: X \rightarrow Y$ — отображение спектров, положим

$$k^n[f] = k_{-n}[f^*]: k^n(Y) \rightarrow k^n(X).$$

Согласно предложению 14.24 k^n является кофунктором. Определим $\sigma^n: k^{n+1}(\Sigma X) \rightarrow k^n(X)$ как $\sigma_{-n}: k_{-n-1}(\Sigma^{-1} X^*) \rightarrow k_{-n}(X^*)$; ясно, что σ^n — естественная эквивалентность. Если $X \xrightarrow{t} Y \xrightarrow{g} Z$ — корасслоенная последовательность, то таковой же является и $X^* \xrightarrow{t^*} Y^* \xrightarrow{g^*} Z^*$. Отсюда вытекает, что точна последовательность групп и гомоморфизмов

$$\begin{array}{ccccc} k^n(X) & \xleftarrow{f^*} & k^n(Y) & \xleftarrow{g^*} & k^n(Z) \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ k_{-n}(X^*) & \xleftarrow{(f^*)_*} & k_{-n}(Y^*) & \xleftarrow{(g^*)_*} & k_{-n}(Z^*). \end{array}$$

Таким образом, k^* является теорией когомологий на категории $\mathcal{SP}'_F$.

Применяя теперь к k^* теорему 9.27, получим спектр E и естественную эквивалентность $T^*: E^* \rightarrow k^*$ на $\mathcal{SP}'_F$. Определим $T_*: E_* \rightarrow k_*$ как естественную эквивалентность, превращающую квадрат

$$\begin{array}{ccc} E_n(X) & \xrightarrow{T_n(X)} & k_n(X) \\ D_{n*} \downarrow & & \parallel \\ E^{-n}(X^*) & \xrightarrow{T^{-n}(X^*)} & k^{-n}(X^*) \end{array}$$

в коммутативный. Ясно, что этим требованием T_* определена однозначно. $\square$

14.36. Следствие. Пусть k_* — такая теория гомологий на $\mathcal{W}'$ (или $\mathcal{F}'$), что $\{i_{\alpha*}\}: \text{dir lim } k_n(X_\alpha) \rightarrow k_n(X)$ — изоморфизм для любого $n \in \mathbb{Z}$, где $\{X_\alpha\}$ пробегает все конечные клеточные подпространства (или подспектры) X . Тогда существуют спектр E и естественная эквивалентность $T_*: E_* \rightarrow k_*$ на $\mathcal{W}'$ (или $\mathcal{F}'$).

Доказательство. Возьмем спектр E и естественную эквивалентность $T_*: E_* \rightarrow k_*$ на $\mathcal{W}'_F$ (или $\mathcal{F}'_F$), задаваемые теоремой 14.35. Продолжим T_* на $\mathcal{W}'$ (или $\mathcal{F}'$), единственным образом определяя $T_n(X)$ как такой изоморфизм, что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E_n(X) & \xrightarrow{T_n(X)} & k_n(X) \\ \{i_{\alpha*}\} \downarrow \cong & & \cong \downarrow \{i_{\alpha*}\} \\ \text{dir lim } E_n(X_\alpha) & \xrightarrow[\text{dir lim } T_n(X_\alpha)]{\cong} & \text{dir lim } k_n(X_\alpha), \end{array}$$

где $\{X_\alpha\}$ пробегает все конечные клеточные подпространства (подспектры) из X . Вертикальные стрелки в этой диаграмме являются изоморфизмами на основании следствия 8.35 (или леммы 8.34) и предположения о k_* . $\square$

Замечание 1. Можно показать, что предположение следствия 14.36 выполняется для любой теории гомологий k_* , удовлетворяющей аксиоме суммы. Это утверждение является обобщением 7.53 и доказывается с использованием конструкции «обобщенного телескопа».

Замечание 2. Предположим, что на $\mathcal{F}'_F$ заданы две теории гомологий k_* и k'_* с $k_q(S^0) = k'_q(S^0) = 0$ для $q < 0$ и естественное преобразование $T: k_* \rightarrow k'_*$ между ними. Тогда очевидным способом строится естественное преобразование $T_*: k^* \rightarrow k'^*$ соответствующих теорий когомологий и, значит, в силу теоремы 9.30 единственное с точностью до слабой гомотопии отображение $f: E \rightarrow E'$ их представляющих спектров. Если T — естественная эквивалентность, то f является гомотопической эквивалентностью; таким образом, E определено однозначно с точностью до гомотопического типа. Для произвольных теорий гомологий k_* , k'_* ситуация неясна.

В качестве еще одного применения теоремы 14.34 мы изложим более простой и удобный чем теорема 14.22 критерий S -двойственности отображения $\mu: X^* \wedge X \rightarrow S^0(X, X^* - \text{конечные спектры})$.

14.37. Предложение. Пусть X, X^* — конечные спектры. Тогда $\mu: X^* \wedge X \rightarrow S^0$ является отображением S -двойственности в том и только в том случае, когда

$$D_\mu: H_p(X^*; \mathbb{Z}) \rightarrow H^{-p}(X; \mathbb{Z})$$

и

$$D_{\mu\tau}: H_p(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H^{-p}(X^*; \mathbb{Z})$$

— изоморфизмы для всех $p \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Так как спектр X конечен, то в силу теоремы 14.34 существует отображение S -двойственности $v: X' \wedge X \rightarrow S^0$ для некоторого спектра X' . Поэтому определен гомоморфизм $\theta(v, \mu)$

$$[X, X] \xrightarrow{\mu} [X^* \wedge X, S^0] \xrightarrow{\theta(v, \mu)} [X^*, X'].$$

Выберем такое отображение $f: X^* \rightarrow X'$, что $\theta(v, \mu)[1_X] = [f]$, т. е. чтобы была гомотопически коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} X^* \wedge X & \xrightarrow{f \wedge 1} & X' \wedge X \\ \mu \searrow & & \swarrow v \\ & S^0 & \end{array}$$

Отсюда вытекает, что диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \pi_p^S(X') & \xrightarrow{D_v} & \pi_{S^{-p}}(X) \\ \nwarrow f_* & & \nearrow D_\mu \\ & \pi_p^S(X^*) & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} H_p(X'; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{D_v} & H^{-p}(X; \mathbb{Z}) \\ \nwarrow f_* & & \nearrow D_\mu \\ & H_p(X^*; \mathbb{Z}) & \end{array}$$

также коммутативны. Если $D_\mu: H_p(X^*; \mathbb{Z}) \rightarrow H^{-p}(X; \mathbb{Z})$ — изоморфизм при всех $p \in \mathbb{Z}$, то на основании стабильного варианта теоремы 10.28 (теоремы Уайтхеда) отображение f является гомотопической эквивалентностью. Следовательно, $D_\mu: \pi_p^S(X^*) \rightarrow \pi_{S^{-p}}(X)$ — изоморфизм при любом $p \in \mathbb{Z}$. Совершенно аналогично доказывается, что $D_{\mu\tau}: \pi_p^S(X) \rightarrow \pi_{S^{-p}}(X^*)$ является изоморфизмом для любого $p \in \mathbb{Z}$. Таким образом, из предложения 14.22 вытекает, что μ — отображение S -двойственности. $\square$

14.38. Упражнение. Показать, что $D_{\mu\tau}: H_p(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H^{-p}(X^*; \mathbb{Z})$ является изоморфизмом для любого $p \in \mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда $\mu D_* \tau_*: H_p(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H^{-p}(X^*; \mathbb{Z})$ — изоморфизм для любого $p \in \mathbb{Z}$. Подобным же образом D_μ являются изоморфизмами одновременно с $\mu D_* \tau_*$.

Легко видеть, что гомоморфизм $\mu D_* \tau_*$ задается формулой $x \mapsto \mu^*(\iota^0)/x$ для $x \in H_*(X; \mathbb{Z})$, где $\iota^0 \in \tilde{H}^0(S^0; \mathbb{Z})$ — образующая. Таким образом, для того чтобы определить, является ли $\mu: X^* \wedge X \rightarrow S^0$ отображением S -двойственности, достаточно проверить, что $x \mapsto \mu^*(\iota^0)/x$ — изоморфизм. Альтернативно, если

$\rho: S^0 \rightarrow X^* \wedge X$ — отображение, двойственное к μ , то нужно лишь проверить, что $y \mapsto y \setminus \rho_*(\iota_0)$, $y \in H^p(X^*; \mathbb{Z})$ ($\iota_0 \in \check{H}_0(S^0; \mathbb{Z})$ — образующая) — изоморфизм.

Займемся теперь установлением связи между доказанными в начале главы теоремами двойственности (Александера, Лефшеца, Пуанкаре) и понятием S -двойственности.

14.39. Пусть M^n — гладкое замкнутое многообразие. Вложим M^n в сферу S^{n+k} достаточно большой размерности. Пусть ν — нормальное расслоение и N — трубчатая окрестность этого вложения. Очевидно, что N можно отождествить с тотальным пространством расслоения на диски $D(\nu)$, ассоциированного с ν . Так же как в главе 12 мы имеем отображение $\pi: S^{n+k} \rightarrow M(\nu)$, совпадающее на N с проекцией $D(\nu) \rightarrow M(\nu)$ и посылающее $S^{n+k} - \dot{N}$ в отмеченную точку $M(\nu)$. Пусть ρ — композиция

$$S^{n+k} \xrightarrow{\pi} M(\nu) \xrightarrow{\Delta'} M(\nu) \wedge D(\nu)^+ \xrightarrow{1 \wedge \rho} M(\nu) \wedge M^+,$$

где Δ' индуцировано диагональным отображением

$$\Delta: (D(\nu), S(\nu)) \rightarrow (D(\nu) \times D(\nu), S(\nu) \times D(\nu)),$$

и $\rho: D(\nu) \rightarrow M$ — проекция. Мы хотим показать, что ρ является отображением S -двойственности, по крайней мере в случае, когда M ориентируемо относительно $H(\mathbb{Z})$, т. е. в традиционном смысле.

Рассмотрим нормальное расслоение ν как микрорасслоение. Тогда класс Тома представляет собой элемент $t \in E^k(E(\nu), E(\nu) - i(M))$, где $i(M)$ — нулевое сечение. Так как

$$E^k(E(\nu), E(\nu) - i(M)) \cong E^k(D(\nu), D(\nu) - i(M)) \cong E^k(D(\nu), S(\nu)) \cong \check{E}^k(M(\nu)),$$

то можно рассматривать t как элемент группы $E^k(D(\nu), S(\nu)) \cong \check{E}^k(M(\nu))$. Таким образом, изоморфизм Тома ϕ_t представляет собой морфизм

$$\phi_t: \check{E}_{k+r}(M(\nu)) \rightarrow E_r(M).$$

14.40. Лемма. Пусть $t \in \check{E}^k(M(\nu))$ — класс Тома расслоения ν и $\iota_{n+k} \in \check{E}_{n+k}(S^{n+k})$ — образующая. Тогда

$$z = \phi_t(\pi_*(\iota_{n+k})) \in E_n(M)$$

является фундаментальным классом многообразия M .

Доказательство. Мы должны показать, что для каждой точки $x \in M$ образ z в $E_n(M, M - \{x\})$ является образующей $\check{E}_*(S^0)$ -модуля $E_*(M, M - \{x\})$. Возьмем такую координатную окрестность (U, h) точки x , что расслоение ν тривиально над

$V = h^{-1}(D^n)$. Тогда имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}
 \tilde{E}_{n+k}(M(v)) & \xleftarrow{\pi_*} & \tilde{E}_{n+k}(S^{n+k}) & \xrightarrow{\pi'_*} & \tilde{E}_{n+k}(S^{n+k}) \\
 \parallel & & & & \parallel \\
 E_{n+k}(D(v), S(v)) & & & & \\
 \downarrow \cong & \searrow & & & \downarrow \cong \\
 E_{n+k}(D(v), S(v) \cup D(v) | (M - \dot{V})) & \leftarrow & E_{n+k}((V, \dot{V}) \times (D^k, S^{k-1})) & & \\
 \downarrow \phi_t & & \downarrow \phi_t & & \downarrow \phi_t |_{V \times D^k} \\
 E_n(M) & \xrightarrow{\quad} & E_n(M, M - \dot{V}) & \xleftarrow{\cong} & E_n(V, \dot{V}) \\
 \searrow j_* & & \nwarrow \cong & & \\
 & E_n(M, M - \{x\}) & & &
 \end{array}$$

Отображение $\pi': S^{n+k} \rightarrow V \times D^k / V \times D^k \cup V \times S^{k-1} \cong S^{n+k}$ в этой диаграмме совпадает на $D(v) | V$ с проекцией $D(v) | V \rightarrow V$ и переводит $S^{n+k} - (D(v) | V)^0$ в отмеченную точку. Очевидно, что π' является отображением степени 1, т. е. гомотопно $1_{S^{n+k}}$ и, следовательно, переводит ι_{n+k} в ι_{n+k} . Таким образом, $i_*(z)$ — образующая $\tilde{E}_*(S^0)$ -модуля $E_*(M, M - \{x\})$. $\square$

14.41. Лемма. Пусть $\rho: S^{n+k} \rightarrow M(v) \wedge M^+$ — отображение, определенное в п. 14.39, и $z = \phi_t(\pi_*(\iota_{n+k}))$. Тогда для любого $p \in \mathbb{Z}$ диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{E}^{p+k}(M(v)) & \xrightarrow{D^p} & E_{n-p}(M) \\
 \phi_t^* \swarrow & & \nearrow \cap z \\
 & E^p(M) &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 E^p(M) & \xrightarrow{D^p} & \tilde{E}_{n+k-p}(M(v)) \\
 \nwarrow \cap z & & \swarrow \phi_t \\
 & E_{n-p}(M) &
 \end{array}$$

коммутативны с точностью до знака.

Доказательство. Мы можем рассматривать ρ как отображение $S^0 \rightarrow \Sigma^{-n-k} E(M(v)) \wedge E(M^+)$. Тогда

$$\begin{aligned}
 D^p \circ \phi_t^*(x) &= \phi_t^*(x) \setminus \rho_*(\iota_{n+k}) = \phi_t^*(x) \setminus (1 \wedge p)_* \circ \Delta'_* \circ \pi_*(\iota_{n+k}) = \\
 &= \rho_*(\phi_t^*(x) \setminus \Delta'_* \pi_*(\iota_{n+k})) = \rho_*(\phi_t^*(x) \cap \pi_*(\iota_{n+k})) = \\
 &= \rho_*[(p^*(x) \cup t) \cap \pi_*(\iota_{n+k})] = \\
 &= \rho_*[p^*(x) \cap (t \cap \pi_*(\iota_{n+k}))] = \\
 &= x \cap \rho_*(t \cap \pi_*(\iota_{n+k})) = x \cap \phi_t(\pi_*(\iota_{n+k})) = x \cap z.
 \end{aligned}$$

Вторая половина леммы доказывается аналогично. $\square$

14.42. Предложение. Пусть M — замкнутое гладкое многообразие, ориентируемое относительно $H(\mathbb{Z})$. Тогда определенное выше отображение $\rho: S^0 \rightarrow \Sigma^{-n-k} E(M(v)) \wedge E(M^+)$ является отображением S -двойственности, и, значит, $M(v)$ S -двойственно к M^+ .

Доказательство. Так как стабильное нормальное расслоение ν многообразия M и его касательное расслоение τ удовлетворяют условию $\tau \oplus \nu \simeq \varepsilon^{n+k}$ (ε^{n+k} — тривиальное расслоение), то легко видеть, что M ориентируемо тогда и только тогда, когда ориентируемо ν . Поэтому для ν определен класс Тома $t \in \tilde{H}^k(M(\nu))$ и для всех p коммутативны с точностью до знака следующие диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}^{p+k}(M(\nu)) & \xrightarrow{D^p} & H_{n-p}(M) \\ \phi_t^* \swarrow \cong & & \cong \searrow \cap z \\ & H^p(M) & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} H^p(M) & \xrightarrow{D^p} & \tilde{H}_{n+k-p}(M(\nu)) \\ \cap z \swarrow \cong & & \cong \searrow \phi_t \\ & H_{n-p}(M) & \end{array}$$

Таким образом, D^p и D^{p*} — изоморфизмы, откуда на основании предложения 14.37 и упражнения 14.38 вытекает, что p — отображение S -двойственности. $\square$

Тот факт, что $M(\nu)$ S -двойственен к M^+ , верен и для неориентируемых многообразий M .

14.43. Теорема (Спеньер, Милнор). Пусть M — замкнутое гладкое многообразие. Тогда пространство Тома $M(\nu)$ стабильного нормального расслоения над M S -двойственно к M^+ .

Доказательство. Покажем, что $M(\nu)$ имеет гомотопический тип пространства $S(\mathbb{R}^m - M)$. Вложим многообразие M в евклидово пространство $\mathbb{R}^m$ достаточно большой размерности m и отождествим трубчатую окрестность N этого вложения с тотальным пространством расслоения на диски $D(\nu)$. Пространство $\mathbb{R}^m - \dot{N}$ является сильным деформационным ретрактом для $\mathbb{R}^m - M$ и, значит, S -двойственен к M^+ (см. замечания, предшествующие п. 14.19).

Для любого векторного расслоения $\xi \rightarrow X$ можно рассматривать $D(\xi)$ как цилиндр отображения $S(\xi) \rightarrow X$ (где X считается нулевым сечением). Вспомним, что для каждого отображения $f: X \rightarrow Y$ включение $X \subset M_f$ является корасслоением. Поэтому корасслоением будет включение $S(\xi) \subset D(\xi)$, где ξ — произвольное расслоение, и, в частности, включение $\dot{N} \subset N$. Следовательно, $\mathbb{R}^m - \dot{N} \subset \mathbb{R}^m - M$ — тоже корасслоение. Так как пространство $\mathbb{R}^m$ стягиваемо, то пространство $S(\mathbb{R}^m - \dot{N})$ имеет гомотопический тип пространства $\mathbb{R}^m / \mathbb{R}^m - \dot{N}$. Но, с другой стороны, имеет место гомеоморфизм $\mathbb{R}^m / \mathbb{R}^m - \dot{N} \cong N / \dot{N} \cong M(\nu)$. Таким образом, $M(\nu)$ S -двойственен к многообразию M . $\square$

В работе [15] Атья доказал более общий результат: если M — компактное гладкое многообразие с краем M , то $M(\nu)$ S -двойственен к M/M . Доказательство этого утверждения фактически не сложнее доказательства теоремы 14.43.

14.44. Упражнение. Что является аналогами утверждений 14.39—14.42 для многообразий с краем?

14.45. Замечание. Пусть M — некоторое X -многообразие, $\nu: M \rightarrow BO(k)$ — классифицирующее отображение для нормального расслоения к M и $\tilde{\nu}: M \rightarrow X_k$ — поднятие отображения ν . Мы можем рассматривать $1: M \rightarrow M$ как сингулярное X -многообразие в M , что определяет элемент $z_M \in MX_n(M)$ (см. определение 12.34). Применяя конструкцию Понтрягина — Тома (предложение 12.35), получим, что z_M представляется композицией

$$S^{n+k} \xrightarrow{\rho} M(\nu) \wedge M^+ \xrightarrow{M(\tilde{\nu}) \wedge 1} MX_k \wedge M^+,$$

где ρ определено в п. 14.39. Очевидно, что $\{M(\tilde{\nu}): M(\nu) \rightarrow MX_k\} \in \widetilde{MX}^k(M(\nu))$ является классом Тома расслоения ν (см. пример i) после определения 14.5). Рассмотрим первую из диаграмм 14.41 для теории кохомологий MX :

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{MX}^k(M(\nu)) & \xrightarrow{D^0} & MX_n(M) \\ \phi_*^* \swarrow & & \nearrow \cap z \\ & MX^0(M) & \end{array}$$

Имеем

$$z = 1 \cap z = D^0 \phi_t^*(1) = D^0(t) = \{(M(\tilde{\nu}) \wedge 1) \cdot \rho\} = z_M.$$

(Здесь $1 \in MX^0(M) = \widetilde{MX}^0(M^+)$ отвечает отображению $E(M^+) \rightarrow E(S^0) \xrightarrow{t} MX^0$.) Таким образом, сингулярное X -многообразие $1: M \rightarrow M$ определяет фундаментальный класс z_M многообразия M относительно MX , причем $z_M = \phi_t(\pi_*(i_{n+k}))$.

ССЫЛКИ НА ЛИТЕРАТУРУ

1. Адамс [8].
2. Атья [15].
3. Спеньер [71, 72].

В главе 10 мы видели, что если k_* — классическая теория гомологий с коэффициентами G и X — клеточное пространство, то для вычисления групп $k_*(X)$ можно использовать следующую процедуру. Группы $k_q(X^q/X^{q-1})$ и граничные операторы $\Delta: k_q(X^q/X^{q-1}) \rightarrow k_{q-1}(X^{q-1}/X^{q-2})$ тройки (X^q, X^{q-1}, X^{q-2}) образуют цепной комплекс $\{k_q(X^q/X^{q-1}), \Delta\}$, гомологии которого совпадают с $k_*(X)$. Это счастливое совпадение возникает главным образом потому, что $k_n(X^q/X^{q-1}) = 0$ для $n \neq q$, откуда, в частности, следует, что $k_n(X^q) = 0$, если $n > q$, и $k_n(X^q) \cong k_n(X)$, если $n < q$.

Предположим теперь, что k_* — произвольная теория гомологий, удовлетворяющая аксиомам суммы и слабой гомотопической эквивалентности. Что можно сказать о вычислении групп $k_*(X)$ в этой общей ситуации? Разумеется, группа $k_n(X^q/X^{q-1})$ уже не обращается в нуль для всех $n \neq q$, и, следовательно, не равны нулю и многие связанные с ней группы. Однако и в этом общем случае существует метод, позволяющий при удачном стечении обстоятельств вычислить группы $k_*(X)$; правда, на сей раз эти вычисления значительно сложнее описанных выше. Первая настоящая трудность возникает при попытке организовать в обозримую схему все то огромное количество промежуточных групп и гомоморфизмов, большинство которых обращается в нуль или изоморфно друг другу для классической теории гомологий k_* . Половину этой организационной баталии удастся выиграть путем введения подходящей системы обозначений.

Предположим, что h_* — произвольная неприведенная теория гомологий, удовлетворяющая аксиоме суммы. Вместо того чтобы ограничиться клеточными пространствами и их остовами, рассмотрим произвольное топологическое пространство X с *фильтрацией* $\{X^q\}$, т. е. с таким семейством замкнутых подпространств $X^q \subset X$, что $X^q \subset X^{q+1}$ для всех q , $X^q = \bigoplus_{i \leq q} X^i$ для $q < 0$, $\bigcup_q X^q = X$, и любое компактное подмножество в X содержится в некотором X^q . А теперь введем следующие обозначения:

$$Z'_{pq} = \text{im} [j_*: h_{p+q}(X^p, X^{p-r}) \rightarrow h_{p+q}(X^p, X^{p-1})],$$

$$B'_{pq} = \text{im} [\Delta: h_{p+q+1}(X^{p+r-1}, X^p) \rightarrow h_{p+q}(X^p, X^{p-1})],$$

$$Z^{\infty}_{pq} = \text{im} [j_*: h_{p+q}(X^p) \rightarrow h_{p+q}(X^p, X^{p-1})],$$

$$B^{\infty}_{pq} = \text{im} [\Delta: h_{p+q+1}(X, X^p) \rightarrow h_{p+q}(X^p, X^{p-1})],$$

$$F_{pq} = \text{im} [i_*: h_{p+q}(X^p) \rightarrow h_{p+q}(X)].$$

15.1. Предложение. Для любых фиксированных p и q группы $B_{pq}, Z'_{pq}, B_{pq}^\infty, Z_{pq}^\infty$ являются подгруппами в $h_{p+q}(X^p, X^{p-1})$; при этом имеет место следующая цепочка включений:

$$0 = B_{pq}^1 \subset B_{pq}^2 \subset \dots \subset B_{pq}^r \subset B_{pq}^{r+1} \subset \dots \subset B_{pq}^\infty \subset Z_{pq}^\infty \subset \dots \subset Z_{pq}^{r+1} \subset Z'_{pq} \subset \dots \subset Z_{pq}^1.$$

Доказательство. Очевидно, что $B_{pq}^1 = 0$ и $Z_{pq}^1 = h_{p+q}(X^p, X^{p-1})$. Включение $B_{pq}^r \subset B_{pq}^{r+1}$ следует из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} h_{p+q+1}(X^{p+r}, X^p) & \xrightarrow{\Delta} & h_{p+q}(X^p, X^{p-1}) \\ \uparrow j_* & & \uparrow \\ h_{p+q+1}(X^{p+r-1}, X^p) & \xrightarrow{\Delta} & \end{array}$$

Другие включения доказываются аналогично. $\square$

Положим

$$E'_{pq} = Z'_{pq}/B_{pq}^r \quad \text{и} \quad E_{pq}^\infty = Z_{pq}^\infty/B_{pq}^\infty.$$

15.2. Предложение. Имеет место естественный изоморфизм

$$Z'_{pq}/Z_{pq}^{r+1} \cong B_{p-r, q+r-1}^{r+1}/B_{p-r, q+r-1}^r.$$

Доказательство. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} & & h_{p+q}(X^p, X^{p-r-1}) & & \\ & & \downarrow & \searrow j_{1*} & \\ h_{p+q}(X^{p-1}, X^{p-r}) & \longrightarrow & h_{p+q}(X^p, X^{p-r}) & \xrightarrow{j_{2*}} & h_{p+q}(X^p, X^{p-1}) \\ & \searrow \Delta_1 & \downarrow \Delta_2 & & \\ & & h_{p+q-1}(X^{p-r}, X^{p-r-1}), & & \end{array}$$

составленную из точных последовательностей троек (X^p, X^{p-1}, X^{p-r}) и $(X^p, X^{p-r}, X^{p-r-1})$. Изоморфизм 15.2 индуцирован композицией $\Delta_2 \circ j_{2*}^{-1}$. $\square$

Этот изоморфизм позволяет определить отображение $d^r: E'_{pq} \rightarrow E'_{p-r, q+r-1}$ для всех p, q :

$$\begin{array}{ccc} Z'_{pq}/B_{pq}^r & \xrightarrow{\text{эпн}} & Z'_{pq}/Z_{pq}^{r+1} \cong B_{p-r, q+r-1}^{r+1}/B_{p-r, q+r-1}^r \xrightarrow{\text{моно}} Z'_{p-r, q+r-1}/B_{p-r, q+r-1}^r \\ \parallel & & \parallel \\ E'_{pq} & \xrightarrow{d^r} & E'_{p-r, q+r-1}. \end{array}$$

Из определения гомоморфизма d^r следует, что

$$\ker d^r = Z'_{pq}{}^{+1}/B'_{pq}, \quad \text{im } d^r = B'_{p-r}{}^{+1}/B'_{p-r, q+r-1}.$$

Таким образом,

$$\text{im } [d^r: E'_{p+r, q-r+1} \rightarrow E'_{pq}] = B'_{pq}{}^{+1}/B'_{pq}.$$

Следовательно, $\text{im } d^r \subset \ker d^r$, т. е. $d^r \cdot d^r = 0$. Другими словами, для фиксированного r последовательность

$$\dots \rightarrow E'_{p+r, q-r+1} \xrightarrow{d^r} E'_{pq} \rightarrow E'_{p-r, q+r-1} \rightarrow \dots$$

является цепным комплексом. Кроме того,

$$\ker d^r / \text{im } d^r = (Z'_{pq}{}^{+1}/B'_{pq}) / (B'_{pq}{}^{+1}/B'_{pq}) \cong Z'_{pq}{}^{+1}/B'_{pq}{}^{+1} = E'_{pq}{}^{+1}.$$

Итак, мы доказали следующее утверждение.

15.3 Предложение. $E''^{+1}_{**} \cong H(E''_{**}, d^r)$.

Обратимся теперь к группам $F_{pq} \subset h_{p+q}(X)$.

15.4. Предложение. *Имеет место цепочка включений*

$$h_{p+q}(X) \supset \dots \supset F_{pq} \supset F_{p-1, q+1} \supset \dots \supset F_{-1, p+q+1} = 0,$$

причем $\bigcup_{r+s=p+q} F_{rs} = h_{p+q}(X)$. Кроме того, для любых p, q существует естественный изоморфизм

$$F_{pq}/F_{p-1, q+1} \cong E^{\infty}_{pq}.$$

Таким образом, подгруппы $F_{p, n-p} \subset h_n(X)$ образуют бесконечную *фильтрацию* в $h_n(X)$, причем факторгруппы этой фильтрации суть $E^{\infty}_{p, n-p}$.

Доказательство. Включения $F_{pq} \supset F_{p-1, q+1}$ очевидны. Поскольку $\bigcup_p X^p = X$, то в силу упражнения 7.73 имеем

$\{i_{p*}\}: \text{dir } \lim_p h_n(X^p) \cong h_n(X)$. Но $\text{im } \{i_{p*}\} = \bigcup_{r+s=n} F_{rs}$. Для дока-

зательства изоморфизма $F_{pq}/F_{p-1, q+1} \cong E^{\infty}_{pq}$ рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} & & h_{p+q+1}(X, X^p) & & \\ & & \downarrow \partial & \searrow \Delta & \\ h_{p+q}(X^{p-1}) & \longrightarrow & h_{p+q}(X^p) & \xrightarrow{j_*} & h_{p+q}(X^p, X^{p-1}) \\ & \searrow i_{1*} & \downarrow i_{2*} & & \\ & & h_{p+q}(X) & & \end{array}$$

составленную из точных последовательностей пар (X, X^p) и (X^p, X^{p-1}) . Требуемый изоморфизм индуцирован композицией $i_{2*} \circ j_*^{-1}$. $\square$

Все, что осталось теперь, — это перекинуть мост через пропасть, отделяющую член E_{**}^∞ от членов E_{**}^r с конечным r . Само обозначение предполагает следующий результат.

15.5. Предложение. $Z_{pq}^r = Z_{pq}^\infty$ для $r > p$ и $B_{pq}^\infty = \bigcup_{r \geq 1} B_{pq}^r$.

Таким образом, для $r > p$ имеет место эпиморфизм $E_{pq}^r \rightarrow E_{pq}^{r+1}$ и $E_{pq}^\infty = \varinjlim_r E_{pq}^r$.

Доказательство. Для $r > p$ мы имеем

$$Z_{pq}^r = \operatorname{im} [j_*: h_{p+q}(X^p, X^{p-r}) \rightarrow h_{p+q}(X^p, X^{p-1})] = \\ \operatorname{im} [i_*: h_{p+q}(X^p, \phi) \rightarrow h_{p+q}(X^p, X^{p-1})] = Z_{pq}^\infty.$$

Пусть $j_r: (X^{p+r-1}, X^p) \rightarrow (X, X^p)$ — вложение пар. Так как $\bigcup X^n = X$, то

$$\{j_{r*}\}: \varinjlim_r h_{p+q+1}(X^{p+r-1}, X^p) \rightarrow h_{p+q+1}(X, X^p)$$

— изоморфизм (см. упражнение 7.73). Для каждого r обозначим через $\Delta_r: h_{p+q+1}(X^{p+r-1}, X^p) \rightarrow h_{p+q}(X^p, X^{p-1})$ граничный гомоморфизм тройки $(X^{p+r-1}, X^p, X^{p-1})$. Он индуцирует гомоморфизм

$$\Delta: \varinjlim_r h_{p+q+1}(X^{p+r-1}, X^p) \rightarrow h_{p+q}(X^p, X^{p-1}).$$

Кроме того, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{dirlim}_r h_{p+q+1}(X^{p+r-1}, X^p) & \xrightarrow{\Delta} & h_{p+q}(X^p, X^{p-1}) \\ \{j_{r*}\} \searrow \cong & & \nearrow \Delta \\ & h_{p+q+1}(X, X^p). & \end{array}$$

Следовательно, $B_{pq}^\infty = \operatorname{im} \Delta = \operatorname{im} \Delta = \bigcup_{r \geq 1} B_{pq}^r$. Теперь последние два утверждения очевидны. $\square$

15.6 Подытожим теперь полученные нами результаты. Вычисление групп $h_*(X)$ может быть организовано следующим образом:

1) отождествляем $E_{pq}^1 = h_{p+q}(X^p, X^{p-1})$ с какими-либо известными группами (это будет сделано в двух важных случаях; ср. с леммой 10.7).

2) отождествляем $d^1: E_{pq}^1 \rightarrow E_{p-1, q}^1$ с какими-либо известными гомоморфизмами (это также будет сделано; ср. с текстом после леммы 10.7).

3) Вычисляем $E_{pq}^2 = H(E_{pq}^1, d^1)$.

4) Вычисляем d^2 .

5) Вычисляем $E_{pq}^3 = H(E_{pq}^2, d^2)$.

6) Повторяя эту процедуру, находим $E_{pq}^r, r \geq 1$.

7) Находим $E_{pq}^\infty = \text{dir} \lim_r E_{pq}^r$.

8) Полагаем $F_{0,n} = E_{0,n}^\infty$. Для каждого $p > 0$ решаем задачу расширения $0 \rightarrow F_{p-1, n-p+1} \rightarrow F_{p, n-p} \rightarrow E_{p, n-p}^\infty \rightarrow 0$; это позволяет индуктивно вычислить все группы $F_{p, n-p}, p \geq 0$.

9) Вычисляем $h_n(X) = \bigcup_{p \geq 0} F_{p, n-p}$.

З а м е ч а н и е. К сожалению, пункты 4) и 8) данной программы чрезвычайно трудны. Однако имеется много важных частных случаев, в которых эти вычисления удается довести до конца.

Аппарат $\{E_{pq}^r, d^r\}$ носит название *спектральной последовательности*: абстрактная спектральная последовательность — это такая последовательность $E_{**}^1, E_{**}^2, \dots, E_{**}^\infty$ цепных комплексов (временное не станем обращать внимания на тот факт, что они имеют двойную индексацию), что $H(E_{**}^n) \cong E_{**}^{n+1}$. Спектральные последовательности появляются в различных ситуациях. В типичном случае известен член E_{**}^1 (или E_{**}^2), а член E_{**}^∞ связан с каким-либо интересующим нас алгебраическим объектом. Таким образом, промежуточные члены E_{**}^n как бы образуют мост между уже известными объектами и объектами, структуру которых мы желаем знать. Однако за каждый шаг по такому мосту приходится довольно дорого платить: чтобы перейти от E_{**}^n к E_{**}^{n+1} , нужно вычислить соответствующий дифференциал. Стоит отметить, что это лишь один из возможных вариантов применения спектральной последовательности. Часто используется такая схема: отпавляясь от известного члена E_{**}^∞ и имея некоторую информацию о E_{**}^2 , получают полное описание члена E_{**}^2 (см., например, теорему 15.57).

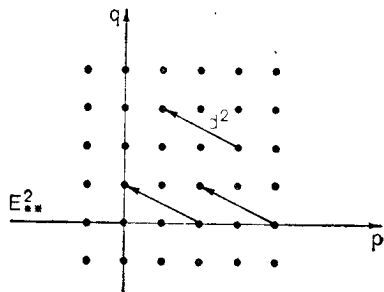


Рис. 28.

При работе со спектральными последовательностями удобно

следующее графическое представление ее компонент: группы E_{pq}^r для фиксированного r изображаются целочисленной решеткой на плоскости (p, q) , а дифференциалы представляются стрелками (рис. 28).

Чтобы полностью описать спектральную последовательность, нужно нарисовать такие диаграммы для всех r . Очень часто поступают по-другому: разбивают плоскость на единичные квадраты

и вписывают в те из них, в которых $E'_{pq} \neq 0$, соответствующие группы или же образующие этих групп. Примером такого изображения спектральной последовательности может служить диаграмма на с. 420 (рис. 33).

Наша спектральная последовательность обладает тем дополнительным свойством, что группы E_{**}^∞ изоморфны последовательным факторам фильтрации

$$\{0\} = F_{0,*} \subset F_{1,*} \subset F_{2,*} \subset \dots \subset F_{n,*} \subset \dots \subset G_*$$

градуированной группы G_* ($=h_*(X)$). Если в этом случае $E_{pq}^\infty = \text{dir lim}_r E'_{pq}$, то говорят, что спектральная последовательность

$\{E'_{pq}, d^r\}$ *сходится* к градуированной группе G_* . Таким образом, построенная нами спектральная последовательность сходится к $h_*(X)$.

Вернемся теперь к пунктам 1) и 2) описанной выше программы вычисления групп $h_*(X)$. Рассмотрим прежде всего случай, когда X — клеточное пространство и $X^n \subset X$ — его n -мерный остов. Тогда $X^p/X^{p-1} \cong \bigvee_\alpha S_\alpha^p$, где индекс α нумерует p -мерные клетки пространства X . Следовательно

$$\begin{aligned} E_{pq}^1 &= h_{p+q}(X^p, X^{p-1}) \cong h_{p+q}(X^p/X^{p-1}, \{*\}) \cong \\ &h_{p+q}\left(\bigvee_\alpha S_\alpha^p, \{*\}\right) \cong \bigoplus_\alpha h_{p+q}(S^p, \{*\}) \cong \\ &\bigoplus_\alpha h_q(S^0, \{*\}) \cong C_p(X) \otimes h_q(\text{pt}), \end{aligned}$$

где $C_p(X) = \tilde{H}_p(X^p/X^{p-1})$ — группа клеточных цепей, определенная в главе 10. Более того, в этом случае дифференциал d^1 есть не что иное, как граничный гомоморфизм

$$h_{p+q}(X^p, X^{p-1}) \xrightarrow{\Delta} h_{p+q-1}(X^{p-1}, X^{p-2}),$$

и точно так же, как в предложении 10.11, проверяется, что он имеет вид

$$d \otimes 1: C_p(X) \otimes h_q(\text{pt}) \rightarrow C_{p-1}(X) \otimes h_q(\text{pt}).$$

Таким образом, мы получаем, что $E_{pq}^2 \cong H_p(X; h_q(\text{pt}))$. Это дает удовлетворительное описание пунктов 1), 2) и 3). Заметим, что хотя член E_{pq}^1 зависит от клеточного разбиения пространства X , член E_{pq}^2 определяется уже самим X .

15.7. Теорема (Атья — Хирцебрух — Уайтхед). Для произвольной теории гомологий h_* и любого клеточного пространства X существует спектральная последовательность $\{E'_{pq}, d^r\}$ с $E_{pq}^2 \cong H_p(X; h_q(\text{pt}))$, сходящаяся к $h_*(X)$.

Другими словами, мы начинаем с классических групп гомологий пространства X и групп коэффициентов h_* и при удачном

стечении обстоятельств (не забывайте о пунктах 4) и 8)!) получаем в итоге группы $h_*(X)$.

Рассмотрим теперь еще один чрезвычайно важный для приложений случай. Пусть $p: E \rightarrow B$ — некоторое расслоение, B — клеточное пространство и B^n — его n -мерный остов. Тогда подпространства $E^i = p^{-1}(B^i)$ образуют фильтрацию пространства E и мы получаем спектральную последовательность $\{E_{pq}^r, d^r\}$, сходящуюся к $h_*(E)$, член E_{pq}^1 которой равен $E_{pq}^1 = h_{p+q}(p^{-1}B^p, p^{-1}B^{p-1})$. Покажем, что $E_{pq}^1 \cong C_p(B) \otimes h_q(F)$, $d^1 = d \otimes 1$, и, следовательно, $E_{pq}^2 \cong H_p(B; h_q(F))$. Для этого нам будут необходимы некоторые дополнительные факты из теории расслоений.

15.8. Пусть $p: E \rightarrow B$ — расслоение и $f: X \rightarrow B$ — некоторое отображение. Положим $E_f = \{(x, e) \in X \times E: f(x) = p(e)\} \subset X \times E$. Проекция $\pi_1: X \times E \rightarrow X$ и $\pi_2: X \times E \rightarrow E$, будучи ограниченными на E_f , задают такие отображения $p_f: E_f \rightarrow X$ и $\tilde{f}: E_f \rightarrow E$, что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E_f & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\ \downarrow p_f & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & B. \end{array}$$

15.9. Предложение. *Отображение $p_f: E_f \rightarrow X$ является расслоением со слоем, гомеоморфным пространству $F = p^{-1}(b_0) = p^{-1}(f(x_0))$.*

Доказательство. Пусть $g: Y \rightarrow E_f$ — некоторое отображение и $H: Y \times I \rightarrow X$ — гомотопия композиции $p_f \circ g$. Тогда $f \circ H: Y \times I \rightarrow B$ является гомотопией $p \circ \tilde{f} \circ g$, и, значит, существует гомотопия $H': Y \times I \rightarrow E$ отображения $\tilde{f} \circ g$, являющаяся поднятием для $f \circ H$, т. е. $p \circ H' = f \circ H$. Это равенство означает в точности, что для всех $(y, t) \in Y \times I$

$$(H(y, t), H'(y, t)) \in E_f.$$

Таким образом, если определить гомотопию $K: Y \times I \rightarrow E_f$ формулой $K = (H, H')$, то мы получим $K_0 = (H_0, H'_0) = (p_f \circ g, \tilde{f} \circ g) = g$ и $p_f \circ K = H$. Следовательно, p_f является расслоением. Слой этого расслоения есть $p_f^{-1}(x_0) = \{(x_0, e): f(x_0) = p(e)\} \cong p^{-1}(b_0) = F$. $\square$

Расслоение $p_f: E_f \rightarrow X$ называется *расслоением, индуцированным* из $p: E \rightarrow B$ при помощи отображения f . Примером может служить рассмотренное в 2.52 расслоение $\pi: P_Y \rightarrow Y$, индуцированное из $PY \rightarrow Y$ при помощи отображения $f: X \rightarrow Y$. Кроме того, в главе II мы рассматривали индуцированные векторные расслоения вида $f^* \xi$.

15.10. Определение. Пусть $p: E \rightarrow B$ — некоторое расслоение. Гомотопия $H: X \times I \rightarrow E$ называется *послойной гомотопией*, если $p \circ H$ — стационарная гомотопия (другими словами, H лишь передвигает точки по содержащим их слоям). Пусть $f, f': X \rightarrow E$ — такие отображения, что $p \circ f = p \circ f'$. Отображения f, f' называются *послойно гомотопными*, если существует связывающая их послойная гомотопия; этот факт будет обозначаться $f \simeq_p f'$. Два расслоения $p: E \rightarrow B$ и $p': E' \rightarrow B'$ называются *послойно гомотопически эквивалентными*, если существуют такие отображения расслоений

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ B & \xrightarrow{f} & B' \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{\bar{g}} & E \\ p' \downarrow & & \downarrow p \\ B' & \xrightarrow{g} & B, \end{array}$$

что $\bar{f} \circ \bar{g} \simeq_{p'} 1_{E'}$, $\bar{g} \circ \bar{f} \simeq_p 1_E$. Два расслоения $p: E \rightarrow B$ и $p': E' \rightarrow B$ с одной и той же базой B называются *сильно послойно гомотопически эквивалентными*, если можно взять $\bar{f} = g = 1$.

15.11. Предложение. Пусть $p: E \rightarrow B$ — некоторое расслоение.

а) Пусть $f_0, f_1: X \rightarrow B$ — два отображения и $H: X \times I \rightarrow E$ — связывающая их гомотопия. Тогда существует такое отображение расслоений $g_H: E_{f_0} \rightarrow E_{f_1}$, что $\bar{f}_1 \circ g_H \simeq \bar{f}_0$ с помощью гомотопии, являющейся поднятием гомотопии $H \cdot (p_{f_0} \times 1)$.

б) Пусть K — еще одна гомотопия между f_0 и f_1 и $M: X \times I \times I \rightarrow E$ — гомотопия $\text{rel } X \times I$ из H в K . Тогда существует послойная гомотопия $g_K \simeq_{p_{f_1}} g_H$.

Доказательство. а) Пусть $H': E_{f_0} \times I \rightarrow E$ — поднятие гомотопии $H \cdot (p_{f_0} \times 1)$, удовлетворяющее условию $H'_0 = \bar{f}_0$. Определим отображение g_H , полагая $g_H = (p_{f_0}, H'_1)$. Так как $p \circ H'_1 = H_1 \cdot p_{f_0} = f_1 \cdot p_{f_0}$, то $g_H(E_{f_0}) \subset E_{f_1}$. Легко видеть, что g_H является отображением расслоений и что $\bar{f}_1 \circ g_H = H'_1 \simeq H'_0 = \bar{f}_0$.

б) Пусть $K': E_{f_0} \times I \rightarrow E$ — поднятие гомотопии $K \cdot (p_{f_0} \times 1)$, удовлетворяющее условию $K'_0 = \bar{f}_0$, и g_K — отображение, определенное формулой $g_K = (p_{f_0}, K'_1)$. Для $A = 0 \times I \cup I \times I \subset I \times I$ определим отображение $M': E_{f_0} \times A \rightarrow E$, полагая $M'(x, t, 0) = H'(x, t)$, $M'(x, t, 1) = K'(x, t)$, $M'(x, 0, s) = \bar{f}_0(s)$ для всех $x \in E_{f_0}$, $s, t \in I$. Тогда $p \circ M' = M \cdot (p_{f_0} \times 1) \mid E_{f_0} \times A$. Используя стандартный гомеоморфизм $I \times I \rightarrow I \times I$, который переводит A в $0 \times I$, мы можем следующим образом переформулировать свойство накрывающей гомотопии для p : существует поднятие $M': E_{f_0} \times I \times I \rightarrow E$ гомотопии $M \cdot (p_{f_0} \times 1 \times 1)$, продолжающее определенное выше отображение $E_{f_0} \times A$. Пусть $L: E_{f_0} \times I \rightarrow E_{f_1}$ — отображение, заданное формулой $L(e', t) = (p_{f_0}(e'), M'(e', 1, t))$, $e' \in E_{f_0}$, $t \in I$.

Тогда $L(e', 0) = g_H(e')$, $L(e', 1) = g_K(e')$, и, значит, L — послойная гомотопия между g_H и g_K . $\square$

З а м е ч а н и е. Гомотопический класс $\{g_H\}$ отображения g_H из предложения 15.11, а) однозначно определен.

Предложение 15.11 допускает несколько важных приложений.

15.12. Для любой точки $b \in B$ положим $F_b = p^{-1}(b)$. Если обозначить через $*$ пространство, состоящее из единственной точки, и через $f: * \rightarrow B$ — отображение с $f(*) = b$, то $E_f \cong F_b$. Любой путь ω в B из b_1 в b_2 можно рассматривать как гомотопию, связывающую отображения $* \rightarrow b_1$ и $* \rightarrow b_2$. Таким образом, мы получаем отображение $h_\omega: F_{b_2} \rightarrow F_{b_1}$. Если ω' — еще один путь из b_1 в b_2 , гомотопный $\text{rel } I$ пути ω , то связывающая их гомотопия является гомотопией гомотопий из 15.11, б) и, следовательно, существует гомотопия $h_\omega \simeq h_{\omega'}$.

Так же, как в главе 3 (см. текст, следующий за предложением 3.30), обозначим через $PB(b_1, b_2)$ множество гомотопических классов путей в B , соединяющих точки b_1 и b_2 . Тогда соответствие $\alpha[\omega] = [h_\omega]$ определяет отображение $\alpha: PB(b_1, b_2) \rightarrow [F_{b_2}, F_{b_1}]$. По построению, α обладает следующими свойствами:

- i) $\alpha[\omega * \omega'] = \alpha[\omega] \cdot \alpha[\omega']$, $[\omega] \in PB(b_1, b_2)$, $[\omega'] \in PB(b_2, b_3)$;
- ii) $\alpha[\omega_0] = [1_{F_b}]$, где ω_0 — постоянный путь в точке b .

В частности, $\alpha[\omega]$ всегда является гомотопической эквивалентностью и, значит, если пространство B линейно связно, то все слои, расслоения $p: E \rightarrow B$ имеют один и тот же гомотопический тип.

15.13. Определение. Отображение $\phi: F_{b_2} \rightarrow F_{b_1}$ называется *допустимым*, если $[\phi] = \alpha[\omega]$ для некоторого $[\omega] \in PB(b_1, b_2)$. Из свойств i) и ii) вытекает, что композиция двух допустимых отображений — снова допустимое отображение и что любое допустимое отображение является гомотопической эквивалентностью, причем гомотопически обратное к нему также может быть выбрано допустимым. Если пространство B линейно связно, то существуют допустимые отображения между любыми двумя слоями расслоения $p: E \rightarrow B$.

15.14. Определение. Пусть h_* — некоторая теория гомологий. Для любого расслоения $p: E \rightarrow B$ со слоем $F = p^{-1}(b_0)$ имеет место спаривание

$$15.15. \pi_1(B, b_0) \times h_*(F) \xrightarrow{\theta} h_*(F),$$

задаваемое формулой $\theta([\omega], x) = \alpha[\omega]_* x$. Используя свойства i), ii) из п. 15.12, нетрудно видеть, что θ является действием группы $\pi_1(B, b_0)$ на $h_*(F)$. Говорят, что расслоение $p: E \rightarrow B$ *ориентируемо* относительно теории гомологий h , если это групповое действие тривиально для всех $b_0 \in B$, т. е. если $\gamma x = x$ для всех $\gamma \in \pi_1(B, b_0)$, $x \in h_*(F)$. В случае когда пространство B линейно связно, для ориентируемости достаточно, чтобы действие было тривиальным для какой-либо одной точки $b_0 \in B$.

15.16. Предложение¹⁾. Пусть $f_0, f_1: X \rightarrow B$ — (свободно) гомотопные отображения. Тогда существует такая сильная послойная гомотопическая эквивалентность $g: E_{f_0} \rightarrow E_{f_1}$, что $f_1 \circ g \simeq f_0$ и отображение $(g|F_{f_0(x_0)}): F_{f_0(x_0)} \rightarrow F_{f_1(x_0)}$ допустимо. (Свободная гомотопия, вообще говоря, не сохраняет отмеченные точки.)

Доказательство. Пусть H — гомотопия, связывающая отображения f_0 и f_1 . Положим $\bar{H}(x, t) = H(x, 1 - t)$, $x \in X, t \in I$, и обозначим через $H', \bar{H}'$ поднятия этих гомотопий. Пусть $g_H = (p_{f_0}, H'_1)$, $g_{\bar{H}} = (p_{f_1}, \bar{H}'_1)$. Определим теперь гомотопии $K: X \times I \rightarrow B$ и $M: X \times I \times I \rightarrow B$ формулами

$$K(x, t) = \begin{cases} H(x, 2t), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ H(x, 2 - 2t), & 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$$M(x, t, s) = \begin{cases} f_0(x), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ H(x, 2t - s), & s/2 \leq t \leq 1/2, \\ H(x, 2 - 2t - s), & 1/2 \leq t \leq 1 - s/2, \\ f_0(x), & 1 - s/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Тогда гомотопия K' , задаваемая правилом

$$K'(e', t) = \begin{cases} H'(e', 2t), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ \bar{H}'(g_H(e'), 2t - 1), & 1/2 \leq t \leq 1, \quad e' \in E_{f_0}, \end{cases}$$

является поднятием гомотопии $K \cdot (p_{f_0} \times 1)$, причем $K'_0 = f_0$, $(p_{f_0}, K'_1) = g_{\bar{H}} \circ g_H$. Следовательно, мы можем положить $g_K = g_{\bar{H}} \circ g_H$. Пусть теперь M — гомотопия из 15.11, б), соединяющая K со стационарной гомотопией отображения f_0 . Тогда мы имеем $g_{\bar{H}} \circ g_H = g_K \simeq_{p_{f_0}} 1_{E_{f_0}}$. По соображениям симметрии $g_H \circ g_{\bar{H}} \simeq_{p_{f_1}} 1_{E_{f_1}}$. Наконец, если $\omega(t) = H(x_0, 1 - t)$, то легко видеть, что $[g_H|F_{f_0(x_0)}] = \alpha([\omega])$. $\square$

15.17. Определение. Пусть $p: E \rightarrow B$ — расслоение со слоем $F = p^{-1}(b_0)$. Его *гомотопической тривиализацией* называется такая сильная послойная гомотопическая эквивалентность $g: B \times F \rightarrow E$, что отображение $g|b_0 \times F$ допустимо.

15.18. Следствие. Если пространство X стягиваемо в точку x_0 , то любое расслоение над X обладает гомотопической тривиализацией

Доказательство. Пусть $H: X \times I \rightarrow X$ — гомотопия с $H_1 = 1_X$ и $H_0(x) = x_0$ для всех $x \in X$. Заметим, что $E_{1_X} \cong E$ и $E_{H_0} = X \times F$, поэтому согласно предложению 15.16 существует допустимая на слое над x_0 сильная послойная гомотопическая эквивалентность

$$X \times F = E_{H_0} \xrightarrow{g} E_{H_1} \cong E. \quad \square$$

¹⁾ Ниже до следствия 15.21 включительно предполагается, что задано некоторое расслоение $p: E \rightarrow B$. — Прим. ред.

15.19. Следствие. Пусть $f_0, f_1: X \rightarrow B$ — два отображения, связанные (свободной) гомотопией H . Предположим, кроме того, что пространство X стягиваемо, и пусть

$$g_0: X \times F_{f_0(x_0)} \rightarrow E_{f_0}, \quad g_1: X \times F_{f_1(x_0)} \rightarrow E_{f_1}$$

— гомотопические тривиализации. Тогда существует такое допустимое отображение $\phi: F_{f_0(x_0)} \rightarrow F_{f_1(x_0)}$, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X \times F_{f_0(x_0)} & \xrightarrow{g_0} & E_{f_0} \\ 1 \times \phi \downarrow & & \downarrow g_H \\ X \times F_{f_1(x_0)} & \xrightarrow{g_1} & E_{f_1} \end{array}$$

коммутативна с точностью до послойной гомотопии.

Доказательство. Мы имеем сильные послойные гомотопические эквивалентности

$$X \times F_{f_0(x_0)} \xrightarrow{g_0} E_{f_0} \xrightarrow{g_H} E_{f_1} \xrightarrow{\frac{g_1}{g_1^{-1}}} X \times F_{f_1(x_0)},$$

причем ограничение каждой из них на слой является допустимым отображением. Композиция $g_1^{-1} \cdot g_H \cdot g_0$ имеет вид $(x, f) \mapsto (x, \theta(x, f))$ для некоторого отображения $\theta: X \times F_{f_0(x_0)} \rightarrow F_{f_1(x_0)}$, обладающего тем свойством, что $\phi = \theta(x_0, -): F_{f_0(x_0)} \rightarrow F_{f_1(x_0)}$ допустимо. Пусть $K: X \times I \rightarrow X$ — гомотопия, связывающая тождественное отображение X с отображением, переводящим X в точку x_0 (деформация X в x_0). Определим отображение

$$\lambda: X \times F_{f_0(x_0)} \times I \rightarrow E_{f_1},$$

полагая $\lambda(x, f, t) = g_1(x, \theta(K(x, t), f))$. Легко видеть, что λ — послойная гомотопия, связывающая $g_1 \cdot (1 \times \phi)$ с $g_1 \cdot g_1^{-1} \cdot g_H \cdot g_0 \simeq_p g_H \cdot g_0$. $\square$

15.20. Замечание. Так как пространство X в только что доказанном следствии стягиваемо, то оно линейно связно. Поэтому всегда существует допустимое отображение $\phi: F \rightarrow F_{f(x_0)}$. Это позволяет считать композицию $\bar{g}_f = g_f \cdot (1 \times \phi): X \times F \rightarrow E_f$ гомотопической тривиализацией. Пусть $f': X \rightarrow B$ — отображение, гомотопное f , $g_{f'}: X \times F_{f'(x_0)} \rightarrow E_{f'}$ — гомотопическая тривиализация и $\phi': F \rightarrow F_{f'(x_0)}$ — допустимое отображение. Согласно следствию 15.19 существует такое допустимое отображение $\phi'': F_{f(x_0)} \rightarrow F_{f'(x_0)}$, что $g_H \cdot g_f \simeq_{p_f} g_{f'} \cdot (1 \times \phi'')$. Тогда $\phi''' = \phi^{-1} \cdot \phi'' \cdot \phi: F \rightarrow F$ является допустимым отображением, причем

$$g_H \cdot \bar{g}_f \simeq_{p_f} g_{f'} \cdot (1 \times \phi''').$$

15.21. Следствие. Если $p: E \rightarrow B$ — расслоение и $f: X \rightarrow B$ — гомотопическая эквивалентность, то $\bar{f}: E_f \rightarrow E$ также является гомотопической эквивалентностью.

Доказательство. Обозначим через $g: B \rightarrow X$ отображение, гомотопически обратное к f . Тогда возникает индуцированное расслоение $(E_f)_g \cong E_{f \circ g}$. Поскольку $f \circ g \cong 1_B$, то в силу предложения 15.16 существует такая сильная послойная гомотопическая эквивалентность $h: E (= E_{1_B}) \rightarrow E_{f \circ g}$, что $\bar{f} \circ \bar{g} \circ h \simeq 1_B = 1_E$.

Кроме того, мы имеем $E_{f \circ g \circ f} \xrightarrow{\bar{f}} E_{f \circ g} \xrightarrow{\bar{g}} E_f$, а так как $g \circ f \simeq 1_X$, то найдется сильная послойная гомотопическая эквивалентность $k: E_f \rightarrow E_{f \circ g \circ f}$, для которой $g \circ \bar{f} \circ k \simeq 1_X = 1_{E_f}$. Таким образом, имеет место следующая цепочка гомотопий:

$$\begin{aligned} \bar{g}h\bar{f} &= \bar{g}h\bar{f}1_{E_f} \simeq (\bar{g}h\bar{f})(\bar{g}\bar{f}k) \simeq \bar{g}h\bar{f}\bar{g}(hh^{-1})\bar{f}k = \\ &= \bar{g}h(\bar{f}\bar{g}h)h^{-1}\bar{f}k \simeq \bar{g}hh^{-1}\bar{f}k \simeq \bar{g}\bar{f}k \simeq 1_{E_f}. \end{aligned}$$

Следовательно, отображения $\bar{f}: E_f \rightarrow E$ и $\bar{g}: h: E \rightarrow E_f$ гомотопически обратны друг другу. $\square$

15.22. Теперь мы в состоянии заняться доказательством изоморфизма $E_{p,q}^* \cong H_p(B; h_q(F))$. Если $p: E \rightarrow B$ — расслоение и $X \subset B$ — произвольное подпространство, то символом $E|X$ будет обозначаться подпространство $p^{-1}(X) \subset E$. Пусть $Y \subset X \subset B$ — некоторые подпространства и

$$f: (D^p, S^{p-1}) \rightarrow (X, Y)$$

— отображение пар. Так как диск D^p стягиваем, то в силу следствия 15.18 существует гомотопическая тривиализация $g_f: D^p \times F \rightarrow E_f$. Тем самым мы получаем отображение κ_f , являющееся композицией

$$\begin{aligned} h_q(F) &\xrightarrow{\alpha} h_{p+q}((D^p, S^{p-1}) \times F) \xrightarrow{g_{f*}} \\ &h_{p+q}(E_f, E_f|S^{p-1}) \xrightarrow{f_*} h_{p+q}(E|X, E|Y), \end{aligned}$$

где $\alpha(x) = \kappa_p \times x$ и $\kappa_p \in h_p(D^p, S^{p-1})$ — каноническая образующая $h_*(pt)$ -модуля $h_*(D^p, S^{p-1})$ (здесь мы предполагаем, что h_* — мультипликативная теория гомологий). Пусть

$$f': (D^p, S^{p-1}) \rightarrow (X, Y)$$

— еще одно отображение, свободно гомотопное f . Согласно предложению 15.16 существует сильная послойная гомотопическая эквивалентность $g: E_f \simeq E_{f'}$ с $\bar{f}' \circ g \simeq \bar{f}$. Если $g_{f'}: D^p \times F \rightarrow E_{f'}$ — гомотопическая тривиализация, то в силу следствия 15.19 найдется такое допустимое отображение $\phi: F \rightarrow F$, что $g \circ g_f \simeq_{pf} g_{f'} \circ (1 \times \phi)$. Следовательно, мы имеем

$$\bar{f}_* \circ g_{f*} \circ \alpha = \bar{f}'_* \circ g_* \circ g_{f*} \circ \alpha = \bar{f}'_* \circ g_{f'*} \circ (1 \times \phi)_* \circ \alpha = \bar{f}'_* \circ g_{f'*} \circ \alpha \circ \phi_*.$$

Если предположить, что расслоение $p: E \rightarrow B$ ориентируемо относительно теории гомологий h_* , то $\phi_* = 1$, так что $\kappa_f = \kappa_{f'}$. Таким образом, κ_f зависит лишь от гомотопического класса $[f]$ отображения f . Чтобы подчеркнуть этот факт, будем в дальнейшем вместо κ_f использовать обозначение $\kappa_{[f]}$.

Для произвольного пространства X с отмеченной точкой x_0 положим $\pi_1^*(X, x_0) = \pi_1(X, x_0)/[\pi_1, \pi_1]$, где через $[\pi_1, \pi_1]$ обозначен коммутатор группы $\pi_1(X, x_0)$. Если $Y \subset X$ — некоторое подпространство в X и $x_0 \in Y$, положим $\pi_n^*(X, Y) = \pi_n(X, Y, x_0)/G$, где G — подгруппа, порожденная всеми элементами вида $\gamma x - x$, $\gamma \in \pi_1(Y, x_0)$, $x \in \pi_n(X, Y, x_0)$, $n \geq 2$. (Мы не указываем в обозначении группы $\pi_n^*(X, Y)$ отмеченную точку x_0 ; в дальнейшем мы увидим, что эта группа не зависит от выбора отмеченной точки.)

15.23. Лемма. Пусть h_* — мультипликативная теория гомологий и $p: E \rightarrow B$ — ориентированное в h_* расслоение. Тогда отображение k определяет билинейное спаривание

$$\pi_p^*(X, Y) \times h_q(F) \rightarrow h_{p+q}(E|X, E|Y), \quad p \geq 1,$$

естественное относительно включений пар $Y \subset X \subset B$. В случае $p=1$ мы полагаем $Y = \{x_0\}$.

Доказательство. Имеет место очевидное спаривание

$$\pi_p(X, Y, x_0) \times h_q(F) \rightarrow h_{p+q}(E|X, E|Y),$$

линейное по второму аргументу. Напомним, что сложение в $\pi_p(X, Y, x_0)$ определяется с помощью коумножения $\mu': CS^{p-1} \rightarrow CS^{p-1} \vee CS^{p-1}$: если $[f], [h] \in \pi_p(X, Y, x_0)$, то $[f] + [h]$ представляет собой гомотопический класс $[\Delta' \circ (f \vee h) \circ \mu']$. Расслоенные пространства E_f и E_h имеют один и тот же слой F , поэтому $E_{\Delta' \circ (f \vee h)}$ — расслоенное пространство над $CS^{p-1} \vee CS^{p-1}$, получающееся из E_f и E_h отождествлением соответствующих точек слоя F . Выберем гомотопические тривиализации $g_f: CS^{p-1} \times F \rightarrow E_f$, $g_h: CS^{p-1} \times F \rightarrow E_h$ так, чтобы они совпадали на $* \times F$. Склеивая g_f и g_h , получим гомотопическую тривиализацию

$$g_j \sim g_h: (CS^{p-1} \vee CS^{p-1}) \times F \rightarrow E_{\Delta' \circ (f \vee h)}.$$

Поэтому мы можем выбрать такую гомотопическую тривиализацию

$$g_{j+h}: CS^{p-1} \times F \rightarrow E_{j+h},$$

что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} CS^{p-1} \times F & \xrightarrow{\mu' \times 1} & (CS^{p-1} \vee CS^{p-1}) \times F \\ \downarrow g_{f+h} & & \downarrow g_f \sqcup g_h \\ E_{f+h} & \xrightarrow{\bar{\mu}'} & E_{\Delta' \circ (f \vee h)} \end{array}$$

последовательно гомотопически коммутативна.

Так как

$$h_*(E_{\Delta' \circ (f \vee h)}, E_{\Delta' \circ (f \vee h)} | (S^{p-1} \vee S^{p-1})) \cong h_*(E_f, E_f | S^{p-1}) \oplus h_*(E_h, E_h | S^{p-1}),$$

то мы имеем

$$\begin{aligned}\bar{\Delta}'_* \circ (\bar{f} \vee \bar{g})_* \circ \bar{\mu}'_* \circ (g_{f+h})_* \circ \alpha(x) = \\ \bar{\Delta}'_* \circ (\bar{f} \frown \bar{h})_* \circ (g_f \frown g_h)_* \circ (\mu' \times 1)_* \circ \alpha(x) = \\ \bar{f}_* \circ g_{f*}(\kappa_p \times x) + \bar{h}_* \circ g_{h*}(\kappa_p \times x) = \kappa_{[f]}(x) + \kappa_{[h]}(x)\end{aligned}$$

для всех $x \in h_q(F)$. Это доказывает «линейность» по первому аргументу (напомним, что группы $\pi_2(X, Y, x_0)$ и $\pi_1(X, x_0)$ могут быть неабелевыми). Поскольку γx и x свободно гомотопны, то отображение κ пропускается через $\pi_p^*(X, Y) \times h_q(F)$. $\square$

Таким образом, κ индуцирует гомоморфизм

$$\kappa: \pi_p^*(X, Y) \otimes h_q(F) \rightarrow h_{p+q}(E|X, E|Y),$$

естественный относительно вложений пар.

15.24. Лемма. Гомоморфизм κ коммутирует с граничным оператором точной последовательности тройки (X, Y, Z) . Более подробно, для любого $p \geq 2$ ($Z = \{x_0\}$ для $p = 2$) имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}\pi_p(X, Y, x_0) \otimes h_q(F) & \xrightarrow{k \otimes 1} & \pi_p^*(X, Y) \otimes h_q(F) & \xrightarrow{\kappa} & h_{p+q}(E|X, E|Y) \\ \downarrow \Delta \otimes 1 & & & & \downarrow \Delta \\ \pi_{p-1}(Y, Z, x_0) \otimes h_q(F) & \xrightarrow{k \otimes 1} & \pi_{p-1}^*(Y, Z) \otimes h_q(F) & \xrightarrow{\kappa} & h_{p+q-1}(E|Y, E|Z).\end{array}$$

Здесь $k: \pi_p(X, Y, x_0) \rightarrow \pi_p^*(X, Y)$ — естественная проекция.

Доказательство. Пусть $x \in h_q(F)$, $[f] \in \pi_p(X, Y, x_0)$. Тогда

$$\begin{aligned}\Delta \cdot \kappa \cdot k \otimes 1([f] \otimes x) = j_* \circ \partial \circ \bar{f}_* \circ g_{f*}(\kappa_p \times x) = \\ j_* \circ (\bar{f}|(E_f|S^{p-1}))_* \circ (g_f|S^{p-1} \times F)_*(\partial \kappa_p \times x)\end{aligned}$$

Обозначим через $\rho: (CS^{p-2}, S^{p-2}) \rightarrow (S^{p-1}, *)$ стандартную проекцию и определим отображение $h: (CS^{p-2}, S^{p-2}) \rightarrow (Y, X)$ как композицию

$$(CS^{p-2}, S^{p-2}) \xrightarrow{\rho} (S^{p-1}, *) \xrightarrow{j \circ S^{p-1}} (Y, x_0) \xrightarrow{j} (Y, X).$$

Легко видеть, что $\Delta[f] = [h]$. Выберем теперь такую гомотопическую тривиализацию $g_h: CS^{p-2} \times F \rightarrow E_h$, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc}CS^{p-2} \times F & \xrightarrow{g_h} & E_h \\ \downarrow \rho \times 1 & & \downarrow \bar{\rho} \\ S^{p-1} \times F & \xrightarrow{(g_f|S^{p-1} \times F)} & E_f|S^{p-1}\end{array}$$

последнюю гомотопически коммутативна. В результате мы получаем

$$\begin{aligned} \kappa \circ k \otimes 1 \circ \Delta \otimes 1 ([f] \otimes x) &= \bar{h}_* \circ g_{h_*} (\kappa_{p-1} \times x) = \\ j_* \circ (f| (E_f | S^{p-1}))_* \circ \bar{p}_* \circ g_{h_*} (\kappa_{p-1} \times x) &= \\ j_* \circ (f| (E_f | S^{p-1}))_* \circ (g_f | S^{p-1} \times F)_* \circ (\rho \times 1)_* (\kappa_{p-1} \times x) &= \\ j_* \circ (f| (E_f | S^{p-1}))_* \circ (g_f | S^{p-1} \times F)_* (\partial \kappa_p \times x) &= \Delta \circ \kappa \circ (k \otimes 1) ([f] \otimes x). \square \end{aligned}$$

15.25. Лемма. Если $p: E \rightarrow D^p$ — расслоение, то

$$\kappa: \pi_p^*(D^p, S^{p-1}) \otimes h_q(F) \rightarrow h_{p+q}(E, E|S^{p-1})$$

— изоморфизм для всех $p \geq 2$. Аналогично, если $p: E \rightarrow S^1$ — расслоение, то

$$\kappa: \pi_1(S^1, *) \otimes h_q(F) \rightarrow h_{q+1}(E, F)$$

— изоморфизм.

Доказательство. Так как диск D^p стягиваем, то существует гомотопическая тривиализация $g: D^p \times F \rightarrow E$; в действительности $g = g_f$, где $f: (D^p, S^{p-1}) \rightarrow (D^p, S^{p-1})$ — тождественное отображение. Следовательно, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi_p^*(D^p, S^{p-1}) \otimes h_q(F) & \xrightarrow{\kappa} & h_{p+q}(E, E|S^{p-1}) \\ \cong \uparrow \beta & & \cong \uparrow g_* \\ h_q(F) & \xrightarrow[\cong]{\alpha} & h_{p+q}((D^p, S^{p-1}) \times F), \end{array}$$

в которой $\beta(x) = [1] \otimes x$. Поскольку $\pi_p^*(D^p, S^{p-1}) \cong \mathbb{Z}$, то β — изоморфизм. Гомоморфизм α также является изоморфизмом: для доказательства достаточно заметить, что $h_*(D^p, S^{p-1})$ — свободный $h_*(pt)$ -модуль с образующей κ_p , и применить теорему 13.75. Таким образом, κ — изоморфизм. Случай $p: E \rightarrow S^1$ рассматривается аналогично. $\square$

15.26. Лемма. Пусть $p: E \rightarrow B$ — ориентируемое в h_* расслоение и $B \in \mathcal{W}$ — клеточное пространство с $B^0 = \{b_0\}$. Тогда

$$\kappa: \pi_p^*(B^p, B^{p-1}) \otimes h_q(F) \rightarrow h_{p+q}(E|B^p, E|B^{p-1})$$

— изоморфизм для всех $p \geq 1$.

Доказательство. Пусть $\chi: \left(\bigvee_{\alpha} D_{\alpha}^p, \bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^{p-1} \right) \rightarrow (B^p, B^{p-1})$ — «большое характеристическое отображение» для p -мерных клеток пространства B . Покажем прежде всего, что

$$\bar{\chi}_*: h_* \left(E_{\chi}, E_{\chi} \middle| \bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^{p-1} \right) \rightarrow h_* (E|B^p, E|B^{p-1})$$

— изоморфизм. Пусть $N \subset B^p$ — такая замкнутая окрестность остова B^{p-1} , что B^{p-1} является сильным деформационным ретрак-

том для N . Тогда вложение $i: B^{p-1} \rightarrow N$ является гомотопической эквивалентностью, поэтому согласно следствию 15.21 $i: E|B^{p-1} \rightarrow E|N$ также гомотопическая эквивалентность. Из леммы о пяти гомоморфизмах следует, что

$$j_*: h_*(E|B^p, E|B^{p-1}) \rightarrow h_*(E|B^p, E|N)$$

— изоморфизм. Пусть $N' = \chi^{-1}(N) \subset \bigvee_{\alpha} D_{\alpha}^p$. Как и раньше, $\bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^{p-1}$ является сильным деформационным ретрактом пространства N' . Значит, мы имеем изоморфизм

$$h_*(E_{\chi}, E_{\chi} | \bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^{p-1}) \rightarrow h_*(E_{\chi}, E_{\chi} | N').$$

Если $B^{p-1} \subset N_1 \subset \bar{N}_1 \subset \bar{N}$, то имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} h_*(E_{\chi}, E_{\chi} | \bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^{p-1}) & \xrightarrow{\cong} & h_*(E_{\chi}, E_{\chi} | N') & \xleftarrow{\cong} & h_*(E_{\chi} | (\bigvee_{\alpha} D_{\alpha}^p - N_1), E_{\chi} | (N' - N_1)) \\ \downarrow \tilde{\chi}_* & & \downarrow \tilde{\chi}_* & & \cong \downarrow \tilde{\chi}_* \\ h_*(E|B^p, E|B^{p-1}) & \xrightarrow{\cong} & h_*(E|B^p, E|N) & \xleftarrow{\cong} & h_*(E|(B^p - N_1), E|(N - N_1)). \end{array}$$

Две горизонтальные стрелки справа являются изоморфизмами по аксиоме вырезания, а вертикальный гомоморфизм $\tilde{\chi}_*$ справа индуцирован гомеоморфизмом. Следовательно,

$$\tilde{\chi}_*: h_*(E_{\chi}, E_{\chi} | \bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^{p-1}) \rightarrow h_*(E|B^p, E|B^{p-1})$$

— изоморфизм, как и утверждалось. Отметим, что эти рассуждения верны для любой теории гомологий и, в частности, для классической теории гомологий.

Чтобы завершить теперь доказательство леммы, рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} H_p(B^p, B^{p-1}) \otimes h_q(F) & \xleftarrow[\cong]{\chi_* \otimes 1} & H_p(\bigvee_{\alpha} D_{\alpha}^p, \bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^{p-1}) \otimes h_q(F) & \xleftarrow[\cong]{\{i_{\alpha*} \otimes 1\}} & \oplus_{\alpha} H_p(D_{\alpha}^p, S_{\alpha}^{p-1}) \otimes h_q(F) \\ \uparrow \cong \uparrow h \otimes 1 & & \uparrow h \otimes 1 & & \uparrow \cong \uparrow h \otimes 1 \\ \pi_p^*(B^p, B^{p-1}) \otimes h_q(F) & \xleftarrow[\cong]{\chi_* \otimes 1} & \pi_p^*(\bigvee_{\alpha} D_{\alpha}^p, \bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^{p-1}) \otimes h_q(F) & \xleftarrow[\cong]{\{i_{\alpha*} \otimes 1\}} & \oplus_{\alpha} \pi_p^*(D_{\alpha}^p, S_{\alpha}^{p-1}) \otimes h_q(F) \\ \downarrow \kappa & & \downarrow \kappa & & \downarrow \cong \downarrow \kappa \\ h_{p+q}(E|B^p, E|B^{p-1}) & \xleftarrow[\cong]{\tilde{\chi}_*} & h_{p+q}(E_{\chi}, E_{\chi} | \bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^{p-1}) & \xleftarrow[\cong]{\{\tilde{i}_{\alpha*}\}} & \oplus_{\alpha} h_{p+q}(E_{\chi} | D_{\alpha}^p, E_{\chi} | S_{\alpha}^{p-1}). \end{array}$$

Гомоморфизм κ справа является изоморфизмом по лемме 15.25. Гомоморфизм Гуревича

$$h: \pi_p^*(D^p, S^{p-1}) \rightarrow H_p(D^p, S^{p-1})$$

является изоморфизмом, поскольку пара (D^p, S^{p-1}) $(p-1)$ -связна. Разумеется, мы предполагаем, что теория гомологий h_* удовлетворяет аксиоме суммы.

В случае $p=1$ мы берем отображение $\chi: \bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^1 \rightarrow B^1$; тогда χ и χ_* — гомеоморфизмы. $\square$

15.27. Теорема (Лере — Серр). Пусть h_* — мультипликативная теория гомологий, удовлетворяющая аксиоме суммы для клеточных пространств и аксиоме слабой гомотопической эквивалентности. Тогда для любого расслоения $p: E \rightarrow B$ с линейно связным пространством B , ориентируемого относительно h_* , существует спектральная последовательность $\{E_{pq}^r, d^r\}$, сходящаяся к $h_*(E)$. Член E_{pq}^2 этой последовательности есть

$$E_{pq}^2 \subseteq H_p(B; h_q(F))$$

для любых p, q . Спектральная последовательность естественна относительно отображений расслоений.

Доказательство. Вначале предположим, что B — клеточное пространство с отмеченной точкой b_0 и $B^0 = \{b_0\}$. Рассмотрим два экземпляра изоморфизма κ : один для расслоения $p: E \rightarrow B$ и теории h_* , а другой — для расслоения $1: B \rightarrow B$ и теории $H_*(-; \mathbb{Z})$. Таким образом, мы получаем изоморфизм

$$\begin{array}{ccc} h_{p+q}(E|B^p, E|B^{p-1}) & \xleftarrow{\kappa} \pi_p^*(B^p, B^{p-1}) \otimes h_q(F) & \xrightarrow{h \otimes 1} H_p(B^p, B^{p-1}) \otimes h_q(F) \\ \parallel & \cong & \cong \\ E_{pq}^1 & & C_p(B) \otimes h_q(F). \end{array}$$

Соединив вместе два экземпляра диаграммы 15.24, мы получим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} h_{p+q}(E|B^p, E|B^{p-1}) & \xleftarrow{\kappa} & \pi_p^*(B^p, B^{p-1}) \otimes h_q(F) & \xrightarrow{h \otimes 1} & H_p(B^p, B^{p-1}) \otimes h_q(F) \\ \downarrow \Delta & & \uparrow k \otimes 1 & & \downarrow d \otimes 1 \\ & & \pi_p(B^p, B^{p-1}, b_0) \otimes h_q(F) & & \\ & & \downarrow \Delta \otimes 1 & & \\ & & \pi_{p-1}(B^{p-1}, B^{p-2}, b_0) \otimes h_q(F) & & \\ & & \downarrow k \otimes 1 & & \\ h_{p+q-1}(E|B^{p-1}, E|B^{p-2}) & \xleftarrow{\kappa} & \pi_{p-1}^*(B^{p-1}, B^{p-2}) \otimes h_q(F) & \xrightarrow{h \otimes 1} & H_{p-1}(B^{p-1}, B^{p-2}) \otimes h_q(F), \end{array}$$

в которой $k \otimes 1$ — эпиморфизм. Из этой диаграммы следует, что наш изоморфизм

$$E_{pq}^1 \cong C_p(B) \otimes h_q(F)$$

является цепным отображением. Случай $p=0$ не является исключением, поскольку

$$h_q(E|B^0, E|B^{-1}) \cong C_0(B) \otimes h_q(F)$$

и оба гомоморфизма

$$\partial: h_{q+1}(E|B^1, E|B^0) \rightarrow h_q(E|B^0, \emptyset)$$

и

$$d: C_1(B) \rightarrow C_0(B)$$

нулевые (в предыдущей размерности $\partial\kappa([\omega] \otimes x) = \alpha([\omega])_*(x) - x = 0$ и $\kappa: \pi_1^*(B^1, b_0) \otimes h_q(F) \rightarrow h_{q+1}(E|B^1, E|B^0)$ — изоморфизм). Таким образом, κ индуцирует естественный изоморфизм

$$\hat{\kappa}: E_{pq}^2 \cong H_p(B; h_q(F))$$

для всех p, q . Итак, в случае, когда B является клеточным пространством, наша спектральная последовательность индуцирована фильтрацией его остовами.

Рассмотрим теперь расслоение $p: E \rightarrow B$, где B — произвольное линейно связное пространство. Выберем для B клеточный эквивалент $f': B' \rightarrow B$ с $B'^0 = \{b'_0\}$. Пусть $p': E' \rightarrow B'$ — индуцированное расслоение E_f . Тогда из точности гомотопических последовательностей расслоений $p: E \rightarrow B$, $p': E' \rightarrow B'$ и из леммы о пяти гомоморфизмах вытекает, что $\tilde{f}: E' \rightarrow E$ — слабая гомотопическая эквивалентность. Следовательно, $\tilde{f}_*: h_*(E') \rightarrow h_*(E)$ — изоморфизм. Значит, спектральная последовательность расслоения $p': E' \rightarrow B'$ обладает свойством $E_{pq}' \cong H_p(B'; h_q(F)) \cong H_p(B; h_q(F))$ и сходится к $h_*(E') \cong h_*(E)$. Естественность «продолженной» таким образом спектральной последовательности немедленно вытекает из рассмотрения клеточных эквивалентов. $\square$

Замечание 1. Спектральная последовательность Атья — Хирцебруха — Уайтхеда теоремы 15.7 получается из последовательности 15.27 как частный случай, причем не обязательно требовать, чтобы X было клеточным пространством, а достаточно только его линейной связности. Действительно, для этого нужно лишь применить последовательность 15.27 к расслоению $1: X \rightarrow X$, ориентируемому относительно любой теории гомологий.

Замечание 2. Имеются относительные варианты спектральной последовательности 15.27. В частности, пусть $\dot{E} \subset E$ — такое подпространство, что $(p|\dot{E}): \dot{E} \rightarrow B$ также является расслоением. Положим $\dot{F} = F \cap \dot{E}$. Тогда существует спектральная последовательность $\{E_{pq}', d^r\}$ с

$$E_{pq}' \cong H_p(B; h_q(F, \dot{F})),$$

сходящаяся к $h_*(E, \dot{E})$. Для того чтобы получить эту последовательность, достаточно заменить в ее «абсолютном» аналоге группы $h_{p+q}(E|B^p, E|B^{p-1})$ на $h_{p+q}(E|B^p, E|B^{p-1} \cup \dot{E}|B^p)$.

Упомянем еще об одной относительной спектральной последовательности. Пусть $B_0 \subset B$ — некоторое подпространство. Тогда существует сходящаяся к $h_*(E, E|B_0)$ спектральная последовательность с

$$E_{pq}^i \cong H_p(B, B_0; h_q(F)).$$

В частности, имеет место приведенная спектральная последовательность Атьи — Хирцебруха — Уайтхеда $\tilde{H}_p(X; h_q(S^0)) \Rightarrow \tilde{h}_*(X)$.

Замечание 3. Все полученные нами результаты о спектральных последовательностях для гомологий h_* имеют аналоги и для когомологий. Предлагаем интересующемуся читателю в качестве весьма полезного упражнения восстановить все детали в конструкции когомологической спектральной последовательности. Заметим, однако, что когомологический аналог предложения 15.5, вообще говоря, не верен из-за нетривиальности функтора $\lim^1$.

Замечание 4. Построенные нами спектральные последовательности согласованы с умножениями. В частности, если $p_1: E_1 \rightarrow B_1$, $p_2: E_2 \rightarrow B_2$ — два расслоения, то $p_1 \times p_2: E_1 \times E_2 \rightarrow B_1 \times B_2$ также является расслоением со слоем $F_1 \times F_2$. Обозначим спектральные последовательности расслоений p_1 , p_2 и $p_1 \times p_2$ соответственно через $E'_{pq}(1)$, $E'_{pq}(2)$ и $E'_{pq}(3)$. Тогда $\times$ -умножение индуцирует для всех p, q, r, s, t естественное спаривание

$$\times^r: E'_{pq}(1) \otimes E'_{st}(2) \rightarrow E'_{p+s, q+t}(3).$$

Если ввести на $E'_{**}(1) \otimes E'_{**}(2)$ дифференциал $d'_{\otimes}$, задаваемый формулой

$$d'_{\otimes}(a \otimes b) = d^r(1)a \otimes b + (-1)^{\deg a} a \otimes d^r(2)b,$$

где $\deg a = p + q$ для $a \in E'_{pq}(1)$, то $\times^r$ станет цепным отображением, т. е. $d^r(3) \circ \times^r = \times^r \circ d'_{\otimes}$. Кроме того, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H(E'_{**}(1)) \otimes H(E'_{**}(2)) & \xrightarrow{\times} & H(E'_{**}(1) \otimes E'_{**}(2)) \\ \parallel & & \downarrow \times^r_* \\ E'^{r+1}_{**}(1) \otimes E'^{r+1}_{**}(2) & \xrightarrow{\times^{r+1}} & E'^{r+1}_{**}(3) \cong H(E'_{**}(3)). \end{array}$$

Гомологическое $\times$ -умножение

$$\times: h_*(E_1) \times h_*(E_2) \rightarrow h_*(E_1 \times E_2)$$

определяет умножение

$$\times: F_{pq}(1) \otimes F_{st}(2) \rightarrow F_{p+s, q+t}(3),$$

причем индуцированное им отображение

$$\times^\infty: E^\infty_{pq}(1) \otimes E^\infty_{st}(2) \rightarrow E^\infty_{p+s, q+t}(3)$$

совпадает с $\text{dir lim } \times^r$. И, наконец,

$$\times^2: E_{**}^2(1) \otimes E_{**}^2(2) \rightarrow E_{**}^2(3)$$

совпадает с обычным гомологическим $\times$ -умножением

$$\times: H_p(B_1; h_q(F_1)) \otimes H_s(B_2; h_t(F_2)) \rightarrow H_{p+s}(B_1 \times B_2; h_{q+t}(F_1 \times F_2)),$$

соответствующим спариванию

$$h_q(F_1) \otimes h_t(F_2) \xrightarrow{\times} h_{q+t}(F_1 \times F_2)$$

групп коэффициентов.

Доказательства всех этих утверждений не сложны, однако очень громоздки. Прежде всего, вводится спаривание

$$h_{p+q}(X^p, X^{p-1}) \otimes h_{s+t}(Y^s, Y^{s-1}) \xrightarrow{\times} \\ h_{p+s+q+t}(X^p \times Y^s, X^p \times Y^{s-1} \cup X^{p-1} \times Y^s) \xrightarrow{i_*} \\ h_{p+s+q+t}((X \times Y)^{p+s}, (X \times Y)^{p+s-1}).$$

Затем проверяется, что оно отображает

$$Z'_{pq}(1) \otimes Z'_{st}(2) \quad \text{в} \quad Z'_{p+s, q+t}(3),$$

$$Z'_{pq}(1) \otimes B'_{st}(2) + B'_{pq}(1) \otimes Z'_{st}(2) \quad \text{в} \quad B'_{p+s, q+t}(3)$$

и т. д.

В когомологической ситуации можно продвинуться гораздо дальше. Применяя диагональное отображение, мы получим $\cup$ -умножение, которое превращает $\{E_r^{pq}\}$ в биградуированное кольцо, а гомоморфизм d_r в дифференцирование:

$$d_r(ab) = d_r(a) \cdot b + (-1)^{\deg a} a \cdot d_r(b).$$

Замечание 5. Пусть $i_*: H_*(F) \rightarrow H_*(E)$ и $p_*: H_*(E) \rightarrow H_*(B)$ — гомоморфизмы, индуцированные включением слоя $i: F \rightarrow E$ и проекцией $p: E \rightarrow B$. Их также можно включить в спектральную последовательность в форме так называемых краевых гомоморфизмов.

В самом деле, ось y всегда образует свободный край диаграммы для члена E'_{pq} , т. е. $E'_{pq} = 0$, если $p < 0$ (рис. 29).

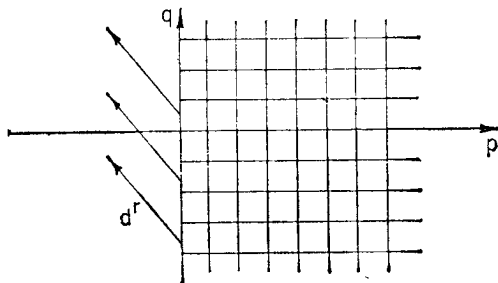


Рис. 29.

Это означает, что дифференциал d^r равен нулю на группах E'_{0q} , или, другими словами, что каждый элемент из E'_{0q} является циклом, и, значит, E'^{r+1}_{0q} есть факторгруппа группы E'_{0q} . Следовательно, $E'_{01} \rightarrow E'^{r+1}_{0q}$ — эпиморфизм для всех q . Взяв композицию этих эпиморфизмов

$$E'^3_{0q} \rightarrow E'^3_{0q} \rightarrow \dots \rightarrow E'_{0q} \rightarrow \dots,$$

мы получим эпиморфизм $E'^3_{0q} \rightarrow E'^\infty_{0q}$. Но

$$E'^\infty_{0q} = F_{0q} \subset h_q(E).$$

Покажем, что композиция

$$15.28. \quad h_q(F) \cong E'^3_{0q} \rightarrow E'^\infty_{0q} \rightarrow h_q(E)$$

совпадает с гомоморфизмом i_* . С этой целью рассмотрим расслоение $p': F \rightarrow \{b_0\}$ и отображение расслоений

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{i} & E \\ p' \downarrow & & \downarrow p \\ \{b_0\} & \subset & B. \end{array}$$

Обозначим через E'^r_{pq} спектральную последовательность расслоения p' ; в силу естественности мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} h_q(F) & \longrightarrow & E'^\infty_{0q} & \longrightarrow & h_q(E) \\ \uparrow 1 & & \uparrow i'^\infty_{0q} & & \uparrow i_* \\ h_q(F) & \longrightarrow & E'^\infty_{0q'} & \longrightarrow & h_q(F). \end{array}$$

Но из конструкции $E'^\infty_{0q'}$ следует, что $Z'^\infty_{0q'} = h_q(F)$, $B'^\infty_{0q'} = 0$, и обе горизонтальные стрелки представляют собой тождественные изоморфизмы. Значит, краевой гомоморфизм 15.28 равен i_* , как и утверждалось.

Если $h_* = H_*$ — классическая теория гомологий, то $E'^r_{pq} = 0$ для $q < 0$, т. е. ось x также образует свободный край диаграммы (рис. 30).

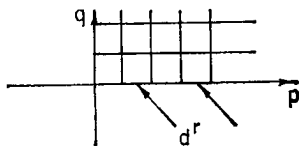


Рис. 30.

В E'_{p0} не существует границ, поскольку дифференциал d' приходит из нулевой группы. Следовательно, $E'^{r+1}_{p0} = \ker d' \subset E'_{p0}$. Взяв композицию этих вложений, мы получим вложение $E^\infty_{p0} \subset E^s_{p0}$. Кроме того, поскольку $E^\infty_{pq} = 0$ для $q < 0$, то

$$F_{p0} = F_{p+1, -1} = \dots = H_p(E),$$

так что существует эпиморфизм $H_p(E) = F_{p0} \rightarrow E^\infty_{p0}$. Комбинируя эти отображения, мы получаем еще один краевой гомоморфизм

$$15.29. H_p(E) \rightarrow E^\infty_{p0} \rightarrow E^s_{p0} \cong H_p(B).$$

Оказывается, что он совпадает с гомоморфизмом p_* . Доказательство этого факта аналогично только что рассмотренному доказательству совпадения $h_q(F) \cong E^\infty_{0q} \rightarrow E^\infty_{0q} \rightarrow h_q(E)$ с $i_*: h_q(F) \rightarrow h_q(E)$. Действительно, рассмотрим отображение расслоений

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{p} & B \\ p \downarrow & & \downarrow 1 \\ B & \xrightarrow{1} & B \end{array}$$

и заметим, что

$$Z^{\infty'}_{p0} = \text{im} [H_p(B^p) \rightarrow H_p(B^p, B^{p-1})] \cong H_p(B^p),$$

$$B^{\infty'}_{p0} = \text{im} [\Delta: H_{p+1}(B, B^p) \rightarrow H_p(B^p, B^{p-1})] \cong \\ \text{im} [\partial: H_{p+1}(B, B^p) \rightarrow H_p(B^p)].$$

Следовательно, $E^{\infty'}_{p0} \cong H_p(B^p) / \text{im } \partial \cong H_p(B)$ и композиция $H_p(B) \rightarrow E^{\infty'}_{pq} \rightarrow H_p(B)$ равна тождественному изоморфизму.

Рассмотрим теперь некоторые применения теоремы 15.27. Для того чтобы спектральная последовательность была действительно полезной, мы должны уметь вычислять все дифференциалы d^r . Самой простейшей ситуацией является та, в которой член E^2 имеет настолько много нулевых групп, что все дифференциалы равны нулю. Например, пусть $E^2_{pq} = 0$ для любого нечетного p или q . Так как дифференциал $d^2: E^2_{pq} \rightarrow E^2_{p-2, q+1}$ меняет четность градуировки q , то d^2 либо имеет нулевую область определения, либо нулевую область значений. Следовательно, $d^2 = 0$, т. е. $E^{3*} = E^{2*}$. Далее, поскольку $d^3: E^3_{pq} \rightarrow E^3_{p-3, q+2}$ меняет четность градуировки p , то d^3 всегда равен нулю. Продолжая этот процесс, мы найдем, что $d^r = 0$ для всех $r \geq 2$ и, значит, $E^{2*} = E^{\infty*}$.

15.30. Имеется более интересный случай, в котором наличие большого числа нулевых групп в члене E^2 позволяет до конца вычислить спектральную последовательность. Пусть $h^* = H^*(-; R)$ — классическая теория когомологий с коэффициентами

в R , где R — кольцо, и $p: E \rightarrow B$ — ориентируемое расслоение, слоем F которого является n -мерная сфера S^n , $n > 0$ (такие расслоения называются *сферическими*). Тогда

$$H^q(F; R) = \begin{cases} R, & q=0, n, \\ 0, & q \neq 0, n. \end{cases}$$

Следовательно,

$$E_2^{pq} = H^p(B; H^q(F; R)) = \begin{cases} H^p(B; R), & q=0, n, \\ 0, & q \neq 0, n. \end{cases}$$

Поэтому в диаграмме для любого члена E_r имеется ровно две ненулевых строки (рис. 31).

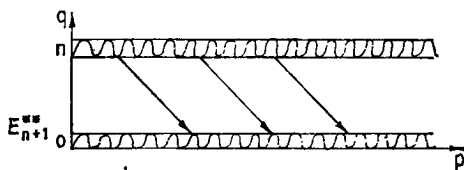


Рис. 31.

Кроме того, все дифференциалы

$$d_r: E_r^{pq} \rightarrow E_r^{p+r, q-r+1},$$

за исключением d_{n+1} , обязаны быть нулевыми по размерностным соображениям. Очевидно, что

$$E_{n+2}^{p, n} = \ker [d_{n+1}: E_{n+1}^{p, n} \rightarrow E_{n+1}^{p+n+1, 0}],$$

$$E_{n+2}^{p, 0} = \operatorname{coker} [d_{n+1}: E_{n+1}^{p-n-1, n} \rightarrow E_{n+1}^{p, 0}].$$

Поскольку других ненулевых дифференциалов не существует, мы имеем

$$E_{n+2}^{**} = E_{n+3}^{**} = \dots = E_{\infty}^{**}.$$

Так как $E_{\infty}^{pq} = 0$ для $q \neq 0, n$, то имеют место соотношения

$$F^{m-n, n} = F^{p, q} = H^m(E; R), \quad p+q=m, \quad q \geq n,$$

$$F^{m-n+1, n-1} = F^{p, q} = F^{m, 0}, \quad p+q=m, \quad 0 \leq q \leq n-1,$$

$$F^{m, 0} = E_{\infty}^{m, 0}.$$

Отсюда получаются две точные последовательности:

$$0 \rightarrow E_{\infty}^{p, n} \rightarrow E_2^{p, n} \xrightarrow{d_{n+1}} E_2^{p+n+1, 0} \rightarrow E_{\infty}^{p+n+1, 0} \rightarrow 0$$

и

$$0 \rightarrow E_{\infty}^{m, 0} \rightarrow H^m(E; R) \rightarrow E_{\infty}^{m-n, n} \rightarrow 0.$$

Объединяя их вместе и учитывая, что $E_2^{p0} \cong E_2^{pn} \cong H^p(B; R)$, мы получаем длинную точную последовательность

$$15.31. \dots \rightarrow H^m(E; R) \xrightarrow{\phi} H^{m-n}(B; R) \xrightarrow{d_{n+1}} H^{m+1}(B; R) \rightarrow H^{m+1}(E; R) \rightarrow \dots$$

Более тщательный анализ показывает, что отображение

$$H^{m+1}(B; R) \rightarrow H^{m+1}(E; R)$$

есть не что иное, как краевой гомоморфизм 15.29, и, значит, это просто p^* . Сверх того, можно более подробно описать гомоморфизм d_{n+1} . Напомним, что

$$E_2^{pn} \cong H^p(B; H^n(S^n; R)), \quad E_2^{p0} \cong H^p(B; H^0(S^n; R)).$$

Пусть $u \in H^n(S^n; R)$ — образующая; будем считать, что она принадлежит группе $H^0(B; H^n(S^n; R)) = E_2^{0n}$. Положим

$$e = d_{n+1}u \in H^{n+1}(B; H^0(S^n; R)) = E_2^{n+1, 0};$$

элемент e называется *классом Эйлера* сферического расслоения $p: E \rightarrow B$. Можно считать, что любой элемент из группы $E_2^{p, n}$ имеет вид ux , где $x \in H^p(B; R) = H^p(B; H^0(S^n; R)) = E_2^{p0}$. Поэтому из замечания 4 вытекает, что

$$d_{n+1}(ux) = (d_{n+1}u) \cdot x + (-1)^{|u|} \cdot d_{n+1}(x) = e \cdot x.$$

Следовательно, гомоморфизм

$$d_{n+1}: H^{m-n}(B; R) \rightarrow H^{m+1}(B; R)$$

представляет собой $\cup$ -умножение на класс Эйлера e , т. е. $d_{n+1}(x) = ex$. Последовательность 15.31 называется *точной последовательностью Гизина* сферического расслоения $p: E \rightarrow B$.

15.32. Пример. Для каждого $n \geq 1$ мы имеем расслоение Хопфа $S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ со слоем S^1 . Это расслоение всегда ориентируемо, поскольку $\pi_1(\mathbb{C}P^n, *) = 0$, $n \geq 1$. Класс Эйлера e этого расслоения лежит в $H^2(\mathbb{C}P^n; R)$, и для $0 < m < 2n$ последовательность Гизина 15.31 превращается в последовательность

$$0 \rightarrow H^{m-1}(\mathbb{C}P^n; R) \xrightarrow{e} H^{m+1}(\mathbb{C}P^n; R) \rightarrow 0.$$

Так как, кроме того, мы имеем точную последовательность

$$0 \rightarrow H^1(\mathbb{C}P^n; R) \rightarrow H^1(S^{2n+1}; R),$$

то $H^1(\mathbb{C}P^n; R) = 0$. Значит,

$$\begin{aligned} H^{2n}(\mathbb{C}P^n; R) &\cong H^{2n-2}(\mathbb{C}P^n; R) \cong \dots \cong H^2(\mathbb{C}P^n; R) \cong \\ &\quad H^0(\mathbb{C}P^n; R) \cong R, \\ H^{2n-1}(\mathbb{C}P^n; R) &\cong H^{2n-3}(\mathbb{C}P^n; R) \cong \dots \cong H^1(\mathbb{C}P^n; R) = 0, \end{aligned}$$

и группа $H^{2r}(\mathbb{C}P^n; R)$ порождена элементом e^r . Поскольку $\mathbb{C}P^n$ является $2n$ -мерным клеточным пространством, то все группы когомологий $H^j(\mathbb{C}P^n; R)$, $j > 2n$, равны нулю. Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

15.33. Теорема. *Имеет место изоморфизм колец*

$$H^*(\mathbb{C}P^n; R) \cong R[e]/(e^{n+1}),$$

где $R[e]/(e^{n+1})$ — усеченная полиномиальная алгебра и $e \in H^2(\mathbb{C}P^n; R)$ — образующая. Аналогично,

$$H^*(\mathbb{C}P^\infty; R) \cong R[e].$$

Было бы заманчиво применить последовательность 15.31 к расслоению $S^0 \rightarrow S^m \rightarrow \mathbb{R}P^m$. Однако, к сожалению, мы пока не в состоянии этого сделать, поскольку должны предполагать, что размерность сферы S^n больше нуля. Позже мы сумеем получить последовательность Гизина без предположения $n > 0$.

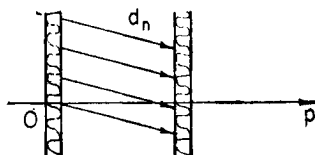


Рис. 32.

15.34. В случае, когда в расслоении $p: E \rightarrow B$ пространство B есть сфера S^n , $n > 0$, спектральная последовательность также вырождается в длинную точную последовательность, но теперь уже подходит любая теория когомологий. Действительно, в этом случае диаграмма для члена E_2 имеет ровно два ненулевых столбца и единственный ненулевой дифференциал $d_n: E_n^{0p} \rightarrow E_n^{n, p-n+1}$ (рис. 32).

Рассуждая так же, как в предыдущем случае, мы в конечном итоге приходим к длинной точной последовательности

15.35.

$$\dots \rightarrow h^m(E) \xrightarrow{i^*} h^m(F) \xrightarrow{d_n} h^{m-n+1}(F) \xrightarrow{\psi} h^{m+1}(E) \rightarrow \dots,$$

где $i: F \rightarrow E$ — включение слоя. Все, что можно на сей раз сказать о гомоморфизме d_n — это то, что он является дифференцированием:

$$d_n(xy) = d_n x \cdot y + (-1)^{|x|} x \cdot d_n y, \quad x, y \in h^*(F).$$

Если $h^* = H^*$, то $\psi: H^0(F) \rightarrow H^n(E)$ совпадает с краевым гомоморфизмом

$$H^0(F) \cong H^n(S^n; H^0(F)) \xrightarrow{p^*} H^n(E).$$

Последовательность 15.35 называется *точной последовательностью Вана*.

15.36. Упражнение. Вычислить кольцо когомологий $H^*(\Omega S^n; \mathbb{Z})$. (Предостережение: следует тщательно различать случаи четного и нечетного n .)

15.37. Пример. Рассмотрим теперь пример, имеющий важное значение для вычисления гомотопических групп сфер. Как известно,

$$[S^3; H(\mathbb{Z}, 3)] \cong H^3(S^3; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}.$$

Обозначим через $f: S^3 \rightarrow H(\mathbb{Z}, 3)$ отображение, представляющее образующую группы $[S^3; H(\mathbb{Z}, 3)]$. Пусть $P_3 \rightarrow H(\mathbb{Z}, 3)$ — расслоение путей над $H(\mathbb{Z}, 3)$ со слоем $\Omega H(\mathbb{Z}, 3) = H(\mathbb{Z}, 2)$. Тогда f индуцирует над S^3 расслоение $p: E \rightarrow S^3$, также имеющее слой $H(\mathbb{Z}, 2)$. Из точности последовательности

$$\dots \rightarrow \pi_r(H(\mathbb{Z}, 2), *) \rightarrow \pi_r(E, *) \rightarrow \pi_r(S^3, *) \xrightarrow{\partial} \pi_{r-1}(H(\mathbb{Z}, 2), *) \rightarrow \dots$$

находим, что

$$\pi_r(E, *) \cong \begin{cases} \pi_r(S^3), & r > 3, \\ 0, & r \leq 3. \end{cases}$$

Тот факт, что $\partial: \pi_3(S^3, *) \rightarrow \pi_2(H(\mathbb{Z}, 2), *)$ — изоморфизм, следует из выбора отображения f и из коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \pi_3(S^3, *) & \xrightarrow{\partial} & \pi_2(H(\mathbb{Z}, 2), *) \\ \cong \downarrow f_* & & \downarrow 1 \\ \pi_3(H(\mathbb{Z}, 3), *) & \xrightarrow[\cong]{\partial} & \pi_2(H(\mathbb{Z}, 2), *) \end{array}$$

Таким образом, любая информация о группах $\pi_*(E, *)$ есть не что иное, как информация о высших гомотопических группах сферы S^3 .

Прежде чем заниматься вычислениями, отождествим пространство $H(\mathbb{Z}, 2)$ с более привычным геометрическим объектом. Из точности гомотопической последовательности расслоения $S^1 \rightarrow S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ вытекает, что

$$\pi_r(\mathbb{C}P^n, *) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & r = 2, \\ 0, & 2 < r \leq 2n. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\pi_r(\mathbb{C}P^\infty, *) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & r = 2, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

так что $\mathbb{C}P^\infty$ имеет гомотопический тип пространства $H(\mathbb{Z}, 2)$. По теореме 15.33

$$H^*(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[e], \quad e \in H^2(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}).$$

Точная последовательность Вана для расслоения $p: E \rightarrow S^3$ имеет вид:

$$\begin{array}{ccccccc} H^{2m-3}(CP^\infty) & \rightarrow & H^{2m}(E) & \rightarrow & H^{2m}(CP^\infty) & \xrightarrow{d^3} & H^{2m-2}(CP^\infty) \rightarrow H^{2m+1}(E) \rightarrow H^{2m+1}(CP^\infty). \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 0 & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} & & 0 \end{array}$$

Поскольку гомоморфизм d^3 является дифференцированием, мы имеем $d^3(e^m) = me^{m-1}$. Следовательно, $\ker d^3 = 0$, $\operatorname{coker} d^3 \cong \mathbb{Z}_m$ и, значит,

$$\left. \begin{array}{l} H^{2m}(E) = 0, \\ H^{2m+1}(E) \cong \mathbb{Z}_m \end{array} \right\} \quad m \geq 1.$$

Применяя к этим группам теорему об универсальных коэффициентах для сингулярных гомологий, найдем, что

$$\left. \begin{array}{l} H_{2m}(E) \cong \mathbb{Z}_m, \\ H_{2m-1}(E) = 0 \end{array} \right\} \quad m \geq 1.$$

Если обозначить через ${}_pG$ p -примарную компоненту группы¹⁾ G , то полученный результат можно записать в следующем виде:

$${}_p[H_q(E)] = \begin{cases} \mathbb{Z}_p, & q = 2p, \\ 0, & 0 < q < 2p \end{cases}$$

для любого простого числа p .

В работе [70] Серр получил далеко идущее обобщение теоремы Гуревича об изоморфизме. Среди прочего эта теорема Серра утверждает, что если для данного простого p при любом $q < m$ выполнено равенство²⁾ ${}_p[\pi_q(X, x_0)] = 0$, то ${}_p[\tilde{H}_r(X)] = 0$, $0 \leq r < m$, и ${}_p[\pi_m(X, x_0)] \cong {}_p[\tilde{H}_m(X)]$.

Таким образом, в нашем случае

$${}_p[\pi_r(S^3, *)] \cong {}_p[\pi_r(E, *)] \cong {}_p[\tilde{H}_r(E)] \cong \begin{cases} 0, & 3 < r < 2p, \\ \mathbb{Z}_p, & r = 2p. \end{cases}$$

Например, $\pi_4(S^3, *) \cong \mathbb{Z}_2$, и первая подгруппа 3-кручения появляется в $\pi_6(S^3, *)$ и изоморфна $\mathbb{Z}_3$.

Обобщение Серра теоремы Гуревича об изоморфизме доказывается с использованием спектральных последовательностей (см.,

¹⁾ Для конечно порожденной абелевой группы G ${}_pG$ есть факторгруппа G/H , где H — подгруппа элементов *конечного* и взаимно простого с p порядка. Так, например, ${}_p\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. — *Прим. ред.*

²⁾ И, кроме того, $\pi_1(X, x_0) = 0$. — *Прим. ред.*

например, [70] или [72]). Для читателя, который внимательно следил за конструкциями и вычислениями настоящей главы, не составит труда разобраться в этом доказательстве.

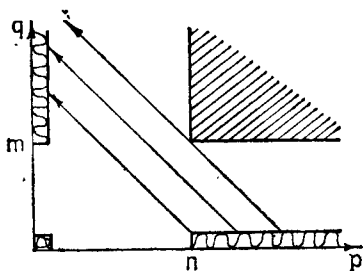


Рис. 33.

15.38. Займемся теперь более подробным рассмотрением того важного случая, когда спектральная последовательность сводится, по крайней мере частично, к точной последовательности. Пусть $p: E \rightarrow B$ — такое расслоение, что $H_p(B; G) = 0$, $0 < p < n$, $H_q(F; G) = 0$, $0 < q < m$, и слой F линейно связан. Тогда диаграмма для члена E^2 имеет вид, изображенный на рис. 33.

В незаштрихованной части диаграммы единственными ненулевыми дифференциалами являются те, которые выходят с оси x и кончаются на оси y :

$$d^p: E_{p0}^p \rightarrow E_{0, p-1}^p.$$

Как и раньше, мы получаем точные последовательности

$$0 \rightarrow E_{p0}^\infty \rightarrow E_{p0}^2 \xrightarrow{d^p} E_{0, p-1}^2 \rightarrow E_{0, p-1}^\infty \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow E_{0, p}^\infty \rightarrow H_p(E; G) \rightarrow E_{p, 0}^\infty \rightarrow 0,$$

справедливые при размерностном ограничении $p < n + m$. Объединяя их вместе, мы в итоге приходим к точной последовательности

$$\mathbf{15.39.} \quad H_{n+m-1}(E; G) \xrightarrow{P_*} H_{n+m-1}(B; G) \xrightarrow{\tau} H_{n+m-2}(F; G) \xrightarrow{i_*}$$

$$H_{n+m-2}(E; G) \rightarrow \dots \rightarrow H_2(B; G) \xrightarrow{\tau} H_1(F; G) \xrightarrow{i_*} H_1(E; G) \xrightarrow{P_*} H_1(B; G),$$

в которой мы обозначили символом τ дифференциал d^p . Гомоморфизм τ называется *трансгрессией*. Таким образом, при определенных ограничениях мы получили точную последовательность для групп гомологий, аналогичную точной гомотопической последовательности расслоения. Она называется *последовательностью Серра*.

В действительности, трансгрессию можно определить и в общей ситуации как отображение из некоторой подгруппы группы $H_n(B; G)$ в факторгруппу группы $H_{n-1}(F; G)$. Именно, τ есть

$$H_n(B; G) \cong E_{n0}^2 \supset E_{n0}^n \xrightarrow{d^n} E_{0, n-1}^n \leftarrow E_{0, n-1}^2 \cong H_{n-1}(F; G).$$

Существует и другое описание этого отображения. Проекция $p: E \rightarrow B$ индуцирует гомоморфизм

$$p_*: H_n(E, F; G) \rightarrow H_n(B, \{*\}; G) \cong \tilde{H}_n(B; G).$$

Определим

$$\bar{\tau}: \operatorname{im} p_* \rightarrow H_{n-1}(F; G)/\partial(\ker p_*),$$

полагая $\bar{\tau}(x) = \{\partial(y)\}$ для $x \in \operatorname{im} p_*$ и $y \in H_n(E, F; G)$, такого, что $p_*(y) = x$. Элементы из $\operatorname{im} p_* \subset \tilde{H}_n(B; G)$ (т. е. те, на которых определен гомоморфизм $\bar{\tau}$) называются *трансгрессивными*. Покажем теперь, что $\bar{\tau} = \tau$.

15.40. Лемма. Для всех $p \geq 2$ и любой фильтрации $\{X^n\}$ пространства X существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} h_p(X^{p-1}, X^0) & \xrightarrow{j_*} & h_p(X, X^0) & \longrightarrow & E_{p0}^p & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow d^p & & \\ \partial h_p(X^{p-1}, X^0) & \subset & h_{p-1}(X^0) & \longrightarrow & E_{0, p-1}^p & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

с точными строками.

Доказательство. Чтобы получить требуемое утверждение, достаточно бросить взгляд на чудовище, изображенное на с. 422. Отметим, что условие $p \geq 2$ или эквивалентное ему условие $2p-1 \geq p+1$ гарантирует выполнение равенства

$$\Delta h_{p+1}(X^{2p-1}, X^p) = \Delta h_{p+1}(X, X^p). \quad \square$$

15.41. Следствие. Для всех $p \geq 2$ имеет место равенство $\bar{\tau} = \tau$.

Доказательство. Будем считать, что $B^0 = \{b_0\}$ и что E профильтровано подпространствами $X^n = p^{-1}B^n$. Тогда

$$h_n(X, X^0) = H_n(E, F; G), \quad h_{n-1}(X^0) = H_{n-1}(F; G),$$

$$h_n(X) = H_n(E; G), \quad E_{n0}^n = H_n(B; G).$$

Требуемый результат содержится в коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{H}_n(B; G) & \xlongequal{\quad} & E_{n0}^2 & & & & \\ \uparrow p_* & & \cup & & & & \\ H_n(E, F; G) & \longrightarrow & E_{n0}^n & \longrightarrow & 0 & & \\ \downarrow \partial & & \downarrow d^n & & & & \\ \tilde{H}_{n-1}(F; G) & \longrightarrow & E_{0, n-1}^n & \longrightarrow & 0, & n \geq 2. & \square \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 j_* h_p(X^{p-1}, X^0) \subset h_p(X, X^0) \\
 \downarrow \\
 j_* h_p(X^{p-1}, X^0) \subset h_{p-1}(X^0)
 \end{array}
 \xrightarrow{\simeq}
 \frac{h_p(X^p, X^0)}{\Delta h_{p+1}(X, X^p)}
 \xrightarrow{\text{ЭПН}}
 \frac{h_p(X^p, X^0)}{j_* h_p(X^{p-1}, X^0) + \Delta h_{p+1}(X^{2p-1}, X^p)}
 \xrightarrow{j_*}
 \frac{Z_{p0}^p}{B_{p0}^p} = E_{p0}^p
 \end{array}
 \xrightarrow{d^p}
 \begin{array}{c}
 \frac{Z_{p0}^p}{B_{p0}^p} \rightarrow \frac{Z_{p0}^{p+1}}{B_{p0}^{p+1}} \cong \frac{B_{0,p-1}^{p+1}}{B_{0,p-1}^p} \cup \frac{Z_{0,p-1}^p}{B_{0,p-1}^p} = E_{0,p-1}^p
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{h_p(X^p, X^0)}{j_* h_p(X^{p-1}, X^0) + \Delta h_{p+1}(X^{2p-1}, X^p)} \xrightarrow{\bar{\partial}} \frac{h_p(X^p, X^0)}{j_* h_p(X^{p-1}, X^0) + j_* h_p(X^p)} \xrightarrow{\text{ЭПН}} \frac{\partial h_p(X^p, X^0)}{\partial h_p(X^{p-1}, X^0)} \xrightarrow{\text{ЭПН}} \frac{h_{p-1}(X^0)}{\partial h_p(X^{p-1}, X^0)}
 \end{array}$$

$$\frac{h_p(X^p, X^0)}{\Delta h_{p+1}(X, X^p)} \xrightarrow{\bar{\partial}} \partial h_p(X^p, X^0) \xrightarrow{\text{ЭПН}} \frac{\partial h_p(X^p, X^0)}{\partial h_p(X^{p-1}, X^0)} \xrightarrow{\text{ЭПН}} \frac{h_{p-1}(X^0)}{\partial h_p(X^{p-1}, X^0)}$$

15.42. Особый интерес представляет случай, когда пространство расслоения E стягиваемо. Определим в этом предположении гомоморфизм

$$\sigma': \tilde{H}_{n-1}(F; G) \rightarrow \tilde{H}_n(B; G)$$

как композицию

$$\tilde{H}_n(F; G) \xrightarrow{\partial} H_n(E, F; G) \xrightarrow{p_*} H_n(B, \{b_0\}; G) = \tilde{H}_n(B; G).$$

Из только что доказанной леммы вытекает, что гомоморфизм τ является обратным к σ' :

$$\tilde{H}_n(B; G) \supset \text{im } \sigma' \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(F; G)/\ker \sigma'.$$

Кроме того, если пространство B n -связно, $n \geq 1$, то последовательность Серра 15.39 превращается в этом случае в семейство изоморфизмов

$$\sigma': \tilde{H}_{p-1}(F; G) \cong \tilde{H}_p(B; G), \quad 2 \leq p \leq 2n.$$

В случае расслоения $\Omega B \rightarrow PB \rightarrow B$ гомоморфизм σ' часто называют «гомологической надстройкой», о чем приходится лишь сожалеть, так как это название в большей степени подошло бы для гомоморфизма

$$\sigma: \tilde{H}_{n-1}(B; G) \rightarrow \tilde{H}_n(SB; G)$$

Но как бы то ни было, эти два гомоморфизма тесно связаны.

15.43. Предложение. Пусть $f: X \rightarrow \Omega Y$ — произвольное отображение и $f': SX \rightarrow Y$ — отображение, сопряженное с f . Тогда для всех n имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_{n-1}(X; G) & \xrightarrow{f_*} & \tilde{H}_{n-1}(\Omega Y; G) \\ \downarrow \sigma & & \downarrow \sigma' \\ \tilde{H}_n(SX; G) & \xrightarrow{f'_*} & \tilde{H}_n(Y; G). \end{array}$$

Доказательство. Определим отображение

$$\hat{f}: CX \rightarrow PY,$$

полагая $(\hat{f}[t, x])(s) = f(x)(st)$, $[t, x] \in CX$, $s \in I$. Тогда немедленно устанавливается коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i_1} & CX & \xrightarrow{q} & SX \\ f \downarrow & & \downarrow \hat{f} & & \downarrow f' \\ \Omega Y & \xrightarrow{i} & PY & \xrightarrow{p} & Y, \end{array}$$

в которой $i_1(x) = [1, x]$, $x \in X$, и $q: CX \rightarrow SX$ — очевидная проекция. Следовательно, в гомологиях мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \sigma & & \\
 \tilde{H}_{n-1}(X; G) & \xleftarrow[\cong]{\partial} & H_n(CX, X; G) & \xrightarrow{q_*} & \tilde{H}_n(SX; G) \\
 \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f'_* \\
 \tilde{H}_{n-1}(\Omega Y; G) & \xleftarrow[\cong]{\partial} & H_n(PY, \Omega Y; G) & \xrightarrow{p_*} & \tilde{H}_n(Y; G). \quad \square \\
 & & \sigma' & &
 \end{array}$$

Напомним теперь, что сопряженным к $l: SX \rightarrow SX$ является такое отображение $i': X \rightarrow \Omega SX$, что

$$i'(x)(s) = [s, x], \quad x \in X, s \in I.$$

15.44. Следствие. Для любого n имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{H}_n(X; G) & \xrightarrow{i'_*} & \tilde{H}_n(\Omega SX; G) \\
 \searrow \sigma \cong & & \swarrow \sigma' \\
 & \tilde{H}_{n+1}(SX; G). &
 \end{array}$$

15.45. Следствие. Если пространство X n -связно ($n \geq 1$), то

$$i'_*: \tilde{H}_p(X; G) \rightarrow \tilde{H}_p(\Omega SX; G)$$

— изоморфизм для любого $p \leq 2n + 1$.

Доказательство. Поскольку пространство SX $(n+1)$ -связно, то данный результат немедленно следует из п. 15.42 и следствия 15.44. $\square$

Пусть

$$\Sigma: \pi_p(X, x_0) \rightarrow \pi_{p+1}(SX, *)$$

— гомотопическая надстройка (см. определение 6.23). Легко видеть, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_p(X, x_0) & \xrightarrow{i'_*} & \pi_p(\Omega SX, *) \\
 \searrow \Sigma & & \swarrow \parallel \\
 & \pi_{p+1}(SX, *) &
 \end{array}$$

коммутативна.

15.46. Теорема (Фрейденталь) Пусть X — некоторое n -связное пространство ($n \geq 1$). Тогда

$$\Sigma: \pi_p(X, x_0) \rightarrow \pi_{p+1}(SX, *)$$

является изоморфизмом для любого $p \leq 2n$ и эпиморфизмом для $p = 2n + 1$.

Доказательство. Согласно следствию 15.45 и теореме 10.28 Уайтхеда гомоморфизм

$$i'_*: \pi_p(X, x_0) \rightarrow \pi_p(\Omega SX, *)$$

является изоморфизмом для $p \leq 2n$ и эпиморфизмом для $p = 2n + 1$. $\square$

Таким образом, мы получили еще одно доказательство теоремы Фрейдентала о надстройке. Оно было бы независимым от первого доказательства, если бы мы не использовали теорему Фрейдентала при доказательстве теоремы Гуревича об изоморфизме и, стало быть, при доказательстве теоремы Уайтхеда. Как уже отмечалось в главе 10, можно дать элементарное доказательство теоремы Гуревича об изоморфизме (см. [72]), которое не использует ничего, кроме определений гомотопических групп и групп сингулярных гомотопий.

Обратимся теперь к другому важному применению спектральной последовательности Серра, которое окажется очень полезным в следующей главе. В формулируемой ниже теореме мы предполагаем, что H — произвольный кольцевой спектр.

15.47. Теорема (Лере — Хирш). Пусть $p: (E, \dot{E}) \rightarrow B$ — расслоение над линейно связной базой B со слоем $(F, \dot{F})$. Предположим, что существуют такие элементы $e_1, \dots, e_r \in H^*(E, \dot{E})$, что $i^*e_1, i^*e_2, \dots, i^*e_r \in H^*(F, \dot{F})$ образуют базис свободного $H^*(pt)$ -модуля $H^*(F, \dot{F})$. Зададим в $H^*(E, \dot{E})$ структуру модуля над кольцом $H^*(B)$, полагая $be = p^*(b) \cup e$ для $b \in H^*(B)$, $e \in H^*(E, \dot{E})$. Тогда $H^*(E, \dot{E})$ является свободным $H^*(B)$ -модулем с базисом $\{e_1, e_2, \dots, e_r\}$.

Доказательство. Покажем прежде всего, что расслоение $p: (E, \dot{E}) \rightarrow B$ ориентируемо. В самом деле, если $\omega: (I, \dot{I}) \rightarrow (B, b_0)$ — некоторая петля в B , то диаграмма

$$\begin{array}{ccc} (F, \dot{F}) & & \\ \alpha(\omega) \downarrow & \searrow i & \\ & (E, \dot{E}) & \\ (F, \dot{F}) & \nearrow i & \end{array}$$

гомотопически коммутативна¹⁾, так что $\alpha(\omega^*)(i^*(e_i)) = i^*(e_i)$ для

¹⁾ Гомотопия задается семейством $(F, \dot{F}) \rightarrow (F, \dot{F})_t \rightarrow (E, \dot{E})$, где $(F, \dot{F})_t$ — слой над $\omega(t)$, а левая стрелка — перенос слоя вдоль пути $\omega|_{[0, t]}$. — Прим. ред.

всех $i = 1, 2, \dots, r$. Но элементы $i^*(e_1), \dots, i^*(e_r)$ образуют базис для $H^*(F, F)$; следовательно, $\alpha(\omega)^* = 1$.

Рассмотрим теперь новую теорию когомологий h^* , определенную равенством

$$h^*(X, A) = H^*(X, A) \otimes_{H^*(pt)} H^*(F, F)$$

Так как $H^*(F, F)$ — свободный $H^*(pt)$ -модуль, то h^* удовлетворяет аксиоме точности. Пусть $f_i = i^*(e_i) \in H^*(F, F)$. Для любых $Y \subset X \subset B$ зададим гомоморфизмы

$$\phi_{X,Y}: h^*(X, Y) \rightarrow H^*(E|X, E|Y \cup \dot{E}|X),$$

полагая

$$\phi_{X,Y}(x \otimes f_i) = p^*x \cup j^*e_i$$

на элементах вида $x \otimes f_i$, $x \in H^*(X, Y)$, где $j: (E|X, \dot{E}|X) \rightarrow (E, \dot{E})$ — включение, и продолжая их на весь модуль $h^*(X, Y)$ по линейности. Очевидно, что $\phi_{X,Y}$ естественны относительно вложений. Пусть $\{E_r^{pq}, \bar{d}_r\}$ — спектральная последовательность для h^* , построенная по фильтрации остовами клеточного пространства B , и $\{E_r^{pq}, d_r\}$ — спектральная последовательность Серра для H^* и расслоения $(F, \dot{F}) \rightarrow (E, \dot{E}) \rightarrow B$. Тогда гомоморфизмы $\{\phi_{X,Y}\}$ индуцируют морфизм спектральных последовательностей

$$\phi: \{E_r^{pq}, \bar{d}_r\} \rightarrow \{E_r^{pq}, d_r\}$$

(см определение 15.56). Другими словами, семейство $\{\phi_{X,Y}\}$ определяет такие гомоморфизмы $f_r^{pq}: \bar{E}_r^{pq} \rightarrow E_r^{pq}$, $f_{pq}: \bar{F}^{pq} \rightarrow F^{pq}$, что $d_r \circ f_r^{pq} = f_r^{p+r, q-r+1} \cdot \bar{d}_r$, и коммутативны диаграммы

15.48.

$$\begin{array}{ccc} E_{r+1}^{pq} & \xrightarrow{f_{r+1}^{pq}} & E_{r+1}^{pq} \\ \parallel & & \parallel \\ H(\bar{E}_r^{pq}) & \xrightarrow{H(f_r^{pq})} & H(E_r^{pq}), \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & F^{p+1, q-1} & \longrightarrow & F^{pq} & \longrightarrow & E_{\infty}^{pq} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f^{p+1, q-1} & & \downarrow f^{pq} & & \downarrow f_{\infty}^{pq} \\ 0 & \longrightarrow & F^{p+1, q-1} & \longrightarrow & F^{pq} & \longrightarrow & E_{\infty}^{pq} \longrightarrow 0. \end{array}$$

Кроме того, по определению гомоморфизмов κ , κ и $\phi_{B^p, B^{p-1}}$

коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 E_1^{pq} & \xrightarrow{f_1^{pq}} & E_1^{pq} \\
 \parallel & & \parallel \\
 [H^*(B^p, B^{p-1}) \otimes_{H^*(pt)} H^*(F, \dot{F})]^{p+q} & \xrightarrow{\phi_{B^p, B^{p-1}}} & H^{p+q}(E|B^p, E|B^{p-1} \cup (E|B^p)) \\
 \kappa \otimes 1 \parallel \Big) & & \kappa \parallel \Big) \\
 [C^p(B; H^*(pt)) \otimes_{H^*(pt)} H^*(F, \dot{F})]^{p+q} & \cong & C^p(B; H^*(F, \dot{F})),
 \end{array}$$

Следовательно, f_1^{pq} — изоморфизм. Но тогда, используя первую диаграмму из 15.48, мы получим, что все f_r^{pq} , $r \geq 1$, также являются изоморфизмами. Значит, изоморфизмом будет и отображение f_∞^{pq} . С помощью второй диаграммы отсюда индуктивно выводится, что f^{pq} являются изоморфизмами для всех p, q . Таким образом, мы получаем в итоге, что

$$\phi_{B, \phi}: H^*(B) \otimes_{H^*(pt)} H^*(F, \dot{F}) \rightarrow H^*(E, \dot{E})$$

— изоморфизм. А это как раз и означает, что $\{e_1, e_2, \dots, e_r\}$ является базисом модуля $H^*(E, \dot{E})$ над кольцом $H^*(B)$. $\square$

15.49. Аналогичный результат справедлив и в гомологиях: имеет место изоморфизм

$$\psi: H_*(E, \dot{E}) \rightarrow H_*(B) \otimes_{H_*(pt)} H_*(F, \dot{F}),$$

задаваемый для всех $x \in H_*(E, \dot{E})$ формулой

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^r p_*(e_i \cap x) \otimes f_i^*,$$

где $\{f_1^*, f_2^*, \dots, f_r^*\}$ — базис в $H_*(F, \dot{F})$, двойственный к $\{f_1, f_2, \dots, f_r\}$. Доказательство аналогично приведенному выше.

15.50. В качестве приложения полученных результатов дадим теперь новое доказательство теоремы Тома об изоморфизме (14.6). Пусть $p: \dot{E} \rightarrow B$ — сферическое расслоение со слоем S^{n-1} и $p: E \rightarrow B$ — ассоциированное с ним расслоение на n -мерные диски. Классом Тома или ориентацией расслоения $p: (E, \dot{E}) \rightarrow B$ называется такой элемент $t \in H^n(E, \dot{E})$, что $j^*(t) \in H^n(D^n, S^{n-1})$ является образующей $H^*(pt)$ -модуля $H^*(D^n, S^{n-1})$. Здесь $j: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (E, \dot{E})$ — включение слоя над отмеченной точкой b_0 . Так как всюду в этой главе молчаливо предполагается, что пространство B линейно связано, это определение класса Тома эквивалентно определению, данному в главе 14 для векторных расслоений (каждое $O(n)$ -расслоение обладает ассоциированными расслоениями на диски и сферы).

15.51. Теорема Тома об изоморфизме. Пусть $p: \dot{E} \rightarrow B$ — сферическое расслоение со слоем S^{n-1} , $p: E \rightarrow B$ — ассо-

цированное с ним расслоение на диски и $t \in H^n(E, \dot{E})$ — класс Тома. Тогда гомоморфизмы

$$\Phi^*: H^q(B) \rightarrow H^{q+n}(E, \dot{E}), \quad \Phi^*(z) = p^*(z) \cup t,$$

$$\Phi_*: H_{q+n}(E, \dot{E}) \rightarrow H_q(B), \quad \Phi_*(x) = p_*(t \cap x),$$

являются изоморфизмами для всех $q \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Указанные изоморфизмы являются частными случаями изоморфизмов теоремы 15.47 и п. 15.49 с $r=1$. $\square$

Замечание. В частности, из доказательства теоремы 15.47 следует, что существование класса Тома влечет за собой ориентируемость расслоения $p: (E, \dot{E}) \rightarrow B$ в смысле определения 15.14. Более того, пусть $\xi = (B, p, E, \mathbb{R}^n)$ — векторное расслоение со структурной группой $O(n)$. Тогда определенный в п. 14.5 класс Тома $t \in H^n(E, E - i(B))$ индуцированного микрорасслоения задает класс Тома для пары $(D(\xi), S(\xi))$:

$$H^n(E, E - i(B)) \cong H^n(D(\xi), D(\xi) - i(B)) \cong H^n(D(\xi), S(\xi)).$$

Таким образом, из ориентируемости в смысле определения 14.5 следует ориентируемость в смысле определения 15.14.

У п р а ж н е н и е. В какой степени верно обратное утверждение?

15.52. Из теоремы Тома можно получить точную последовательность Гизина. В самом деле, рассмотрим следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H^{q+n-1}(\dot{E}) & \xrightarrow{\delta} & H^{q+n}(E, \dot{E}) & \xrightarrow{j^*} & \\ & & \uparrow 1 & & \cong \uparrow \Phi^* & & \\ \dots & \longrightarrow & H^{q+n-1}(\dot{E}) & \xrightarrow{\phi} & H^q(B) & \xrightarrow{\psi} & \\ & & & & & & \\ & & & & H^{q+n}(E) & \xrightarrow{i^*} & H^{q+n}(\dot{E}) \xrightarrow{\delta} \dots \\ & & & & \cong \uparrow p^* & & \uparrow 1 \\ & & & & H^{q+n}(B) & \xrightarrow{p^*} & H^{q+n}(\dot{E}) \longrightarrow \dots \end{array}$$

Если определить ϕ как $\Phi^{*-1} \cdot \delta$, а ψ как $p^{*-1} \cdot j^* \cdot \Phi^*$, то эта диаграмма станет коммутативной. Отображение $p: E \rightarrow B$ является гомотопической эквивалентностью, поскольку расслоение на диски стягивается на свое нулевое сечение, гомеоморфное B .

У п р а ж н е н и е. Показать, что для спектра $H = H(R)$ гомоморфизмы $\psi = d_{n+1}$ и ϕ совпадают с соответствующими гомоморфизмами последовательности 15.31.

Стоит отметить, что мы получили гораздо больше, чем просто альтернативный вывод точной последовательности Гизина. Теперь

эта последовательность справедлива для любой теории коомологий, относительно которой $p: (E, \dot{E}) \rightarrow B$ имеет класс Тома. В частности, для классических коомологий с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$ последовательность Гизина верна и для сферических расслоений со слоем S^0 .

15.53. Применим последовательность Гизина для вычисления коомологий $H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$. Расслоение $S^0 \rightarrow S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ порождает точную последовательность

$$0 \rightarrow H^0(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{p^*} H^0(S^n; \mathbb{Z}_2) \rightarrow \dots$$

$$H^q(S^n; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\phi} H^q(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\psi} H^{q+1}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{p^*}$$

$$H^{q+1}(S^n; \mathbb{Z}_2) \rightarrow \dots \rightarrow H^n(S^n; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\phi} H^n(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \rightarrow 0.$$

Так как $H^q(S^n; \mathbb{Z}_2) = 0$ для $0 < q < n$, то

$$\psi: H^q(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^{q+1}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$$

является изоморфизмом для $0 < q < n-1$ и мономорфизмом для $q = n-1$. Предполагая, что $n \geq 1$, мы имеем $p^*: H^0(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \cong H^0(S^n; \mathbb{Z}_2)$, так что ψ является мономорфизмом даже для $q=0$. Таким образом, $\mathbb{Z}_2 = H^0(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \cong H^1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \cong \dots \cong H^{n-1}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$ и $H^n(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \neq 0$. Поскольку $H^n(S^n; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$, то гомоморфизм

$$\phi: H^n(S^n; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^n(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$$

обязан быть изоморфизмом, так что даже в старшей размерности $\psi: H^{n-1}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^n(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$ — изоморфизм. Положим

$$w = \psi(1) \in H^1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2).$$

Элемент w является классом Эйлера для расслоения $S^0 \rightarrow S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$, а гомоморфизм ψ представляет собой умножение на w . Следовательно, единственный ненулевой элемент из $H^q(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$ имеет вид w^q .

15.54. Теорема. *Имеет место изоморфизм колец*

$$H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[w]/(w^{n+1}).$$

Аналогично

$$H^*(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[w].$$

Упражнение. Для сферического расслоения $p: \dot{E} \rightarrow B$ со слоем S^{n-1} вывести соотношение между классом Эйлера $e \in H^n(B; \mathbb{R})$ и классом Тома $t \in H^n(E, \dot{E}; \mathbb{R})$.

15.55. Замечание. Мы имеем накрытие $S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$, так что

$$\pi_q(\mathbb{R}P^n, *) \cong \pi_q(S^n, *) = 0, \quad 1 < q < n.$$

Следовательно, $\pi_q(\mathbb{R}P^\infty, *) = 0$ для всех $q > 1$. Поскольку $\pi_1(\mathbb{R}P^\infty, *) \cong \mathbb{Z}_2$, то $\mathbb{R}P^\infty$ имеет гомотопический тип простран-

ства $H(\mathbb{Z}_2, 1)$. Таким образом, мы вычислили кольцо когомологий $H^*(H(\mathbb{Z}_2, 1); \mathbb{Z}_2)$.

Завершим настоящую главу двумя общими результатами о спектральных последовательностях, имеющих важные применения.

15.56. Определение. Морфизмом $\{f_{pq}^r\}$ спектральных последовательностей называется семейство гомоморфизмов $f_{pq}^r: E_{pq}^r \rightarrow E_{pq}^r$, $f_{pq}^r: F_{pq}^r \rightarrow F_{pq}^r$, удовлетворяющих для всех p, q и r следующим условиям:

i) $d^r \circ f_{pq}^r = f_{p-r, q+r-1}^r \circ d^r$;

ii) диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E_{pq}^{r+1} & \xrightarrow{f_{pq}^{r+1}} & E_{pq}^{r+1} \\ \parallel & & \parallel \\ H_*(E_{pq}^r) & \xrightarrow{f_{pq}^r} & H_*(E_{pq}^r) \end{array}$$

коммутативна;

iii) диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E_{pq}^\infty & \xrightarrow{f_{pq}^\infty} & E_{pq}^\infty \\ \parallel & & \parallel \\ \operatorname{dir} \lim_r E_{pq}^r & \xrightarrow{\operatorname{dir} \lim_r f_{pq}^r} & \operatorname{dir} \lim_r E_{pq}^r \end{array}$$

коммутативна;

iv) диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & F_{p-1, q+1} & \longrightarrow & F_{pq} & \longrightarrow & E_{pq}^\infty \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f_{p-1, q+1} & & \downarrow f_{pq} & & \downarrow f_{pq}^\infty \\ 0 & \longrightarrow & F_{p-1, q+1} & \longrightarrow & F_{pq} & \longrightarrow & E_{pq}^\infty \longrightarrow 0 \end{array}$$

коммутативна.

Отображение расслоений

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E \\ \downarrow p & & \downarrow \bar{p} \\ B & \xrightarrow{f} & \bar{B} \end{array}$$

индуцирует морфизм спектральных последовательностей Серра, и именно это свойство имеют в виду, когда говорят, что спектральная последовательность Серра естественна.

15.57. Теорема Зимана о сравнении. Пусть $\{f_{pq}^r\}: \{E_{pq}^r\} \rightarrow \{E_{pq}^r\}$ — морфизм спектральных последовательностей, удовлетворяющий следующим условиям:

- i) $E_{pq}^r = E_{pq}^r = 0$ для $p < 0$ или $q < 0$;
- ii) $E_{pq}^2 = E_{pq}^2 \otimes E_{0q}^2$, $E_{pq}^2 = E_{pq}^2 \otimes E_{0q}^2$ и $f_{pq}^2 = f_{pq}^2 \otimes f_{0q}^2$;
- iii) $E_{pq}^\infty = E_{pq}^\infty = 0$ для всех $(p, q) \neq (0, 0)$;
- iv) f_{p0}^2 — изоморфизм для любого $p \geq 0$.

Тогда f_{0q}^2 является изоморфизмом для любого $q \geq 0$.

Доказательство. Прежде чем непосредственно приступить к доказательству теоремы, нам придется подробно выписать все соотношения между различными группами, входящими в спектральную последовательность. Мы имеем $B_{pq}^1 = \text{im } d^2 \subset E_{pq}^2$, $Z_{pq}^2 = \ker d^2 \subset E_{pq}^2$, так что

$$0 = B_{pq}^1 \subset B_{pq}^1 \subset Z_{pq}^2 \subset Z_{pq}^2 = E_{pq}^2 \quad \text{и} \quad E_{pq}^3 = Z_{pq}^3 / B_{pq}^1.$$

Тогда $\text{im } d^3 \subset E_{pq}^3$ имеет вид $\text{im } d^3 = B_{pq}^1 / B_{pq}^1$ и $\ker d^3 = Z_{pq}^3 / B_{pq}^1$ для некоторых подгрупп $B_{pq}^1 \subset Z_{pq}^2$, таких, что

$$0 = B_{pq}^2 \subset B_{pq}^2 \subset B_{pq}^1 \subset Z_{pq}^4 \subset Z_{pq}^1 \subset Z_{pq}^2 = E_{pq}^2, \quad E_{pq}^4 \cong Z_{pq}^4 / B_{pq}^1.$$

Продолжая этот процесс, мы получаем фильтрацию

$$0 = B_{pq}^2 \subset B_{pq}^2 \subset \dots \subset B_{pq}^r \subset \dots \subset B_{pq}^\infty \subset Z_{pq}^\infty \subset \dots \subset Z_{pq}^r \subset \dots \subset Z_{pq}^2 = E_{pq}^2,$$

для которой

$$\ker d^r = Z_{pq}^{r+1} / B_{pq}^r, \quad \text{im } d^r = B_{pq}^{r+1} / B_{pq}^r, \quad E_{pq}^r = Z_{pq}^r / B_{pq}^r, \\ B_{pq}^\infty = \bigcup_r B_{pq}^r, \quad Z_{pq}^\infty = \bigcap_r Z_{pq}^r, \quad E_{pq}^\infty \cong Z_{pq}^\infty / B_{pq}^\infty.$$

Наконец, изоморфизм $\text{im } d^r \cong E_{pq}^r / \ker d^r$ превращается в

$$Z_{pq}^r / Z_{pq}^{r+1} \cong B_{p-r, q+r-1}^r / B_{p-r, q+r-1}^r.$$

Так как дифференциалы

$$d^r: E_{pq}^r \rightarrow E_{p-r, q+r-1}^r$$

равны нулю для $r > p$, то

$$Z_{pq}^{r+1} / B_{pq}^r = \ker d^r = E_{pq}^r \cong Z_{pq}^r / B_{pq}^r.$$

Следовательно, если $r > p$, то

$$Z_{pq}^{r+1} = Z_{pq}^r.$$

Аналогично

$$0 = \text{im } d^r = B_{pq}^{r+1}/B_{pq}^r \quad \text{для } r > q+1,$$

так что

$$B_{pq}^{r+1} = B_{pq}^r, \quad r > q+1.$$

В частности, мы получаем

$$Z_{pq}^{p+1} = Z_{pq}^{p+2} = \dots = Z_{pq}^\infty, \quad B_{pq}^{q+2} = B_{pq}^{q+3} = \dots = B_{pq}^\infty.$$

Так как

$$Z_{pq}^{p+1}/B_{pq}^{q+2} = Z_{pq}^\infty/B_{pq}^\infty = E_{pq}^\infty, \quad \text{если } (p, q) \neq (0, 0),$$

то

$$Z_{pq}^{p+1} = B_{pq}^{p+2}, \quad \text{если } (p, q) \neq (0, 0).$$

И вот, по существу лишь сейчас, мы начинаем доказательство теоремы. Предположим, что $f_{0q}^2: E_{0q}^2 \rightarrow E_{0q}^2$ — изоморфизм для $q \leq Q$ (случай $q=0$ следует из условия iv)). Покажем, что тогда $f_{0, q+1}^2$ также является изоморфизмом. На самом деле, обратной индукцией по r мы установим, что $f_{0, q+1}^r$ — изоморфизм для всех r . Если $r > Q+2$, то $E_{0, q+1}^r = E_{0, q+1}^\infty = 0 = E_{0, q+1}^\infty = E_{0, q+1}^r$, что позволяет начать индукционный процесс. Из коммутативной диаграммы с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & B_{0, q+1}^{p+1}/B_{0, q+1}^p & \rightarrow & E_{0, q+1}^p & \rightarrow & E_{0, q+1}^{p+1} \rightarrow 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow f_{0, q+1}^p & & \downarrow f_{0, q+1}^{p+1} \\ 0 & \rightarrow & B_{0, q+1}^{p+1}/B_{0, q+1}^p & \rightarrow & E_{0, q+1}^p & \rightarrow & E_{0, q+1}^{p+1} \rightarrow 0 \end{array}$$

следует, что шаг индукции будет завершен, как только мы докажем, что $f: B_{0, q+1}^{p+1}/B_{0, q+1}^p \rightarrow \bar{B}_{0, q+1}^{p+1}/\bar{B}_{0, q+1}^p$ — изоморфизм для всех p , $2 \leq p \leq Q+2$. Но

$$B_{0, q+1}^{p+1}/B_{0, q+1}^p \cong Z_{p, q-p+2}^p/Z_{p, q-p+2}^{p+1} \cong Z_{p, q-p+2}^p/B_{p, q-p+2}^{Q-p+4}$$

и, аналогично,

$$\bar{B}_{0, q+1}^{p+1}/\bar{B}_{0, q+1}^p \cong Z_{p, q-p+2}^p/Z_{p, q-p+2}^{p+1} \cong Z_{p, q-p+2}^p/\bar{B}_{p, q-p+2}^{Q-p+4}.$$

Таким образом, достаточно показать, что

$$f: Z_{p, q-p+2}^p/B_{p, q-p+2}^{Q-p+4} \rightarrow \bar{Z}_{p, q-p+2}^p/\bar{B}_{p, q-p+2}^{Q-p+4}$$

— изоморфизм для $2 \leq p \leq Q+2$.

Докажем, что $f: Z_{pq}^r \rightarrow \bar{Z}_{pq}^r$ — изоморфизм для $q+r \leq Q+2$, а $f: B_{pq}^r \rightarrow \bar{B}_{pq}^r$ — изоморфизм для $q \leq Q$ (как и выше, через f обозна-

чается любой из гомоморфизмов, индуцированных семейством f_{pq}^r). Для $r=2$ результат немедленно следует из условий ii), iv) и предположения индукции о гомоморфизмах f_{0q}^2 .

Будем считать, что наше утверждение уже доказано для некоторого $r \geq 2$. Рассмотрим тогда коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
 Z_{p+r, q-r+1}^r & \xrightarrow{\text{ЭПИ}} & Z_{p+r, q-r+1}^r / Z_{p+r, q-r+1}^{r+1} & \cong & B_{pq}^{r+1} / B_{pq}^r & \xrightarrow{\text{МОНО}} & E_{pq}^2 / B_{pq}^r \\
 \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 \\
 Z_{p+r, q-r+1}^r & \xrightarrow{\text{ЭПИ}} & Z_{p+r, q-r+1}^r / Z_{p+r, q-r+1}^{r+1} & \cong & \bar{B}_{pq}^{r+1} / \bar{B}_{pq}^r & \xrightarrow{\text{МОНО}} & \bar{E}_{pq}^2 / \bar{B}_{pq}^r
 \end{array}$$

Если $q \leq Q$, то f_1 и f_4 являются изоморфизмами. Следовательно, f_2 и f_3 — также изоморфизмы, так что мы получаем требуемое утверждение уже для $r+1$. Этим завершается индукция по q и, значит, доказательство теоремы. $\square$

З а м е ч а н и е. Имеется еще одна теорема сравнения, в которой предполагается, что f_{0q}^2 — изоморфизмы для всех $q \geq 0$, и отсюда выводится изоморфность всех гомоморфизмов f_{p0}^2 . Обе теоремы сравнения имеют очевидные когомологические аналоги.

15.58. Определение. Пусть A — алгебра над кольцом R . Говорят, что множество элементов $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \in A$ является *простой системой образующих* для A , если мономы $x_1^{e_1} x_2^{e_2} \dots x_m^{e_m}$ ($e_i = 0$ или 1 , $m \geq 0$) образуют (аддитивный) базис модуля A над R .

15.59. Примеры. В алгебре полиномов $R[x]$ множество $x, x^2, x^4, \dots, x^{2^n}, \dots$ является простой системой образующих. Во внешней алгебре $E(x_1, x_2, \dots)$ такой системой служат элементы $x_1, x_2, \dots$

15.60. Теорема (А. Борель). Пусть $\Omega B \rightarrow PB \rightarrow B$ — расслоение путей над B , где B — односвязная H -группа. Предположим, что в $H_*(\Omega B; R)$ существуют такие элементы $f_1, f_2, \dots$, что

i) для каждого n лишь конечное число элементов f_i лежит в $H_n(\Omega B; R)$;

ii) множество $\sigma'(f_1), \sigma'(f_2), \dots \in H_*(B; R)$ является простой системой образующих кольца Понтрягина $H_*(B; R)$.

Тогда $H_*(\Omega B; R) \cong R[f_1, f_2, \dots]$.

Доказательство. Идея доказательства состоит в построении абстрактной спектральной последовательности $\{E'_{pq}\}$, обладающей формальными свойствами спектральной последовательности Серра $\{E'_{pq}\}$ расслоения $\Omega B \rightarrow PB \rightarrow B$, и такого морфизма

$$\{\phi'_{pq}\}: \{E'_{pq}\} \rightarrow \{E'_{pq}\}$$

спектральных последовательностей, что ϕ'_{p0} — изоморфизмы для всех $p \geq 0$. Если такая спектральная последовательность и морфизм

построены, мы можем применить теорему сравнения 15.57. В самом деле, спектральная последовательность Серра $\{E'_{pq}\}$ удовлетворяет условиям этой теоремы, поскольку

$$E^2_{pq} \cong H_p(B; R) \otimes_R H_q(\Omega B; R) \cong E^2_{p,0} \otimes_R E^1_{0,q}$$

($H_*(B; R)$ — свободный R -модуль) и $E^\infty_{pq} = 0$, $(p, q) \neq (0, 0)$.

Мы начнем с построения семейства спектральных последовательностей $\bar{E}^{**}_*(i)$, $i \geq 1$. Пусть для фиксированного i элемент f_i лежит в группе $H_{n_i}(E; R)$. Определим $\bar{E}^{**}_*(i)$ как свободный R -модуль с базисом, состоящим из элементов

$$x(i, m) \in \bar{E}^0_{0, mn_i}(i),$$

$$y(i, m) \in \bar{E}^0_{n_i+1, mn_i}(i), \quad m \geq 0.$$

Зададим дифференциалы $d^r(i)$, полагая $d^r(i) = 0$ для $2 \leq r \leq n_i$ и $d^{n_i+1}(i)(y(i, m)) = x(i, m+1)$.

Так как до $\bar{E}^{n_i+2}(i)$ доживает лишь один из базисных элементов, а именно, $x(i, 0) = 1$, то можно взять $d^r(i) = 0$ для $r > n_i + 1$.

Определим теперь спектральную последовательность $\bar{E}^{**}_*$. С этой целью положим

$$E^{**}_* = E^{**}_*(1) \otimes E^{**}_*(2) \otimes \dots,$$

где правая часть понимается в том смысле, что для каждого m мы образуем модуль $E^{**}_*(1) \otimes \dots \otimes E^{**}_*(m)$, а затем берем прямой предел по m . Дифференциал d^r определяется по обычной формуле для дифференциалов на тензорном произведении, т. е. как дифференцирование.

По теореме Кюннета мы имеем

$$H(E^{**}_*) = H(E^{**}_*(1) \otimes E^{**}_*(2) \otimes \dots) \cong$$

$$H(E^{**}_*(1)) \otimes H(E^{**}_*(2)) \otimes \dots \cong E^{r+1}_{**}(1) \otimes E^{r+1}_{**}(2) \otimes \dots = E^{r+1}_{**}.$$

Таким образом, $\{E'_{pq}\}$ — спектральная последовательность.

Заметим, что E^2_{*0} обладает базисом, состоящим из элементов

$$y(1, 0)^{\varepsilon_1} \otimes y(2, 0)^{\varepsilon_2} \otimes \dots \otimes y(m, 0)^{\varepsilon_m}$$

($\varepsilon_i = 0$ или 1). Другими словами, $y(1, 0), y(2, 0), \dots$ представляют собой простую систему образующих алгебры $\bar{E}^2_{*0}$. Далее, $\bar{E}^2_{*0}$ имеет базис, состоящий из элементов

$$x(1, r_1) \otimes x(2, r_2) \otimes \dots \otimes x(m, r_m)$$

для $r_1, \dots, r_m \in \mathbb{N}$. Очевидно, что

$$E^2_{pq} \cong E^2_{p0} \otimes E^2_{0q}.$$

Кроме того, из условия i) теоремы следует, что $E'_{pq} = 0$ для достаточно больших r . Таким образом, $E^{\infty}_{pq} = 0$ для $(p, q) \neq (0, 0)$.

Определим теперь гомоморфизмы ϕ'_{pq} . Пусть $b_i = \sigma'(f_i) \in H_{n_i+1}(B; R)$. Так как $f_i \in \tau(b_i)$, то мы имеем

$$15.61. \quad d^r b_i = 0, \quad r < n_i + 1, \quad d^{n_i+1} b_i = \{f_i\}.$$

Положим

$$\phi'(x(i, m)) = \{f_i\}^m,$$

$$\phi'(y(i, m)) = b_i \{f_i\}^m, \quad r \leq n_i + 1,$$

где через $x(i, m)$ обозначен элемент $1 \otimes \dots \otimes x(i, m) \otimes 1 \dots$, а через $\{f_i\}$ — класс элемента f_i в $E^0_{n_i}$. Продолжим ϕ' до гомоморфизма алгебр. Из равенств 15.61 и определения гомоморфизма d' следует, что гомоморфизм ϕ' коммутирует с дифференциалами. Кроме того, мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} E^2_{p0} \otimes E^2_{0q} & \xrightarrow{\cong} & E^2_{pq} \\ \downarrow \phi^2_{p0} \otimes \phi^2_{0q} & & \downarrow \phi^2_{pq} \\ E^2_{p0} \otimes E^2_{0q} & \xrightarrow{\cong} & E^2_{pq} \end{array}$$

Поскольку множество $b_1, b_2, \dots$ является простой системой образующих алгебры $E^2_{*0} \cong H_*(B; R)$, то ϕ^2_{*0} — изоморфизм. Таким образом, выполнены все условия теоремы сравнения 15.57 и мы получаем, что

$$\phi^2_{0*}: E^2_{0*} \rightarrow E^2_{0*} \cong H_*(\Omega B; R)$$

— изоморфизм. Следовательно, мономы $f_1^{r_1} f_2^{r_2} \dots f_m^{r_m}$ образуют базис R -модуля $H_*(\Omega B; R)$ или, другими словами,

$$H_*(\Omega B; R) \cong R[f_1, f_2, \dots]. \quad \square$$

Теорема 15.60 имеет аналог для когомологий. Поскольку он будет играть важную роль в главе 18, приведем здесь его точную формулировку.

15.62. Теорема. Пусть $F \rightarrow E \rightarrow B$ — расслоение со стягиваемым пространством E и $b_1, b_2, \dots \in H^*(B; R)$ — такие элементы, что

- i) для каждого n лишь конечное число их лежит в $H^n(B; R)$;
- ii) $\sigma'(b_1), \sigma'(b_2), \dots \in H^*(F; R)$ являются простой системой образующих.

Тогда $H^*(B; R) \cong R[b_1, b_2, \dots]$.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Едва ли найдется человек, имевший дело со спектральными последовательностями и не испытавший при первом знакомстве с ними некоторой неприязни или, по меньшей мере, растерянности. Требуется основательная практика, прежде чем все это скопище индексов перестанет расплываться перед глазами и обретет форму и смысл. В следующих главах читатель найдет большое количество различных применений аппарата спектральных последовательностей. Мы надеемся, что эти применения, во-первых, убедят его в исключительной полезности данного аппарата и, во-вторых, помогут ему напрактиковаться в конкретных вычислениях. Читатель не должен, однако, удовлетвориться прочтением лишь приводимых здесь приложений, а должен разобрать столько примеров, сколько ему нужно для приобретения уверенности и свободы в обращении со спектральными последовательностями.

ССЫЛКИ НА ЛИТЕРАТУРУ

1. Маклейн [49].	4. Спеньер [72].
2. Мошер, Тангора [62].	5. Ху Сыцзян [95].
3. Серр [68, 70].	

В главе 11 мы видели, что классам изоморфных векторных расслоений со структурной группой $G(n)$ ¹⁾ над клеточным пространством X отвечают гомотопические классы отображений $f: X \rightarrow BG(n)$ в классифицирующее пространство $BG(n)$. Если ξ и η — два $G(n)$ -расслоения с классифицирующими отображениями $f_\xi, f_\eta: X \rightarrow BG(n)$, то $\xi \simeq \eta$ тогда и только тогда, когда $f_\xi \simeq f_\eta$. Следовательно, если мы хотим доказать, что расслоения ξ и η не изоморфны, то все, что нужно сделать — это показать, что f_ξ и f_η не гомотопны. Однако такой подход страдает двумя недостатками:

i) обычно по векторному расслоению ξ очень трудно построить классифицирующее отображение f_ξ ; ii) непосредственное доказательство того, что два данных отображения не гомотопны, в общем случае ничем не легче доказательства неизоморфности векторных расслоений. К счастью, для отображений имеется следующий весьма плодотворный прием: если для некоторой теории когомологий k^*

$$f_\xi^* \neq f_\eta^*: k^*(BG(n)) \rightarrow k^*(X),$$

то $f_\xi \not\simeq f_\eta$, и поэтому $\xi \not\simeq \eta$. Таким образом, для решения поставленной задачи нужно найти такую теорию когомологий k^* и элемент $x \in k^*(BG(n))$, чтобы

$$f_\xi^*(x) \neq f_\eta^*(x) \in k^*(X).$$

Поскольку гомотопический класс отображения f_ξ полностью определяется расслоением ξ , то и элемент $f_\xi^*(x) \in k^*(X)$ при данном $x \in k^*(BG(n))$ также полностью определяется этим расслоением. Значит, мы с полным правом можем обозначить $f_\xi^*(x)$ через $x(\xi)$. Элементы $x(\xi) \in k^*(X)$ для различных $x \in k^*(BG(n))$ называются *характеристическими классами* расслоения ξ . Итак, мы доказали следующее утверждение.

16.1. Предложение. *Для того чтобы два $G(n)$ -расслоения ξ и η были изоморфными, необходимо, чтобы для любых теорий когомологий совпадали их характеристические классы.*

¹⁾ Здесь $G(n)$ обозначает одну из групп $O(n)$, $U(n)$ или $S(n)$ и рассматриваются векторные расслоения со стандартной $G(n)$ -структурой. Кроме того, в этой главе под $G(n)$ -расслоениями понимаются векторные (а не главные) $G(n)$ -расслоения. — *Прим. ред.*

Разумеется, мы не утверждаем, что равенство характеристических классов для всех теорий влечет за собой изоморфизм $\xi \simeq \eta$.

Следующая теорема позволяет нам при подходящих ограничениях на теорию когомологий h^* получить характеристические классы, которые обладают рядом хороших свойств и поэтому легко вычислимы. Кроме того, эта теорема дает нам возможность вычислить кольца когомологий $h^*(BG(n))$ для некоторых классифицирующих пространств $BG(n)$.

16.2. Теорема. Пусть h^* — такая мультипликативная теория когомологий, что для каждого n существует элемент $x_n \in h^{2n}(\mathbb{C}P^n)$, удовлетворяющий следующим условиям:

- i) $h^*(\mathbb{C}P^n) \cong h^*(pt)[x_n] / (x_n^{n+1})$;
- ii) $i^*x_{n+1} = x_n$, где $i: \mathbb{C}P^n \rightarrow \mathbb{C}P^{n+1}$ — естественное включение и $n \geq 1$.

Тогда для каждого $U(n)$ -расслоения ξ над клеточным пространством X существуют и единственны элементы $c_i(\xi) \in h^{2i}(X)$, $0 \leq i \leq n$, зависящие лишь от класса изоморфизма расслоения ξ и обладающие следующими свойствами:

- a) если $\xi \rightarrow X$ — некоторое расслоение и $f: Y \rightarrow X$ — некоторое отображение, то $c_i(f^*\xi) = f^*(c_i(\xi))$, $0 \leq i \leq n$;
- b) $c_0(\xi) = 1$ для всех ξ ;
- c) если $\gamma \rightarrow \mathbb{C}P^n$ — комплексное линейное расслоение Хопфа над $\mathbb{C}P^n$, то $c_1(\gamma) = x_n$;
- d) если ξ и η — соответственно $U(m)$ - и $U(n)$ -расслоения над одним и тем же пространством X , то $c_i(\xi \oplus \eta) = \sum_{i+k=i} c_i(\xi) c_k(\eta)$, $0 \leq i \leq n+m$ (если $i > m$, мы полагаем $c_i(\xi) = 0$).

Доказательство. Прежде чем доказывать сформулированные утверждения, займемся некоторыми вспомогательными конструкциями. Пространство $\mathbb{C}P^n$ представляет собой множество всех комплексных прямых в $\mathbb{C}^{n+1}$, проходящих через начало координат 0. Слой расслоения γ над l — это множество всех точек из $\mathbb{C}^{n+1}$, принадлежащих l . Другими словами, $E(\gamma) = \{(l, y) \in \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}^{n+1} : y \in l\}$. Существует прием, позволяющий в некотором смысле расщепить произвольное (n) -расслоение $\xi \rightarrow X$ в сумму Уитни (но над другой базой) линейного, т. е. одномерного, расслоения и некоторого $U(n-1)$ -расслоения. Пусть $P(\xi)$ — пространство всех прямых, лежащих в слоях расслоения ξ и проходящих через 0. Тогда существует очевидная проекция $p': P(\xi) \rightarrow X$, и $(P(\xi), p', X)$ является расслоенным пространством со слоем $\mathbb{C}P^{n-1}$. Пространство $P(\xi)$ можно описать иначе. Пусть $S(\xi)$ — расслоение на $(2n-1)$ -мерные сферы, ассоциированное с ξ . На $S(\xi)$ свободно действует группа $U(1)$. Положим тогда $P(\xi) = S(\xi) / U(1)$. Без труда проверяется, что оба определения $P(\xi)$ совпадают. Вторая конструкция обладает тем достоинством, что с ее помощью на $P(\xi)$ очевидным образом

задается топология. Если база X была клеточным пространством, то на $P(\xi)$ также можно задать структуру клеточного пространства (см. лемму 12.26).

Рассмотрим теперь индуцированное расслоение $\rho'^*\xi$ над $P(\xi)$. Пусть λ_ξ — расслоение над $P(\xi)$, определяемое следующим образом:

$$E(\lambda_\xi) = \{(l, y) \in P(\xi) \times E(\xi): y \in l\}.$$

Тогда существует мономорфизм расслоений $\lambda_\xi \rightarrow \rho'^*\xi$ (заметим, что если $j: \mathbb{C}P^{n-1} \rightarrow P(\xi)$ — включение слоя, то $j^*\lambda_\xi = \gamma$). Обозначим через μ_ξ ортогональное дополнение к λ_ξ в $\rho'^*\xi$. Тогда $\rho'^*\xi \simeq \lambda_\xi \oplus \mu_\xi$ и μ_ξ является $U(n-1)$ -расслоением.

Из условий i), ii) на теорию когомологий h^* вытекает, что $\lim^1 h^*(\mathbb{C}P^n) = 0$. Поэтому, в силу предложения 7.66,

$$h^*(\mathbb{C}P^\infty) \cong \lim^0 h^*(\mathbb{C}P^n) \cong h^*(pt)[[x_\infty]],$$

где $x_\infty \in h^2(\mathbb{C}P^\infty)$ — такой однозначно определенный элемент, что $i_n^*x_\infty = x_n$ для любого включения $i_n: \mathbb{C}P^n \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$. Пусть $f: P(\xi) \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$ — классифицирующее отображение для линейного расслоения λ_ξ (напомним, что $\mathbb{C}P^\infty \simeq BU(1)$ согласно п. 11.36). Если $j: \mathbb{C}P^{n-1} \rightarrow P(\xi)$ — включение слоя, то $f \circ j \simeq i_{n-1}$, и, значит, $j^*f^*x_\infty = x_{n-1}$. Положим

$$y = f^*x_\infty \in h^2(P(\xi)).$$

Тогда элементы $1, y, y^2, \dots, y^{n-1}$ из $h^*(P(\xi))$ обладают тем свойством, что множество $\{j^*1, j^*y, \dots, j^*y^{n-1}\} = \{1, x_{n-1}, \dots, x_{n-1}^{n-1}\}$ образует базис $h^*(pt)$ -модуля $h^*(\mathbb{C}P^{n-1})$. Следовательно, применяя теорему Лере — Хирша 15.47 к расслоению $\mathbb{C}P^{n-1} \rightarrow P(\xi) \rightarrow X$, мы находим, что $h^*(P(\xi))$ является свободным $h^*(X)$ -модулем с базисом $\{1, y, y^2, \dots, y^{n-1}\}$.

Начнем теперь доказывать теорему 16.2. Прежде всего установим единственность классов $c_0(\xi), c_1(\xi), \dots, c_n(\xi)$. Так как $i_n^*\gamma = \gamma$ на $\mathbb{C}P^n$ (символом γ обозначается также и $U(1)$ -расслоение Хопфа над $\mathbb{C}P^\infty$), то в силу свойств а) и с) мы имеем

$$i_n^*(c_1(\gamma)) = c_1(i_n^*\gamma) = c_1(\gamma) = x_n, \quad n \geq 1.$$

С другой стороны, x_∞ является единственным элементом, для которого выполняются равенства $i_n^*(x_\infty) = x_n, n \geq 1$. Следовательно,

$$c_1(\gamma) = x_\infty \in h^2(\mathbb{C}P^\infty).$$

Любое $U(1)$ -расслоение $\xi \rightarrow X$ классифицируется отображением $f_\xi: X \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$. Поэтому, согласно а),

$$c_1(\xi) = c_1(f_\xi^*\gamma) = f_\xi^*(c_1(\gamma)) = f_\xi^*(x_\infty),$$

откуда вытекает, что для любого $U(1)$ -расслоения ξ класс $c_1(\xi)$ определен однозначно.

Предположим теперь, что единственность доказана для всех $U(n-1)$ -расслоений, и пусть $\xi \rightarrow X$ — некоторое $U(n)$ -расслоение. Тогда над $P(\xi)$ имеет место равенство $p'^*\xi = \lambda_\xi \oplus \mu_\xi$ и $c_1(\lambda_\xi) = f^*(x_\infty)$. Таким образом, мы имеем

$$p'^*(c_i(\xi)) = c_i(p'^*(\xi)) = c_i(\lambda_\xi \oplus \mu_\xi) = \\ c_i(\mu_\xi) + c_1(\lambda_\xi) c_{i-1}(\mu_\xi) = c_i(\mu_\xi) + y c_{i-1}(\mu_\xi).$$

Но классы $c_i(\mu_\xi)$ и $c_{i-1}(\mu_\xi)$ однозначно определены по предположению индукции. Следовательно, однозначно определен класс $p'^*(c_i(\xi))$. Так как по теореме Лере — Хирша гомоморфизм

$$p'^*: h^*(X) \rightarrow h^*(P(\xi))$$

является мономорфизмом ($p'^*(x) = p'^*(x) \cdot 1 = x \cdot 1$), то и класс $c_i(\xi)$ также определен однозначно.

Докажем теперь существование классов $c_0(\xi)$, $c_1(\xi)$, ..., $c_n(\xi)$. Пусть ξ — некоторое $U(n)$ -расслоение. Мы видели, что элементы $1, y, \dots, y^{n-1}$ образуют базис $h^*(X)$ -модуля $h^*(P(\xi))$. Следовательно, y^n представляется в виде линейной комбинации

$$y^n = (-1)^{n+1} c_n(\xi) \cdot 1 + (-1)^n c_{n-1}(\xi) \cdot y + \dots + c_1(\xi) \cdot y^{n-1}$$

с подходящими коэффициентами $c_1(\xi)$, ..., $c_n(\xi) \in h^*(X)$. Таким образом, мы имеем

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i c_i(\xi) y^{n-i} = 0,$$

где, по определению, $c_0(\xi) = 1$.

Свойство б) следует из этого определения. Для доказательства свойства а) нужно, прежде всего, проверить, что $P(f^*\xi) \simeq f^*P(\xi)$, $\lambda_{f^*(\xi)} \simeq \bar{f}^* \lambda_\xi$, где $\bar{f}: f^*P(\xi) \rightarrow P(\xi)$ — отображение, накрывающее f , и что $\bar{f}^*(y_\xi) = y_{f^*\xi}$. Все это немедленно получается из соответствующих определений и конструкций. Далее,

$$0 = \bar{f}^* \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i c_i(\xi) y_\xi^{n-i} \right) = \\ \sum_{i=0}^n (-1)^i f^*(c_i(\xi)) \bar{f}^*(y_\xi)^{n-i} = \sum_{i=0}^n (-1)^i f^*(c_i(\xi)) y_{f^*\xi}^{n-i}.$$

Но, с другой стороны, существуют такие однозначно определенные элементы $c_i(f^*\xi)$, что

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i c_i(f^*\xi) y_{f^*\xi}^{n-i} = 0.$$

Следовательно,

$$f^*(c_i(\xi)) = c_i(f^*\xi), \quad 0 \leq i \leq n.$$

Для доказательства свойства с) достаточно заметить лишь, что $P(\gamma) = \mathbb{O}P^n$ и $\lambda_\gamma = \gamma$, $y_\gamma = x_n$, откуда $c_1(\gamma) = x_n$.

Переходим к доказательству свойства d). Пусть ξ и η — соответственно $U(m)$ - и $U(n)$ -расслоения над X . Тогда $P(\xi)$ и $P(\eta)$ являются подпространствами в $P(\xi \oplus \eta)$. Положим $U = P(\xi \oplus \eta) - P(\eta)$, $V = P(\xi \oplus \eta) - P(\xi)$. Без труда проверяется, что $P(\xi)$ является сильным деформационным ретрактом для U , $P(\eta)$ — сильным деформационным ретрактом для V и $U \cup V = P(\xi \oplus \eta)$. Рассмотрим в $h^*(P(\xi \oplus \eta))$ элементы

$$x_1 = \sum_{i=0}^m (-1)^i c_i(\xi) y^{m-i}$$

и

$$x_2 = \sum_{j=0}^n (-1)^j c_j(\eta) y^{n-j},$$

где $y = c_1(\lambda_{\xi \oplus \eta})$. Поскольку $x_1|P(\xi) = 0$, то $x_1|U = 0$. Аналогично, так как $x_2|P(\eta) = 0$, то $x_2|V = 0$. Следовательно, существуют такие элементы $x'_1 \in h^*(P(\xi \oplus \eta), U)$, $x'_2 \in h^*(P(\xi \oplus \eta), V)$, что

$$j_U^* x'_1 = x_1, \quad j_V^* x'_2 = x_2,$$

где

$$j_U: (P(\xi \oplus \eta), \emptyset) \rightarrow (P(\xi \oplus \eta), U),$$

$$j_V: (P(\xi \oplus \eta), \emptyset) \rightarrow (P(\xi \oplus \eta), V)$$

— вложения пар. Но тогда

$$x'_1 \cdot x'_2 \in h^*(P(\xi \oplus \eta), U \cup V) = 0,$$

и поэтому

$$x_1 \cdot x_2 = j_U^* x'_1 \cdot j_V^* x'_2 = j^*(x'_1 \cdot x'_2) = 0.$$

Таким образом,

$$0 = \left(\sum_{i=0}^m (-1)^i c_i(\xi) y^{m-i} \right) \left(\sum_{j=0}^n (-1)^j c_j(\eta) y^{n-j} \right) = \sum_{k=0}^{m+n} (-1)^k \left(\sum_{i+j=k} c_i(\xi) c_j(\eta) \right) y^{m+n-k}.$$

С другой стороны, по определению, существуют и единственные такие элементы $c_k(\xi \oplus \eta)$, что

$$0 = \sum_{k=0}^{m+n} (-1)^k c_k(\xi \oplus \eta) y^{m+n-k}.$$

Следовательно,

$$c_k(\xi \oplus \eta) = \sum_{i+j=k} c_i(\xi) c_j(\eta), \quad 0 \leq k \leq m+n. \quad \square$$

Аналогичные результаты имеют место для вещественных и симплектических расслоений.

16.3. Теорема. Пусть h^* — такая мультипликативная теория когомологий, что для каждого $n \geq 1$ существует элемент $x_n \in h^1(\mathbb{R}P^n)$, удовлетворяющий следующим условиям:

i) $h^*(\mathbb{R}P^n) = h^*(pt)[x_n] / (x_n^{n+1})$;

ii) $i^*x_{n+1} = x_n$, где $i: \mathbb{R}P^n \rightarrow \mathbb{R}P^{n+1}$ — естественное включение.

Тогда для каждого $O(n)$ -расслоения ξ над клеточным пространством X существуют и единственны элементы $w_i(\xi) \in h^i(X)$, $0 \leq i \leq n$, зависящие лишь от класса изоморфизма расслоения ξ и обладающие следующими свойствами:

a) $w_i(f^*(\xi)) = f^*(w_i(\xi))$ для любого отображения $f: Y \rightarrow X$;

b) $w_0(\xi) = 1$;

c) если $\omega \rightarrow \mathbb{R}P^n$ — вещественное линейное расслоение Хопфа над $\mathbb{R}P^n$, то $w_1(\omega) = x_n$;

d) $w_k(\xi \oplus \eta) = \sum_{i+j=k} w_i(\xi) w_j(\eta)$.

16.4. Аналогично, если $h^*(\mathbb{H}P^n) = h^*(pt)[x_n] / (x_n^{n+1})$ для некоторых классов $x_n \in h^4(\mathbb{H}P^n)$, то для любого $Sp(n)$ -расслоения ξ определены характеристические классы $p_i(\xi) \in h^{4i}(X)$, причем $p_1(\rho) = x_n$ для $Sp(1)$ -расслоения Хопфа $\rho \rightarrow \mathbb{H}P^n$.

Замечание. Формально определим полный класс $c(\xi)$, полагая $c(\xi) = 1 + c_1(\xi) + c_2(\xi) + \dots$. Тогда формула Картана 16.2, d) может быть переписана в виде

$$c(\xi \oplus \eta) = c(\xi) \cdot c(\eta).$$

Аналогично, для $w(\xi) = 1 + w_1(\xi) + w_2(\xi) + \dots$ мы имеем

$$w(\xi \oplus \eta) = w(\xi) \cdot w(\eta).$$

Классы $c(\xi)$ и $w(\xi)$ (а также $p(\xi)$) представляют собой чисто формальную конструкцию, весьма удобную в конкретных вычислениях.

16.5. Примеры. В теореме 15.33 мы показали, что

$$H^*(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[e] / (e^{n+1}).$$

Кроме того, классы Эйлера для разных $\mathbb{C}P^n$ согласованы в том смысле, что для естественного включения $i: \mathbb{C}P^n \rightarrow \mathbb{C}P^{n+1}$ имеем $i^*e_{n+1} = i^*d_2(1) = d_2(i^*1) = d_2(1) = e_n$. Аналогично,

$$H^*(\mathbb{H}P^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[e'] / (e'^{n+1}), \quad e' \in H^4(\mathbb{H}P^n; \mathbb{Z}),$$

$$H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[w] / (w^{n+1}), \quad w \in H^1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2).$$

Таким образом, мы получаем для $U(n)$ -расслоений — классы Чженя $c_i(\xi) \in H^{2i}(X; \mathbb{Z})$, для $Sp(n)$ -расслоений — классы Понтрягина $p_i(\xi) \in H^{4i}(X; \mathbb{Z})$ и для $O(n)$ -расслоений — классы Штифеля — Уитни $w_i(\xi) \in H^i(X; \mathbb{Z}_2)$.

В частности, для универсального $O(n)$ -расслоения $\omega_n \rightarrow BO(n)$ можно рассмотреть универсальные классы Штифеля — Уитни $w_i = w_i(\omega_n) \in H^i(BO(n); \mathbb{Z}_2)$, $0 \leq i \leq n$. Подобным образом определены универсальные классы Чженя $c_i = c_i(\gamma_n) \in H^{2i}(BU(n); \mathbb{Z})$ и универсальные классы Понтрягина $p_i = p_i(\rho_n) \in H^{4i}(BSp(n); \mathbb{Z})$.

16.6. Характеристические классы оказываются полезными при решении многих геометрических задач. Проиллюстрируем это следующим простым примером. Пусть M^n — дифференцируемое многообразие, погруженное в евклидово пространство $\mathbb{R}^{n+k}$. Этому погружению отвечает нормальное расслоение ν^k , удовлетворяющее очевидному соотношению $\tau^n \oplus \nu^k \simeq \varepsilon^{n+k}$. Поскольку $\omega(\varepsilon^{n+k}) = 1$, то по формуле Картана получаем, что $\omega(\tau^n) \cdot \omega(\nu^k) = 1$. Следовательно, класс $\omega(\nu^k)$ является формально обратным для класса $\omega(\tau^n)$. Обычно класс $\omega(\tau^n)$ обозначают через $\omega(M^n)$ и называют классом Штифеля — Уитни многообразия M^n . Класс $\omega(\nu^k)$ называется дуальным классом Штифеля — Уитни многообразия M^n и обозначается $\tilde{\omega}(M^n)$. Заметим, что $\tilde{\omega}_r(M^n) = 0$ для $r > k$.

Если многообразие M^n может быть вложено в $\mathbb{R}^{n+k}$, то в то же пространство вкладывается и трубчатая окрестность M^n . Другими словами, существует вложение $D(\nu^k) \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$. Прилежный читатель может проверить, что если $t \in H^k(D(\nu^k); \mathbb{Z}_2)$, $S(\nu^k); \mathbb{Z}_2)$ — класс Тома и $s: M^n \rightarrow D(\nu^k)$ — нулевое сечение, то $s^*j^*(t) \in H^k(M^n; \mathbb{Z}_2)$ является классом Эйлера $e(\nu^k)$ расслоения ν^k (см. теорему 15.54 и далее). Таким образом, $s^*j^*(t) = \tilde{\omega}_k(M^n)$ (см. доказательство теоремы 16.10). Мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
 H^k(\mathbb{R}^{n+k}, \mathbb{Z}_2) & \xleftarrow{j^*} & H^k(\mathbb{R}^{n+k}, \mathbb{R}^{n+k} - f(M^n), \mathbb{Z}_2) & & \\
 f^* \downarrow & \searrow f^* & & & f^* \downarrow \cong \\
 H^k(M^n, \mathbb{Z}_2) & \xleftarrow{s^*} & H^k(D(\nu^k), \mathbb{Z}_2) & \xleftarrow{i^*} & H^k(D(\nu^k), S(\nu^k); \mathbb{Z}_2),
 \end{array}$$

где $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ — вложение и $\tilde{f}: D(\nu^k) \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ — его продолжение на трубчатую окрестность. Гомоморфизм

$$\tilde{f}^*: H^k(\mathbb{R}^{n+k}, \mathbb{R}^{n+k} - f(M^n); \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^k(D(\nu^k), S(\nu^k); \mathbb{Z}_2)$$

является изоморфизмом по аксиоме вырезания. Следовательно, существует такой элемент

$$t' \in H^k(\mathbb{R}^{n+k}, \mathbb{R}^{n+k} - f(M^n); \mathbb{Z}_2),$$

что $\bar{f}^*(t') = t$, и поскольку $j^*t' \in H^k(\mathbb{R}^{n+k}; \mathbb{Z}_2) = 0$, то

$$\tilde{\omega}_k(M^n) = s^*j^*t = s^*j^*\bar{f}^*t' = \bar{f}^*j^*t' = 0.$$

Таким образом, если многообразие M^n может быть вложено в $\mathbb{R}^{n+k}$, то $\tilde{\omega}_r(M^n) = 0$ для $r \geq k$.

16.7. Лемма. Пусть τ^n — касательное расслоение к $\mathbb{R}P^n$ и ω — линейное расслоение Хопфа над $\mathbb{R}P^n$. Тогда

$$(n+1)\omega \simeq \tau^n \oplus \varepsilon^1,$$

где символом $(n+1)\omega$ обозначено расслоение $\omega \oplus \omega \oplus \dots \oplus \omega$ ($n+1$ раз).

Доказательство. Типичная точка расслоения $(n+1)\omega$ имеет вид $(\{x\}, y_0x, y_1x, \dots, y_nx)$, где $x \in S^n$, $y_0, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$, и через $\{x\}$ обозначен образ x в $\mathbb{R}P^n$. Зададим отображение $\phi: (n+1)\omega \rightarrow \tau^n \oplus \varepsilon^1$, полагая

$$\phi(\{x\}, y_0x, y_1x, \dots, y_nx) = (\{x\}, y - (x \cdot y)x, x \cdot y),$$

где $y = (y_0, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Читатель сам без труда выпишет отображение ϕ^{-1} . $\square$

16.8. Следствие. $w(\mathbb{R}P^n) = (1+x)^{n+1}$, где $x \in H^1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$ — образующая.

Доказательство.

$$w(\mathbb{R}P^n) = w(\tau^n) = w(\tau^n \oplus \varepsilon^1) = w((n+1)\omega) =$$

$$w(\omega)^{n+1} = (1+x)^{n+1}. \square$$

16.9. Предложение. Проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ вкладывается в $\mathbb{R}^{n+1}$ лишь тогда, когда $n = 2^r - 1$ для некоторого r , а погружается в $\mathbb{R}^{n+1}$ лишь тогда, когда $n = 2^r - 1$ или $n = 2^r - 2$. Если $n = 2^r$, то не существует ни погружения пространства $\mathbb{R}P^n$ в $\mathbb{R}^{2n-2}$, ни вложения его в $\mathbb{R}^{2n-1}$.

Доказательство. Как мы знаем, если $\mathbb{R}P^n$ может быть погружено в $\mathbb{R}^{n+1}$, то $\tilde{w}(\mathbb{R}P^n) = 1$ или $\tilde{w}(\mathbb{R}P^n) = 1+x$. В первом случае мы должны иметь $(1+x)^{n+1} = 1$, откуда следует, что $n+1 = 2^r$ для некоторого r . Во втором случае $(1+x)^{n+1} = 1+x$, т. е. $n+2 = 2^r$. При этом, если $\mathbb{R}P^n$ вкладывается в $\mathbb{R}^{n+1}$, то $\tilde{w}(\mathbb{R}P^n) = 1$. Далее, если $n = 2^r$, то

$$\tilde{w}(\mathbb{R}P^n) = (1+x)^{-(n+1)} = (1+x)^{-n} (1+x)^{-1} =$$

$$(1+x^n) \cdot (1+x+\dots+x^n) = 1+x+\dots+x^{n-1}. \square$$

Замечание. Уитни показал, что любое n -мерное дифференцируемое многообразие может быть погружено в $\mathbb{R}^{2n-1}$ и вложено в $\mathbb{R}^{2n+1}$.

¹⁾ Недавно Р. Коэн (см. [4*]) доказал гипотезу Масся о том, что любое n -мерное многообразие погружается в $\mathbb{R}^{2n-\alpha(n)}$, где $\alpha(n)$ — число единиц в двоичном разложении числа n . — Прим. ред.

16.10. Теорема.

$$H^*(BO(n); \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n],$$

$$H^*(BU(n); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[c_1, c_2, \dots, c_n],$$

$$H^*(BSp(n); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[p_1, p_2, \dots, p_n].$$

Доказательство. Покажем прежде всего, что $B\iota: BU(n-1) \rightarrow BU(n)$ можно рассматривать как сферическое расслоение для $\gamma_n \rightarrow BU(n)$. Обозначим через $EU(n)$ тотальное пространство универсального главного $U(n)$ -расслоения. В качестве $EU(n)$ может быть взято любое стягиваемое пространство, на котором свободно действует группа $U(n)$ (см. теорему 11.35). Тогда $BU(n) \cong EU(n)/U(n)$. Тотальное пространство сферического расслоения γ_n представляется в виде $E(S(\gamma_n)) = EU(n) \times_{U(n)} S^{2n-1}$. Оказывается, что можно построить гомеоморфизм

$$h: EU(n)/U(n-1) \rightarrow EU(n) \times_{U(n)} S^{2n-1}.$$

В самом деле, пусть

$$g: EU(n) \rightarrow EU(n) \times_{U(n)} S^{2n-1}$$

— отображение, задаваемое формулой $g(e) = (e, s_0)$, где $s_0 = (0, \dots, 0, 1) \in S^{2n-1}$. Очевидно, что $g(eA) = (eA, s_0) = (e, As_0) = (e, s_0) = g(e)$ для всех $A \in U(n-1)$. Таким образом, g индуцирует отображение

$$h: EU(n)/U(n-1) \rightarrow EU(n) \times_{U(n)} S^{2n-1}.$$

Построим обратное отображение h^{-1} . С этой целью для данной точки $(e, s) \in EU(n) \times_{U(n)} S^{2n-1}$ выберем такую матрицу $A \in U(n)$, что $As_0 = s$, и положим $h^{-1}(e, s) = \{eA\}$. Можно показать, что h^{-1} не зависит от выбора A и непрерывно. Следовательно, отображение h является гомеоморфизмом. Поскольку $EU(n)$ — стягиваемое пространство со свободным действием группы $U(n-1)$, то

$$BU(n-1) = EU(n)/U(n-1) \cong E(S(\gamma_n))$$

и $B\iota$ есть в точности проекция $E(S(\gamma_n)) \rightarrow BU(n)$.

Рассмотрим теперь точную последовательность Гизина сферического расслоения $S^{2n-1} \rightarrow BU(n-1) \rightarrow BU(n)$:

$$\dots \rightarrow H^{m-1}(BU(n-1); \mathbb{Z}) \xrightarrow{\phi} H^{m-2n}(BU(n); \mathbb{Z}) \xrightarrow{e \cup} H^m(BU(n); \mathbb{Z}) \xrightarrow{B\iota^*} H^m(BU(n-1); \mathbb{Z}) \rightarrow,$$

где $e \in H^{2n}(BU(n); \mathbb{Z})$ — класс Эйлера. Предположим, что наша теорема доказана для размерности $n-1$ (для $n=1$ она очевидна, поскольку $BU(1) \simeq \mathbb{C}P^\infty$). Так как

$$B\iota^*(c_k) = B\iota^*(c_k(\gamma_n)) = c_k(B\iota^*\gamma_n) = c_k(\gamma_{n-1}) = c_k$$

для всех $0 \leq k \leq n-1$ и $B\iota^*$ является гомоморфизмом колец, то очевидно, что $B\iota^*$ — эпиморфизм. Следовательно, $\phi = 0$, и гомо-

морфизм умножения на класс Эйлера e является мономорфизмом. Кроме того, $\ker B_1^*$ есть идеал, порожденный элементом e . Но, с другой стороны,

$$B_1^*(c_n) = B_1^*(c_n(\gamma_n)) = c_n(B_1^*\gamma_n) = c_n(\gamma_{n-1}) = 0,$$

так что $c_n \in \ker B_1^* = (e)$. Пусть, для определенности, $c_n = \alpha e$, где $\alpha \in H^0(BU(n); \mathbb{Z})$. Мы хотим показать, что $\alpha = \pm 1$. Возьмем $X = \mathbb{C}P^\infty \times \dots \times \mathbb{C}P^\infty$ (n множителей) и $\xi = \gamma \times \gamma \times \dots \times \gamma$. Пусть $f: X \rightarrow BU(n)$ — классифицирующее отображение для расслоения ξ . Тогда полный класс Чженя $c(\xi)$ равен

$$c(\gamma \times \gamma \times \dots \times \gamma) = \prod_{i=1}^n (1 + y_i) = \sum_{i=0}^n \sigma_i(y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Здесь $y_i = \pi_i^* y \in H^2(X; \mathbb{Z})$, $\pi_i: X \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$ — проекция на i -й множитель, и через σ_i обозначен i -й элементарный симметрический полином от переменных $y_1, y_2, \dots, y_n$. В частности, мы имеем $c_n(\xi) = \sigma_n(y_1, y_2, \dots, y_n) = y_1 y_2 \dots y_n$. Но, с другой стороны, $c_n(\xi) = f^*(c_n) = f^*(\alpha e) = \alpha f^*(e)$, откуда следует, что коэффициент α обязан быть равным ± 1 . (Так как $H^*(X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[y_1, y_2, \dots, y_n]$ и $f^*(e) = y_1 \dots y_n$.)

Доказательства для пространств $BO(n)$ и $BSp(n)$ полностью аналогичны. $\square$

16.11. Следствие.

$$H^*(BO; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[w_1, w_2, \dots],$$

$$H^*(BU; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[c_1, c_2, \dots],$$

$$H^*(BSp; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[p_1, p_2, \dots].$$

Доказательство. Так как все гомоморфизмы B_1^* сюръективны, то $\lim^1 H^*(BO(n); \mathbb{Z}_2) = 0$. Следовательно,

$$H^*(BO; \mathbb{Z}_2) \cong \lim^0 H^*(BO(n); \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[w_1, w_2, \dots].$$

Два других изоморфизма доказываются аналогично. $\square$

Пусть $X = \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty \times \dots \times \mathbb{C}P^\infty$ — то же пространство, что в доказательстве теоремы 16.10. В алгебре $H^*(X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[y_1, y_2, \dots, y_n]$ имеется подалгебра $S(y_1, y_2, \dots, y_n)$ симметрических полиномов. Как известно из курса алгебры, $S(y_1, y_2, \dots, y_n) \cong \mathbb{Z}[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n]$. Для любой последовательности целых чисел $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ обозначим через c^α моном $c_1^{\alpha_1} c_2^{\alpha_2} \dots c_n^{\alpha_n}$. Тогда в качестве следствия теоремы 16.10 мы получаем такое утверждение.

$$16.12. \text{ Предложение. } c^\alpha(\xi) = \sigma_1^{\alpha_1} \sigma_2^{\alpha_2} \dots \sigma_n^{\alpha_n}.$$

Доказательство. Мы показали, что $c_i(\xi) = \sigma_i$. Следовательно,

$$\begin{aligned} c^\alpha(\xi) &= f^*(c^\alpha) = f^*(c_1^{\alpha_1} c_2^{\alpha_2} \dots c_n^{\alpha_n}) = \\ &= (f^*c_1)^{\alpha_1} (f^*c_2)^{\alpha_2} \dots (f^*c_n)^{\alpha_n} = \sigma_1^{\alpha_1} \sigma_2^{\alpha_2} \dots \sigma_n^{\alpha_n}. \quad \square \end{aligned}$$

16.13. Следствие. Пусть $f: X \rightarrow BU(n)$ — классифицирующее отображение расслоения ξ . Тогда f индуцирует в когомологиях мономорфизм

$$f^*: H^*(BU(n); \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(X; \mathbb{Z}),$$

образом которого является подалгебра $S(y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Аналогичные результаты имеют место и для $BO(n)$, $BSp(n)$.

Теперь мы хотим вычислить гомологии пространств BO , BU и BSp . Все они являются H -пространствами с умножениями, индуцированными сложениями Уитни соответствующих расслоений. Следовательно, $H_*(BU; \mathbb{Z})$ (и точно так же $H_*(BO; \mathbb{Z}_2)$, $H_*(BSp; \mathbb{Z})$) является кольцом с умножением Понтрягина. Более подробно, если $\phi: BU \times BU \rightarrow BU$ представляет собой H -умножение в BU , то умножение в $H_*(BU; \mathbb{Z})$ определяется как композиция

$$H_*(BU; \mathbb{Z}) \otimes H_*(BU; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H_*(BU \times BU; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\phi_*} H_*(BU; \mathbb{Z}).$$

Очевидно, что это умножение ассоциативно и градуированно коммутативно, т. е. $ab = (-1)^{a \cdot b} ba$.

Пусть $i: O(1) \rightarrow O$ — включение группы $O(1)$ в прямой предел $O = \varinjlim O(n)$ и $Bi: BO(1) \rightarrow BO$ — индуцированное им отображение классифицирующих пространств. Поскольку $BO(1) \simeq \mathbb{R}P^\infty$, то $H_*(BO(1); \mathbb{Z}_2)$ имеет $\mathbb{Z}_2$ -базис $1, x_1, x_2, \dots$, где x_n — элемент, двойственный к $\omega_1^n \in H^*(BO(1); \mathbb{Z}_2)$. Этим же символом x_n обозначим элемент $Bi_*(x_n) \in H_*(BO; \mathbb{Z}_2)$. Аналогично, мы имеем в $H_*(BU(1); \mathbb{Z})$ базис $1, y_1, y_2, \dots$, двойственный к $\{c_1^n\}$, и элементы $1, y_1, y_2, \dots$ в $H_*(BU; \mathbb{Z})$. Точно так же строятся элементы $1, z_1, z_2, \dots$ из $H_*(BSp; \mathbb{Z})$.

Кроме умножения Понтрягина в гомологиях $H_*(BO; \mathbb{Z}_2)$, отображение ϕ индуцирует также коумножение

$$H^*(BO; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\phi^*} H^*(BO \times BO; \mathbb{Z}_2) \cong H^*(BO; \mathbb{Z}_2) \otimes_{\mathbb{Z}_2} H^*(BO; \mathbb{Z}_2),$$

которое мы будем обозначать через ϕ^* .

16.14. Предложение. Пусть $\phi^*(z) = \sum_i z_i \otimes z'_i$, где $z \in H^*(BO; \mathbb{Z}_2)$. Тогда

$$z(\xi \oplus \eta) = \sum_i z_i(\xi) z'_i(\eta)$$

для любых расслоений ξ и η .

Доказательство. Пусть $f: X \rightarrow BO(m)$ и $g: X \rightarrow BO(n)$ — классифицирующие отображения расслоений ξ и η . Тогда сумме $\xi \oplus \eta$ отвечает отображение $\mu_{mn} \circ (f \times g) \circ \Delta$, где

$$\mu_{mn}: BO(m) \times BO(n) \rightarrow BO(m+n)$$

— классифицирующее отображение для $\omega_m \times \omega_n$. Следовательно,

$$\begin{aligned} z(\xi \oplus \eta) &= \Delta^* \cdot (f \times g)^* \cdot \mu_{mn}^* \cdot Bi_{m+n}^*(z) = \\ &= \Delta^* \cdot (f \times g)^* \cdot (Bi_m \times Bi_n)^* \cdot \phi^*(z) = \\ &= \Delta^* \cdot (f \times g)^* \left(\sum_i Bi_m^* z_i \times Bi_n^* z'_i \right) = \\ &= \Delta^* \left(\sum_i z_i(\xi) \times z'_i(\eta) \right) = \sum_i z_i(\xi) z'_i(\eta). \end{aligned}$$

Здесь мы использовали тот факт, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} BO(m) \times BO(n) & \xrightarrow{\mu_{mn}} & BO(m+n) \\ \downarrow Bi_m \times Bi_n & & \downarrow Bi_{m+n} \\ BO \times BO & \xrightarrow{\phi} & BO \end{array}$$

гомотопически коммутативна. $\square$

Для расслоения Хопфа $\omega \rightarrow \mathbb{R}P^\infty$ мы имеем

$$w^\alpha(\omega) = \begin{cases} x^k, & \alpha = (k), \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \langle w^\alpha, x_i \rangle &= \langle w^\alpha, Bi_*(x_i) \rangle = \langle Bi^*(w^\alpha), x_i \rangle = \langle w^\alpha(\omega), x_i \rangle = \\ &= \begin{cases} \langle x^k, x_i \rangle, & \alpha = (k) \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases} = \begin{cases} 1, & \alpha = (i), \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \end{aligned}$$

Следовательно, элемент x_i двойствен к $w^{(i)} = w_i^i \in H^*(BO; \mathbb{Z}_2)$. Из сказанного вытекает, что $w^\alpha(\omega)$ может быть записан в виде

$$w^\alpha(\omega) = \sum_{i \geq 1} \langle w^\alpha, x_i \rangle x^i.$$

Поскольку каждый элемент $z \in H^*(BO; \mathbb{Z}_2)$ является $\mathbb{Z}_2$ -линейной комбинацией классов w^α , то мы доказали, что

$$16.15. \quad z(\omega) = \sum_{i \geq 0} \langle z, x_i \rangle x^i, \quad z \in H^*(BO; \mathbb{Z}_2).$$

Пусть $X = \mathbb{R}P^\infty \times \dots \times \mathbb{R}P^\infty$ (n раз) и $\xi_n = \omega \times \dots \times \omega$, где $\omega \rightarrow \mathbb{R}P^\infty$ — расслоение Хопфа.

16.16. Предложение. Для любого $z \in H^*(BO; \mathbb{Z}_2)$ имеет место равенство

$$z(\xi_n) = \sum_{l(\alpha)=n} \langle z, x_\alpha \rangle u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \dots u_n^{\alpha_n},$$

где $u_i = \pi_i^* x$, $\pi_i: X \rightarrow \mathbb{R}P^\infty$ — проекция на i -й множитель, $x_\alpha = x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \dots x_{\alpha_n}$ и $l(\alpha) = m$, если $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$.

Доказательство. Будем доказывать предложение индукцией по n . Для $n=1$ это в точности равенство 16.15. Предположим, что указанное равенство верно для $n-1$, и пусть $\phi^* z = \sum_i z_i \otimes z'_i$. Тогда

$$\begin{aligned} z(\xi_n) &= z(\xi_{n-1} \times \omega) = \sum_i z_i(\xi_{n-1}) \times z'_i(\omega) = \\ &= \sum_i \left(\sum_{l(\alpha)=n-1} \langle z_i, x_\alpha \rangle u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \dots u_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \right) \left(\sum_{j \geq 0} \langle z'_i, x_j \rangle u_n^j \right) = \\ &= \sum_{j, l(\alpha)=n-1} \left\langle \sum_i z_i \otimes z'_i, x_\alpha \otimes x_j \right\rangle u_1^{\alpha_1} \dots u_{n-1}^{\alpha_{n-1}} u_n^j = \\ &= \sum_{j, l(\alpha)=n-1} \langle \phi^* z, x_\alpha \otimes x_j \rangle u_1^{\alpha_1} \dots u_{n-1}^{\alpha_{n-1}} u_n^j = \\ &= \sum_{j, l(\alpha)=n-1} \langle z, x_\alpha x_j \rangle u_1^{\alpha_1} \dots u_{n-1}^{\alpha_{n-1}} u_n^j = \\ &= \sum_{l(\beta)=n} \langle z, x_\beta \rangle u_1^{\beta_1} \dots u_n^{\beta_n}, \quad \beta = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, j). \quad \square \end{aligned}$$

16.17. Теорема.

$$H_*(BO; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[x_1, x_2, \dots],$$

$$H_*(BU; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[y_1, y_2, \dots],$$

$$H_*(BSp; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[z_1, z_2, \dots].$$

Доказательство. Рассмотрим сначала точную последовательность Гизина сферического расслоения $S^{2n-1} \rightarrow BU(n-1) \rightarrow BU(n)$:

$$\begin{aligned} \dots \leftarrow H_{m-1}(BU(n-1); \mathbb{Z}) \xrightarrow{\phi} H_{m-2n}(BU(n); \mathbb{Z}) \xrightarrow{d^2} \\ H_m(BU(n); \mathbb{Z}) \xrightarrow{Bi_*} H_m(BU(n-1); \mathbb{Z}) \leftarrow \dots \end{aligned}$$

С помощью двойной индукции по n и m нетрудно показать, что группы $H_m(BU(n); \mathbb{Z})$ конечно порождены для всех n, m (это очевидно для $H_m(BU(1); \mathbb{Z}) = H_m(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z})$). Из точности последовательности универсальных коэффициентов

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Ext}(H_{m-1}(BU(n); \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \rightarrow H^m(BU(n); \mathbb{Z}) \rightarrow \\ \text{Hom}(H_m(BU(n); \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

вытекает, что группы $H_*(BU(n); \mathbb{Z})$ не имеют кручения для всех $n \geq 1$. Таким образом, все группы $H_m(BU(n); \mathbb{Z})$ являются конечно порожденными свободными абелевыми группами, откуда следует, что

$$H^m(BU(n); \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(H_m(BU(n); \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$$

и

$$H_m(BU(n); \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(H^m(BU(n); \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(H^m(BU; \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$$

для всех $n > m/2$. В частности,

$$H_m(BU; \mathbb{Z}) \cong \varinjlim H_m(BU(n); \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(H^m(BU; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}).$$

Итак, $H_m(BU; \mathbb{Z})$ — конечно порожденная свободная абелева группа и $\text{rk } H_m(BU; \mathbb{Z}) = \text{rk } H^m(BU; \mathbb{Z})$. Поэтому для доказательства изоморфизма

$$H_*(BU; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[y_1, y_2, \dots]$$

достаточно показать, что мономы $y^\alpha = y_1^{\alpha_1} \dots y_n^{\alpha_n}$ аддитивно порождают $H_*(BU; \mathbb{Z})$.

Предположим, что существует такой элемент $z \in H^*(BU; \mathbb{Z})$, что $\langle z, y^\alpha \rangle = 0$ для всех y^α . Тогда для всех n

$$f^* B i_n^*(z) = z(\xi_n) = \sum_{\alpha} \langle z, y^\alpha \rangle u_1^{\alpha_1} \dots u_n^{\alpha_n} = 0,$$

где $f: \mathbb{CP}^\infty \times \dots \times \mathbb{CP}^\infty \rightarrow BU(n)$ — классифицирующее отображение расслоения $\xi_n = \gamma \times \dots \times \gamma$. Согласно следствию 16.13 гомоморфизм f^* является мономорфизмом. Следовательно, $B i_n^*(z) = 0$ для всех n . Но это означает, что $z = 0$. Приведенные рассуждения показывают, что мономы y^α порождают $H_*(BU; \mathbb{Z}_p)$, где p — простое число и $\mathbb{Z}_p$ — поле из p элементов. В случае же коэффициентов $\mathbb{Z}$ мы пока знаем лишь, что для любого $x \in H_*(BU; \mathbb{Z})$ найдется такое целое число n , что nx является линейной комбинацией мономов y^α .

Пусть $N = \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots]$, $\deg x_i = 2i$, и $h: N \rightarrow H_*(BU; \mathbb{Z})$ — гомоморфизм алгебр, задаваемый формулой $h(x_i) = y_i$, $i \geq 1$. Мы установили, что

$$h \otimes 1: N \otimes \mathbb{Z}_p \rightarrow H_*(BU; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_p$$

— изоморфизм для всех простых чисел p . Предположим, что для некоторого $x \in N$ существует простое p , делящее $h(x)$. Тогда $h(x) \otimes 1 = 0 \in H_*(BU; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_p$, т. е. $x \otimes 1 = 0 \in N \otimes \mathbb{Z}_p$. Следовательно, $p \mid x$. Этим завершается доказательство изоморфизма $H_*(BU; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[y_1, y_2, \dots]$ для классифицирующего пространства BU . Доказательства для пространств BO и BSp аналогичны. $\square$

16.18. Зная $H_*(BU; \mathbb{Z})$, можно вычислить кольцо $H_*(K; \mathbb{Z})$. Согласно предложению 13.49

$$H_n(K; \mathbb{Z}) \cong \varinjlim \tilde{H}_{n+2q}(BU; \mathbb{Z}),$$

где гомоморфизмы прямой системы имеют вид

$$\tilde{H}_{n+2q}(BU; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sigma^2} \tilde{H}_{n+2q+2}(S^2 \wedge BU; \mathbb{Z}) \xrightarrow{B_2} \tilde{H}_{n+2q+2}(BU; \mathbb{Z}).$$

Обозначим эти гомоморфизмы через B и выясним, как они действуют на $\tilde{H}_*(BU; \mathbb{Z})$. Прежде всего установим, что B обращается в нуль на всех произведениях и, значит, требуется лишь вычислить $B(y_k)$ для всех k . Согласно предложению 15.43 имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_{n+2q}(BU; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{B'_*} & \tilde{H}_{n+2q}(\Omega_0^2 BU; \mathbb{Z}) \\ \downarrow \sigma^2 & & \downarrow \sigma \\ \tilde{H}_{n+2q+2}(S^2 \wedge BU; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{B_*} & \tilde{H}_{n+2q+2}(BU; \mathbb{Z}). \end{array}$$

Кроме того, поскольку изоморфизм периодичности Ботта

$$\tilde{K}^0(X) \cong \tilde{K}^0(S^2 \wedge X)$$

сохраняет суммы, то умножению ϕ на BU при отображении $B': BU \rightarrow \Omega_0^2 BU$ соответствует умножение $\Omega^2 \phi$ на $\Omega_0^2 BU$. Но согласно предложению 2.24 $\Omega^2 \phi$ с точностью до гомотопии совпадает с умножением петель μ_Ω . Следовательно, в силу коммутативности упомянутой диаграммы нам достаточно показать лишь то, что на произведениях обращается в нуль гомоморфизм гомологической надстройки σ' .

16.19. Предложение. Пусть h_* — произвольная неприведенная мультипликативная теория гомологий. Тогда гомоморфизм гомологической надстройки

$$\sigma': \tilde{h}_n(\Omega Y) \rightarrow \tilde{h}_{n+1}(Y)$$

обращается в нуль на всех произведениях Понтрягина.

Доказательство. Пусть $a \in \tilde{h}_p(\Omega Y)$, $b \in \tilde{h}_q(\Omega Y)$. Рассмотрим диаграмму, изображенную на с. 452 (здесь $\mu': \Omega Y \times PY \rightarrow PY$ — очевидное отображение $\mu'(\omega, \omega) = \omega * \omega$). Согласно предложению 7.10 найдутся такие элементы $a' \in h_p(\Omega Y)$, $b' \in h_q(\Omega Y)$, что $j_* a' = a$, $j_* b' = b$, $p_* a' = 0 = p_* b' \in h_*(\{y_0\})$. Но тогда $ab = j_* \mu_*(a' \times b') \in h_{p+q}(\Omega Y, \{y_0\}) = \tilde{h}_{p+q}(\Omega Y)$. Так как $\times \cdot (1 \otimes \partial) = (-1)^p \partial \cdot \times$, то эта диаграмма коммутативна с точностью до знака, и мы имеем $\sigma'(ab) = p_* a' \times \sigma'(b) = 0$. $\square$

Факторалгеброй $Q(A)$ неразложимых элементов некоторой пополненной алгебры A называется факторалгебра $A/\phi(\bar{A} \otimes \bar{A})$, где $\bar{A} = \ker[\varepsilon: A \rightarrow R]$ — идеал пополнения и $\phi: A \otimes A \rightarrow A$ — умножение. Так как $B: \tilde{H}_*(BU; \mathbb{Z}) \rightarrow \tilde{H}_*(BU; \mathbb{Z})$ обращается в нуль на всех произведениях (заметим, что $\overline{H}_*(BU; \mathbb{Z}) = \tilde{H}_*(BU; \mathbb{Z})$), то мы можем рассматривать его как гомоморфизм

$$B: Q_m(H_*(BU; \mathbb{Z})) \rightarrow Q_{m+2}(H_*(BU; \mathbb{Z})).$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 h_p(\Omega Y, \{\omega_0\}) \otimes h_q(\Omega Y, \{\omega_0\}) & & & & h_{p+q}(\Omega Y, \{\omega_0\}) & & \\
 \swarrow j_* \otimes \Delta & & & & \nwarrow j_* & & \\
 h_p(\Omega Y) \otimes h_q(\Omega Y) & \xrightarrow{\times} & h_{p+q}(\Omega Y \times \Omega Y) & \xrightarrow{\mu_*} & h_{p+q}(\Omega Y) & \xrightarrow{\partial} & h_{p+q+1}(PY, \Omega Y) \\
 \uparrow 1 \otimes \partial & & \uparrow \partial & & & & \\
 h_p(\Omega Y) \otimes h_{q+1}(PY, \Omega Y) & \xrightarrow{(-1)^p \times} & h_{p+q+1}(\Omega Y \times PY, \Omega Y \times \Omega Y) & \xrightarrow{\mu'_*} & h_{p+q+1}(PY, \Omega Y) & \xrightarrow{p_*} & h_{p+q+1}(Y, \{y_0\}) \\
 \downarrow p_* \otimes p_* & & \downarrow (\tilde{p} \times p)_* & & & & \\
 h_p(\{y_0\}) \otimes h_{q+1}(Y, \{y_0\}) & \xrightarrow{\times} & h_{p+q+1}(\{y_0\} \times Y, \{y_0 \times y_0\}) & \xrightarrow{\approx} & h_{p+q+1}(Y, \{y_0\}) & &
 \end{array}$$

Двойственной к $Q(H_*(BU; \mathbb{Z}))$ является подгруппа $P(H^*(BU; \mathbb{Z}))$ примитивных элементов из $H^*(BU; \mathbb{Z})$: отображение суммы Уитни $\phi: BU \times BU \rightarrow BU$ индуцирует коумножение

$$H^*(BU; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\phi^*} H^*(BU \times BU; \mathbb{Z}) \cong H^*(BU; \mathbb{Z}) \otimes H^*(BU; \mathbb{Z}),$$

и элемент $x \in H^*(BU; \mathbb{Z})$ называется *примитивным*, если $\phi^*(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1$. Группа $P(H^*(BU; \mathbb{Z}))$ двойственна к $Q(H_*(BU; \mathbb{Z}))$ потому, что $x \in H^*(BU; \mathbb{Z})$ примитивен тогда и только тогда, когда $\langle x, ab \rangle = 0$ для всех нетривиальных произведений $ab \in H_*(BU; \mathbb{Z})$. Действительно, если $\phi^*x = \sum_i x_i \otimes x'_i$, то

$$0 = \langle x, ab \rangle = \langle x, \phi_*(a \times b) \rangle = \langle \phi^*x, a \times b \rangle = \sum_i \langle x_i, a \rangle \langle x'_i, b \rangle.$$

Можно дать другое описание группы $P(H^*(BU; \mathbb{Z}))$. *Нестабильной когомологической операцией* называется естественное преобразование

$$\theta: k^q(-) \rightarrow k^r(-),$$

где k^* и $\bar{k}^*$ — некоторые теории когомологий. Операция θ называется *аддитивной*, если $\theta(x+y) = \theta(x) + \theta(y)$ для всех $x, y \in k^q(X)$. Пусть C^* — множество всех когомологических операций $K^0(-) \rightarrow H^*(-; \mathbb{Z})$ и $A^* \subset C^*$ — подмножество аддитивных операций.

16.20. Предложение. Соответствие

$$\alpha: C^* \rightarrow H^*(BU; \mathbb{Z}),$$

задаваемое формулой $\theta \mapsto \theta(\gamma)$ (где $\gamma \in [BU, BU] \cong \tilde{K}^0(BU)$) — гомотопический класс отображения 1_{BU} , является биекцией и отображает A^* на $P(H^*(BU; \mathbb{Z}))$.

Доказательство. Мы знаем, что $\tilde{K}^0(X) \cong [X, BU]$. Определим отображение α^{-1} , полагая

$$(\alpha^{-1}(x))[f] = f^*x \in H^*(X; \mathbb{Z})$$

для всех $[f] \in [X, BU]$, $x \in H^*(BU; \mathbb{Z})$. Это отображение индуцирует естественное преобразование

$$\alpha^{-1}(x): \tilde{K}^0(-) \rightarrow H^*(-; \mathbb{Z}),$$

очевидным образом продолжающееся на $K^0(-)$. Без труда проверяется, что отображение α^{-1} является обратным к α .

Пусть $\theta \in A^*$; тогда

$$\begin{aligned} \phi^*\theta(\gamma) &= \theta(\phi^*\gamma) = \theta(\gamma \times 1 + 1 \times \gamma) = \\ &= \theta(\gamma \times 1) + \theta(1 \times \gamma) = \theta(\gamma) \otimes 1 + 1 \otimes \theta(\gamma), \end{aligned}$$

т. е. элемент $\theta(\gamma)$ является примитивным. С другой стороны, если x примитивен, то

$$\begin{aligned}\alpha^{-1}(x)([f] + [g]) &= \alpha^{-1}(x)[\phi \cdot (f \times g) \cdot \Delta] = \\ &= \Delta^* \cdot (f \times g)^* \phi^*(x) = \Delta^* \cdot (f \times g)^*(x \times 1 + 1 \times x) = \\ &= f^*x + g^*x = \alpha^{-1}(x)[f] + \alpha^{-1}(x)[g].\end{aligned}$$

Таким образом, $\alpha^{-1}(x) \in A^*$. $\square$

Определим отображение

$$\bar{B}: P^n(H^*(BU; \mathbb{Z})) \rightarrow P^{n-2}(H^*(BU; \mathbb{Z}))$$

требованием коммутативности для всех $\theta \in A^*$ следующей диаграммы:

$$\begin{array}{ccc}\tilde{K}^0(X) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{K}^0(S^2 \wedge X) \\ \bar{B}\theta \downarrow & & \downarrow \theta \\ \tilde{H}^{n-2}(X; \mathbb{Z}) & \xrightarrow[\cong]{\sigma^{-2}} & \tilde{H}^n(S^2 \wedge X; \mathbb{Z}).\end{array}$$

16.21. Предложение. *Отображения $\bar{B}$ и $\underline{B}$ связаны формулой*

$$\langle \theta, Ba \rangle = \langle \bar{B}\theta, a \rangle,$$

где $\theta \in A^*$, $a \in Q_m(H_*(BU; \mathbb{Z}))$.

Доказательство.

$$\begin{aligned}\langle \bar{B}\theta(\gamma), a \rangle &= \langle \sigma^2 \theta(B^* \gamma), a \rangle = \langle \theta(B^* \gamma), \sigma^2 a \rangle = \\ &= \langle B^*(\theta(\gamma)), \sigma^2 a \rangle = \langle \theta(\gamma), B_* \sigma^2 a \rangle = \langle \theta(\gamma), \underline{B}a \rangle. \quad \square\end{aligned}$$

В силу естественности любой элемент $\theta \in A^*$ полностью определяется своим значением на универсальном линейном расслоении γ_1 над $BU(1)$. В самом деле, если задано произвольное расслоение $\xi \rightarrow X$, то подобно тому, как это делалось в доказательстве теоремы 16.2, можно найти такое отображение $f: Y \rightarrow X$, что $f^* \xi$ является суммой линейных расслоений и $f^*: \tilde{H}^*(X; \mathbb{Z}) \rightarrow \tilde{H}^*(Y; \mathbb{Z})$ — мономорфизм. Но для любого линейного расслоения $\lambda \rightarrow Y$ найдется такое классифицирующее отображение $g: Y \rightarrow BU(1)$, что $\lambda = g^* \gamma_1$ и, следовательно, $\theta(\lambda) = \theta(g^* \gamma_1) = g^* \theta(\gamma_1)$. Если $\theta \in A^n$, то $\theta(\gamma_1)$ может быть произвольным элементом группы $H^n(BU(1); \mathbb{Z})$.

Пусть ϕ^r — такая однозначно определенная операция, что $\phi^r(\gamma_1) = \gamma^r \in H^{2r}(BU(1); \mathbb{Z})$. Тогда мы имеем $\langle \phi^r, \gamma_q \rangle = \delta_q^r$.

16.22. Предложение. $\bar{B}\phi^r = r\phi^{r-1}$, $r > 1$, и $\bar{B}\phi^1 = 0$.

Доказательство. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc}
 \tilde{K}^0(X) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{K}^0(S^2 \wedge X) & \longrightarrow & \tilde{K}^0(S^2 \times X) \\
 \downarrow \bar{B}\phi^r & & \downarrow \phi^r & & \downarrow \phi^r \\
 \tilde{H}^{2r-2}(X; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\sigma^{-2}} & \tilde{H}^{2r}(S^2 \wedge X; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & \tilde{H}^{2r}(S^2 \times X; \mathbb{Z}).
 \end{array}$$

Пусть η — расслоение Хопфа над $S^2 \cong \mathbb{C}P^1$ и $\omega = \eta - 1 \in \tilde{K}^0(S^2)$. Верхний горизонтальный гомоморфизм в диаграмме — это умножение на элемент ω . Нижний горизонтальный гомоморфизм — это умножение на образующую $g \in \tilde{H}^2(S^2; \mathbb{Z})$. Положим $X = BU(1)$ и применим диаграмму к расслоению $\gamma_1 - 1$. Тогда

$$\begin{aligned}
 g \times \bar{B}\phi^r(\gamma_1 - 1) &= \phi^r((\eta - 1) \times (\gamma_1 - 1)) = \\
 &= \phi^r(\eta \times \gamma_1 - 1 \times \gamma_1 - \eta \times 1 + 1 \times 1) = \\
 &= \phi^r(\eta \times \gamma_1) - \phi^r(1 \times \gamma_1) - \phi^r(\eta \times 1) + \phi^r(1 \times 1)
 \end{aligned}$$

Если $\mu_1: BU(1) \times BU(1) \rightarrow BU(1)$ — классифицирующее отображение для $\gamma_1 \times \gamma_1$ и $h: S^2 \rightarrow BU(1)$ — классифицирующее отображение для η , то расслоение $\eta \times \gamma_1$ классифицируется композицией

$$S^2 \times BU(1) \xrightarrow{h \times 1} BU(1) \times BU(1) \xrightarrow{\mu_1} BU(1).$$

Поскольку $\mu_1^* y = y \times 1 + 1 \times y$, то

$$\begin{aligned}
 \phi^r(\eta \times \gamma_1) &= \phi^r((h \times 1)^* \mu_1^* \gamma_1) = (h \times 1)^* \mu_1^* \phi^r(\gamma_1) = \\
 &= (h \times 1)^* \mu_1^*(y^r) = (h \times 1)^*(y \times 1 + 1 \times y)^r = \\
 &= (h \times 1)^* \left(\sum_{j=0}^r \binom{r}{j} y^j \times y^{r-j} \right) = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} g^j \times y^{r-j}.
 \end{aligned}$$

Но $g^2 = 0$, так что $\phi^r(\eta \times \gamma_1) = 1 \times y^r + r g \times y^{r-1}$. Аналогично,

$$\phi^r(\eta \times 1) = \begin{cases} g \times 1, & r = 1, \\ 0, & r > 1. \end{cases}$$

Следовательно,

$$g \times \bar{B}\phi^r(\gamma_1 - 1) = \begin{cases} r g \times y^{r-1}, & r > 1, \\ 0, & r = 1. \quad \square \end{cases}$$

16.23. Следствие. Для любого $k \geq 1$

$$By_k = (k+1)y_{k+1} + \{\text{разложимые элементы}\}.$$

Пусть $u_i^{j-1} \in H_{2j-2k}(K; \mathbb{Z})$ — образ элемента $y_j \in \tilde{H}_{2j}(BU; \mathbb{Z})$, где BU рассматривается как $2k$ -й член спектра K , $k \in \mathbb{Z}$, $j \geq 1$.

Согласно следствию 16.23

$$y_j^{j-k} = (j+1) y_{j+1}^{j-k}.$$

Другими словами, $y_j^k = (1/j!) y_1^k$ для всех $k \in \mathbb{Z}$, $j \geq 1$.

16.24. Следствие. Для любого $n \in \mathbb{Z}$ элемент y_1^n порождает группу $H_{2n}(K; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Q}$. Кроме того,

$$H_{2n+1}(K; \mathbb{Z}) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Если $\hat{B}: \pi_q(BU, *) \rightarrow \pi_{q+2}(BU, *)$ — отображение периодичности

$$\pi_q(BU, *) \xrightarrow{\Sigma^2} \pi_{q+2}(S^2 \wedge BU, *) \xrightarrow{B*} \pi_{q+2}(BU, *)$$

и $t \in \pi_2(BU, *)$ — образующая (соответствующая элементу $\eta - 1 \in \tilde{K}^0(S^2)$), то $\hat{B}(t^q) = t^{q+1}$, $q \in \mathbb{Z}$. Так как диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi_{2q}(BU, *) & \xrightarrow{\hat{B}} & \pi_{2q+2}(BU, *) \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ \tilde{H}_{2q}(BU; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{B} & \tilde{H}_{2q+2}(BU; \mathbb{Z}) \end{array}$$

коммутативна и $h(t) = y_1$, то по индукции получается, что

$$h(t^q) = h(\hat{B}t^{q-1}) = \underline{B}h(t^{q-1}) = \underline{B}((q-1)! y_{q-1}) = q! y_q$$

по модулю разложимых элементов. Поскольку диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi_{2q}(BU, *) & \xrightarrow{\cong} & \pi_{2q}(K) \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ \tilde{H}_{2q}(BU; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H_{2q}(K; \mathbb{Z}) \end{array}$$

также коммутативна, то $h(t^q) = q! y_q^q = y_1^q$. Но h является гомоморфизмом колец (кольцевая структура задается отображением $K \wedge K \rightarrow K$). Следовательно,

$$h(t^q) = h(t)^q = (y_1^1)^q.$$

Таким образом, для всех $q \in \mathbb{Z}$ мы имеем $y_1^q = (y_1^1)^q$.

16.25. Теорема. Кольцо $H_*(K; \mathbb{Z})$ изоморфно кольцу $\mathbb{Q}[u, u^{-1}]$ конечных лорановских рядов над $\mathbb{Q}$ от переменной $u = y_1^1 \in H_2(K; \mathbb{Z})$.

Аналогичным образом можно вычислить кольцо $H_*(KO; \mathbb{Z})$, используя тот факт, что каждый $(8n+4)$ -й член спектра KO есть BSp .

В главе 13 мы определили для произвольных кольцевых спектров E и F отображение Бордмана

$$B: F^*(X) \rightarrow (E \wedge F)^*(X).$$

В частности, можно взять $E = H(\mathbb{Z})$ и $F = K$. Рассмотрим теперь кофунктор $k^* = \text{Hom}^*(H_*(-; \mathbb{Z}), H_*(K; \mathbb{Z}))$ ($\text{Hom}^r(,)$ означает группу гомоморфизмов степени r градуированных групп). В действительности k^* является теорией когомологий: точность следует из теоремы 16.25 и того факта, что $\text{Hom}(-; \mathbb{Q})$ — точный кофунктор (см. [49], с. 125 русского издания). Более того, k^* даже удовлетворяет аксиомам суммы и слабой гомотопической эквивалентности. Рассмотрим отображение

$$\tau: (H(\mathbb{Z}) \wedge K)^* \rightarrow k^*,$$

определенное формулой

$$(\tau[f])[g] = [\mu_H \cdot (1 \wedge f) \cdot g],$$

где $f: X \rightarrow H(\mathbb{Z}) \wedge K$, $g: S^0 \rightarrow H(\mathbb{Z}) \wedge X$ — произвольные отображения и $\mu_H: H(\mathbb{Z}) \wedge H(\mathbb{Z}) \rightarrow H(\mathbb{Z})$ — умножение в спектре $H(\mathbb{Z})$. Без труда проверяется, что τ является естественным преобразованием теорий когомологий, индуцирующим изоморфизм для $X = S^0$. Следовательно, τ — естественная эквивалентность. Кроме того, поскольку кофунктор $\text{Hom}(-, \mathbb{Q})$ точен, то $\text{Ext}(A, \mathbb{Q}) = 0$ для всех абелевых групп A . Таким образом, из теоремы об универсальных коэффициентах вытекает, что

$$\text{Hom}^r(H_*(X; \mathbb{Z}), H_*(K; \mathbb{Z})) \cong \begin{cases} \prod_{q \geq 0} H^{2q}(X; \mathbb{Q}), & r \text{ чётно,} \\ \prod_{q \geq 0} H^{2q+1}(X; \mathbb{Q}), & r \text{ нечётно.} \end{cases}$$

Обозначим эти произведения через $H^{\text{ev}}(X; \mathbb{Q})$ и $H^{\text{od}}(X; \mathbb{Q})$ соответственно. Композиция

$$K^*(X) \xrightarrow{B} (H(\mathbb{Z}) \wedge K)^*(X) \xrightarrow{\tau} \text{Hom}^*(H_*(X; \mathbb{Z}), H_*(K; \mathbb{Z})) \cong H^{**}(X; \mathbb{Q})$$

обозначается через ch и называется *характером Чженя*. Для любого пространства X характер Чженя является кольцевым гомоморфизмом.

16.26. Предложение. Если γ — расслоение Хопфа над $\mathbb{C}P^n$, то

$$\text{ch}(\gamma) = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \dots = e^y.$$

Доказательство. Если группа $H^*(X; \mathbb{Z})$ свободна и имеет конечный тип, то

$$\text{Hom}(H_*(X; \mathbb{Z}), H_*(K; \mathbb{Z})) \cong H^*(X; \mathbb{Z}) \hat{\otimes} H_*(K; \mathbb{Z}),$$

и указанный изоморфизм (не канонически) определяется формулой

$$\phi \mapsto \sum_{\alpha} z_{\alpha} \otimes \phi(x_{\alpha}),$$

где $\phi \in \text{Hom}^*(H_*(X; \mathbb{Z}), H_*(K; \mathbb{Z}))$, $\{z_{\alpha}\}$ — некоторый базис в $H^*(X; \mathbb{Z})$ и $\{x_{\alpha}\}$ — двойственный базис в $H_*(X; \mathbb{Z})$.

Далее, если $X = \mathbb{C}P^{\infty}$, то элемент $\gamma - 1 \in \hat{K}^0(BU(1))$ представляется отображением $BU(1) \subset BU \rightarrow K$, вкладывающим $BU(1)$ в BU и рассматривающим BU как нулевой член спектра K . Таким образом,

$$\tau B(\gamma - 1)(y_i) = y_i^i \in H_{2i}(K).$$

Но $y_i^i = (1/i!) u^i$. Следовательно,

$$\text{ch}(\gamma) - 1 = \text{ch}(\gamma - 1) = \sum_{i \geq 0} y^i \otimes \tau B(\gamma - 1)(y_i) = \sum_{i \geq 0} \frac{1}{i!} y^i \otimes u^i.$$

Отождествляя $[H^*(BU(1); \mathbb{Z}) \otimes H_*(K; \mathbb{Z})]_2$ с $\prod_{i \geq 0} H^{2i}(BU(1); \mathbb{Q})$, мы получаем желаемый результат. $\square$

Для произвольного $U(n)$ -расслоения $\xi \rightarrow X$ характер Чженя $\text{ch}(\xi)$ вычисляется следующим образом. Если ξ — некоторое $U(1)$ -расслоение и $f: X \rightarrow BU(1)$ — его классифицирующее отображение, то

$$\text{ch}(\xi) = \text{ch}(f^* \gamma) = f^* \text{ch}(\gamma) = f^*(e^y) = e^{f^* y} = e^{c_1(\xi)}.$$

Если же ξ является $U(n)$ -расслоением, то найдется такое отображение $f: Y \rightarrow X$, что $f^* \xi$ расщепляется в сумму линейных расслоений $\lambda_1 \oplus \lambda_2 \oplus \dots \oplus \lambda_n$ и $f^*: H^*(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(Y; \mathbb{Z})$ — мономорфизм. Тогда

$$\begin{aligned} f^* \text{ch}(\xi) &= \text{ch}(f^* \xi) = \text{ch}(\lambda_1 \oplus \lambda_2 \oplus \dots \oplus \lambda_n) = \\ &= \text{ch}(\lambda_1) + \dots + \text{ch}(\lambda_n) = e^{c_1(\lambda_1)} + \dots + e^{c_1(\lambda_n)}. \end{aligned}$$

Займемся теперь теорией классов Чженя в других теориях когомологий. Для того чтобы выполнялись условия теоремы 16.2, достаточно следующего предположения.

16.27. Пусть E — кольцевой спектр. Существует элемент $y \in \tilde{E}^*(\mathbb{C}P^{\infty})$, переходящий при вложении $i: \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^{\infty}$ в образующую $i^* y \in \tilde{E}^*(S^0)$ -модуля $\tilde{E}^*(\mathbb{C}P^1) \cong \tilde{E}^*(S^2)$.

16.28. Примеры. i) Элемент $y \in \tilde{H}^2(\mathbb{C}P^{\infty}; \mathbb{Z})$ из теоремы 16.10 удовлетворяет этому условию.

ii) Если $\gamma \rightarrow \mathbb{C}P^{\infty}$ — линейное расслоение Хопфа, то элемент $Y = \gamma - 1 \in \hat{K}^0(\mathbb{C}P^{\infty})$ удовлетворяет условию 16.27.

iii) Имеет место гомотопическая эквивалентность $BU(1) \simeq MU_1$. В самом деле, сферическое расслоение, ассоциированное с $\gamma_1 \rightarrow BU(1)$, является универсальным $U(1)$ -расслоением ($U(1) = S^1$) и, следовательно, стягиваемо. Таким образом, $D(\gamma_1) \rightarrow D(\gamma_1)/S(\gamma_1) = MU_1$ — гомотопическая эквивалентность. Но $D(\gamma_1) \simeq BU(1)$. Значит, мы имеем отображение

$$f: \mathbb{C}P^\infty \simeq MU_1 \xrightarrow{M(i)} \Sigma^2 MU,$$

где $M(i)$ — отображение спектров, индуцированное вложением MU_1 в качестве второго члена спектра MU . Тогда элемент $y = [f] \in \tilde{M}U^2(\mathbb{C}P^\infty)$ обладает свойством, сформулированным в п. 16.27.

16.29. Предложение. Если E — кольцевой спектр и элемент $y^E \in \tilde{E}^q(\mathbb{C}P^\infty)$ удовлетворяет условию 16.27, то $E^*(\mathbb{C}P^n) \cong E^*(pt)[y^E]/((y^E)^{n+1})$ и $E^*(\mathbb{C}P^\infty) \cong E^*(pt)[[y^E]]$, где $E^*(pt)[[y^E]]$ — кольцо формальных рядов над $E^*(pt)$ от переменной y^E .

(Ограничение элемента y^E на $\mathbb{C}P^n$ также будет обозначаться через y^E .)

Доказательство. Покажем, что спектральная последовательность

$$\tilde{H}^*(\mathbb{C}P^n; \tilde{E}^*(S^0)) \Rightarrow \tilde{E}^*(\mathbb{C}P^n)$$

тривиальна для всех n . Для $n=1$ это очевидно, поскольку в данном случае в члене E_3^{**} имеется лишь один ненулевой столбец. Заметим, что

$$F^{2, q-2}(\tilde{E}^*(\mathbb{C}P^n)) = \ker[\tilde{E}^q(\mathbb{C}P^n) \rightarrow \tilde{E}^q((\mathbb{C}P^n)^1)] = \ker[\tilde{E}^q(\mathbb{C}P^n) \rightarrow \tilde{E}^q(pt)] = \tilde{E}^q(\mathbb{C}P^n),$$

так как одномерный остов $(\mathbb{C}P^n)^1$ состоит из одной точки. Следовательно, $y^E \in F^{2, q-2}$. Обозначим через $\bar{y}$ образ элемента y в $E_\infty^{2, q-2} \subset E_2^{2, q-2}$ (это вложение имеет место потому, что $E_2^{p, *} = 0$ для $p \leq 1$). Так как $\bar{y} \in E_\infty^{2, q-2}$, то $d_r \bar{y} = 0$, $r \geq 2$. Но d_r является дифференцированием, поэтому $d_r(\bar{y}^k) = 0$ для всех $k \geq 1$, $r \geq 2$. Далее, поскольку элемент

$$\bar{y} \in E_2^{2, q-2} = H^2(\mathbb{C}P^n; \tilde{E}^{q-2}(S^0))$$

обладает тем свойством, что его ограничение на $\tilde{H}^2(\mathbb{C}P^1; \tilde{E}^{q-2}(S^0))$ является образующей, то он обязан иметь вид $\bar{y} = u y$, где $u \in \tilde{E}^{q-2}(S^0)$ — некоторый обратимый элемент, а $y \in \tilde{H}^2(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z})$ — такой же, как в примере 16.28, i). Таким образом, $\bar{y}$, $(\bar{y})^2$, ..., $(\bar{y})^n$ образуют базис $\tilde{E}^*(S^0)$ -модуля E_3^{**} , и так как дифференциал d_r является $\tilde{E}^*(S^0)$ -линейным, то $d_r = 0$.

Поскольку все дифференциалы равны нулю, то $E_\infty^{**} \cong \tilde{H}^*(\mathbb{C}P^n; \tilde{E}^*(S^0))$ имеет $\tilde{E}^*(S^0)$ -базис $\{\bar{y}, (\bar{y})^2, \dots, (\bar{y})^n\}$ и, значит,

является свободным $\tilde{E}^*(S^0)$ -модулем. Следовательно, задача расширения

$$0 \rightarrow F^{p+1} \cdot * \rightarrow F^p \cdot * \rightarrow E_{\infty}^{p,*} \rightarrow 0$$

тривиальна, и мы получаем, что $\tilde{E}^*(\mathbb{C}P^n)$ является свободным $\tilde{E}^*(S^0)$ -модулем с базисом $\{y^E, (y^E)^2, \dots, (y^E)^n\}$. А это эквивалентно первому утверждению.

Далее, мы имеем $\lim^1 E^*(\mathbb{C}P^n) = 0$ и, стало быть,

$$E^*(\mathbb{C}P^{\infty}) \cong \lim^0 E^*(\mathbb{C}P^n) \cong E^*(pt) [[y^E]]. \quad \square$$

Таким образом, существования лишь одного элемента $y^E \in E^*(\mathbb{C}P^{\infty})$, удовлетворяющего условию 16.27, достаточно, чтобы гарантировать существование обобщенных классов Чженя.

16.30. Предложение. Пусть спектр E и элемент y^E такие же, как выше. Тогда существуют и единственны такие элементы $\beta_i \in \tilde{E}_*(\mathbb{C}P^n)$, $1 \leq i \leq n$, что $\langle (y^E)^k, \beta_i \rangle = \delta_i^k$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq k \leq n$. Кроме того, элементы $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ образуют базис $\tilde{E}_*(S^0)$ -модуля $\tilde{E}_*(\mathbb{C}P^n)$. Коумножение

$$\psi: E_*(\mathbb{C}P^n) \rightarrow E_*(\mathbb{C}P^n) \otimes_{E_*(pt)} E_*(\mathbb{C}P^n),$$

индуцированное диагональным отображением $\Delta: \mathbb{C}P^n \rightarrow \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}P^n$, задается формулой

$$\psi \beta_i = \sum_{i+k=i} \beta_j \otimes \beta_k.$$

Все эти утверждения остаются справедливыми и для $n = \infty$.

Доказательство. Подобно тому, как мы определяли внешние умножения в спектральных последовательностях, можно определить умножение Кронекера, задающее спаривание между спектральными последовательностями

$$\tilde{H}^*(X; \tilde{E}^*(S^0)) \Rightarrow \tilde{E}^*(X) \quad \text{и} \quad \tilde{H}_*(X; \tilde{E}_*(S^0)) \Rightarrow \tilde{E}_*(X).$$

В члене E_2 оно совпадает с обычным умножением Кронекера

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \tilde{H}^*(X; \tilde{E}^*(S^0)) \otimes \tilde{H}_*(X; \tilde{E}_*(S^0)) \rightarrow \tilde{E}_*(S^0).$$

Как было показано выше, $\tilde{E}^*(S^0)$ -модуль $\tilde{H}^*(\mathbb{C}P^n; \tilde{E}^*(S^0))$ имеет базис

$$\{\bar{y}, (\bar{y})^2, \dots, (\bar{y})^n\}.$$

Следовательно, $\tilde{H}_*(\mathbb{C}P^n; \tilde{E}_*(S^0))$ должен иметь дуальный базис $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$. Но тогда

$$\langle z, d^r \beta_i \rangle = \langle d^r z, \beta_i \rangle = 0$$

для всех $z \in E_r^{**}$. Таким образом, $d_r \beta_i = 0$, $r \geq 2$, $1 \leq i \leq n$, т. е. спектральная последовательность снова тривиальна и элементы

$\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ образуют базис $\tilde{E}_*(S^0)$ -модуля $\tilde{E}_*(\mathbb{C}P^n)$. Для $n = \infty$ мы получаем, что $\tilde{E}_*(\mathbb{C}P^\infty) \cong \text{dir lim } \tilde{E}_*(\mathbb{C}P^n)$ есть свободный $\tilde{E}_*(S^0)$ -модуль с базисом $\{\beta_1, \beta_2, \dots\}$. Коумножение ψ двойственно к $\cup$ -умножению в $E^*(\mathbb{C}P^\infty)$, так что

$$\langle (y^E)^j \otimes (y^E)^k, \psi \beta_i \rangle = \langle (y^E)^{j+k}, \beta_i \rangle = \begin{cases} 1, & j+k=i, \\ 0 & \text{в противном случае. } \square \end{cases}$$

Рассмотрим в $E_*(BU)$ образы элементов β_i . Мы по-прежнему будем обозначать их через β_i и, кроме того, будем считать, что $\beta_0 = 1$.

16.31. Теорема.

$$E_*(BU) \cong E_*(\text{pt})[\beta_1, \beta_2, \dots],$$

причем коумножение ψ задается формулой

$$\psi \beta_i = \sum_{j+k=i} \beta_j \otimes \beta_k.$$

Доказательство. При доказательстве предложения 16.29 мы получили, что элемент $\bar{y} \in \tilde{H}^2(\mathbb{C}P^\infty; \tilde{E}^{q-2}(S^0))$ имеет вид $\bar{y} = u\bar{u}$ для некоторого обратимого $u \in \tilde{E}^{q-2}(S^0)$. Таким образом, элементы $\beta_i \in \tilde{H}_{2i}(\mathbb{C}P^\infty; \tilde{E}_{i(q-2)}(S^0))$ имеют вид $\beta_i = u^{-i}y_i$. Но тогда из теоремы 16.17 и теоремы об универсальных коэффициентах следует, что мономы от переменных β_i образуют базис $E_*(\text{pt})$ -модуля $H_*(BU; E_*(\text{pt}))$. Поскольку в спектральной последовательности для $\mathbb{C}P^\infty$ $d_r \beta_i = 0$, то такие же равенства обязаны выполняться и в спектральной последовательности для BU . Но d_r являются дифференцированиями, и поэтому $d_r = 0$ на всех мономах от переменных β_i . А так как d_r — гомоморфизмы $E_*(\text{pt})$ -модулей, то $d_r = 0$. Таким образом, спектральная последовательность

$$H_*(BU; E_*(\text{pt})) \Rightarrow E_*(BU)$$

тривиальна, т. е.

$$E_*(BU) \cong E_*(\text{pt})[\beta_1, \beta_2, \dots]. \square$$

Пусть $i: \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^n$ — естественное вложение. Хотя элемент $i^*(y^E) \in \tilde{E}^*(\mathbb{C}P^1) = \tilde{E}^*(S^2)$ может и не быть канонической образующей $\iota_2 \in \tilde{E}^2(S^2)$, он обязан иметь вид $i^*y^E = u\iota_2$, где $u \in \tilde{E}^*(S^0)$ — некоторый обратимый элемент.

Пусть $X = \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty \times \dots \times \mathbb{C}P^\infty$ (n множителей) и $\xi_i = \gamma \times \gamma \times \dots \times \gamma$. Точно так же, как в предложении 16.16, мы получаем, что

$$z(\xi_n) = \sum_{\alpha} \langle z, \beta_{\alpha} \rangle u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \dots u_n^{\alpha_n}$$

для всех $z \in E^*(BU)$, где $\beta_\alpha = \beta_{\alpha_1} \beta_{\alpha_2} \dots \beta_{\alpha_n}$ и $u_i = \pi_i^* y^E$. Из утверждений 16.2, c) и 16.2, d) следует, что

$$c_n(\xi_n) = c_1(\gamma) \times c_1(\gamma) \times \dots \times c_1(\gamma) = u^{-n} u_1 u_2 \dots u_n.$$

Таким образом,

$$\langle c_n, \beta_\alpha \rangle = \begin{cases} u^{-n}, & \alpha = (1, 1, \dots, 1), \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Другими словами, элементы c_n двойственны к $u^n \beta_1^n$, $n \geq 1$.

16.32. Теорема.

i) $E^*(BU(k)) \cong E^*(pt)[[c_1, \dots, c_k]]$;

ii) $E^*(BU) \cong E^*(pt)[[c_1, c_2, \dots]]$.

Доказательство. Пусть $E_r^{pq}(0)$, $E_r^{pq}(1)$ и $E_r^{pq}(2)$ — спектральные последовательности

$$H_*(BU; E_*(pt)) \Rightarrow E_*(BU),$$

$$H^*(BU; E^*(pt)) \Rightarrow E^*(BU)$$

и

$$E_r^{pq}(2) = \text{Hom}_{E_*(pt)}^{-q}(E_r^{pq}(0), E_*(pt)).$$

Умножение Кронекера определяет отображение спектральных последовательностей

$$\kappa: E_r^{pq}(1) \rightarrow E_r^{pq}(2).$$

По теореме об универсальных коэффициентах это отображение является изоморфизмом на члене E_2 . Следовательно, κ — изоморфизм на E_r для всех r , а отсюда, в свою очередь, вытекает, что κ — изоморфизм на члене E_∞ . Таким образом, мы имеем коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & E_\infty^{pq}(1) & \xrightarrow{\quad} & G^{pq}(1) & \longrightarrow & \\ & & \downarrow \kappa & & \downarrow \kappa & & \\ 0 & \rightarrow & \text{Hom}_{E_*(pt)}^{-q}(E_\infty^{pq}(0), E_*(pt)) & \rightarrow & \text{Hom}_{E_*(pt)}^{-q}(F_{p,*}(0), E_*(pt)) & \rightarrow & \\ & & & & G^{p-1, q+1}(1) & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow \kappa & & \\ & & & & \text{Hom}_{E_*(pt)}^{-(q+1)}(F_{p-1,*}(0), E_*(pt)) & \rightarrow & 0, \end{array}$$

где

$$G^{pq} = \text{coim}[E^{p+q}(X) \rightarrow E^{p+q}(X^p)] = E^{p+q}(X) / \ker[E^{p+q}(X) \rightarrow E^{p+q}(X^p)] = E^{p+q}(X) / F^{p+1, q-1}.$$

По индукции получаем, что

$$k: G^{pq}(1) \rightarrow \text{Hom}_{E_*(pt)}^{-q}(F_{p*}(0), E_*(pt))$$

— изоморфизм для всех p, q . Но $E^n(BU) = \lim_p G^{p, n-p}(1)$ и $\text{Hom}_{E_*(pt)}^n(E_*(BU), E_*(pt)) \cong \lim_p^0 \text{Hom}_{E_*(pt)}^{n-1}(F_{p*}(0), E_*(pt))$.

Таким образом, мы доказали, что

$$E^*(BU) \cong \text{Hom}_{E_*(pt)}^*(E_*(BU), E_*(pt)).$$

(Отметим, что это доказательство проходит для любого пространства X , обладающего следующими свойствами: гомологии $H_*(X; E_*(pt))$ являются свободными $E_*(pt)$ -модулем и спектральная последовательность $H_*(X; E_*(pt)) \Rightarrow E_*(X)$ тривиальна.)

Пусть $\Delta^n: BU \rightarrow BU \times \dots \times BU$ — отображение, задаваемое формулой $\Delta^n(x) = (\underbrace{x, \dots, x}_n)$, и m — некоторый моном от переменных β_i . Предположим, что

$$(\Delta^n)_*(m) = \sum_{\alpha} m_{\alpha_1} \otimes m_{\alpha_2} \otimes \dots \otimes m_{\alpha_n}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \langle c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_n}, m \rangle &= \langle \Delta^{n*}(c_{i_1} \otimes c_{i_2} \otimes \dots \otimes c_{i_n}), m \rangle = \\ &= \left\langle c_{i_1} \otimes \dots \otimes c_{i_n}, \sum_{\alpha} m_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes m_{\alpha_n} \right\rangle = \\ &= \sum_{\alpha} \langle c_{i_1}, m_{\alpha_1} \rangle \langle c_{i_2}, m_{\alpha_2} \rangle \dots \langle c_{i_n}, m_{\alpha_n} \rangle. \end{aligned}$$

Это выражение не зависит от спектра E и, в частности, оно точно такое же для спектра $E = H(\mathbb{Z})$. Следовательно, член E_2 спектральной последовательности имеет $E^*(pt)$ -базис, состоящий из мономов от переменных c_i , откуда и вытекает требуемый результат. Спектральная последовательность $H^*(BU(k); E^*(pt)) \Rightarrow E^*(BU(k))$ также тривиальна. $\square$

16.33. В частности, мы имеем

$$K_*(BU) \cong K_*(pt)[Y_1, Y_2, \dots],$$

$$K^*(BU) \cong K^*(pt)[[C_1, C_2, \dots]],$$

$$MU_*(BU) \cong MU_*(pt)[\beta_1, \beta_2, \dots],$$

$$MU^*(BU) \cong MU^*(pt)[[cf_1, cf_2, \dots]].$$

Классы Чжэня cf_i были впервые описаны Коннером и Флордом [42]; этим объясняется наше обозначение.

16.34. Соответствующие результаты имеют место также и для пространств BO и BSp . В частности, $(\gamma_1 - 1) \otimes_{\mathbb{H}} (\gamma - 1) \in \tilde{K}O^0(S^4 \wedge \mathbb{H}P^\infty) = \tilde{K}O^{-4}(\mathbb{H}P^\infty)$, где $\gamma_1 \rightarrow S^4 = \mathbb{H}P^1$ и $\gamma \rightarrow \mathbb{H}P^\infty$ —

симплектические расслоения Хопфа, и элементы

$$z = [\mathbb{H}P^\infty \simeq MSp_1 \rightarrow \Sigma^4 MSp] \in \widetilde{MSp}^4(\mathbb{H}P^\infty)$$

удовлетворяют аналогу условия 16.27. Следовательно,

$$KO_*(BSp) \cong KO_*(pt)[Z_1, Z_2, \dots],$$

$$KO^*(BSp) \cong KO^*(pt)[[P_1, P_2, \dots]],$$

$$MSp_*(BSp) \cong MSp_*(pt)[\sigma_1, \sigma_2, \dots],$$

$$MSp^*(BSp) \cong MSp^*(pt)[[pf_1, pf_2, \dots]].$$

16.35. Возможности элемента y^E этим еще не исчерпываются; например, с его помощью вычисляется кольцо $E_*(MU)$. Но прежде мы вычислим кольцо $H_*(MU; \mathbb{Z})$.

Так как $\pi_1(BU(n), *) = 0$, $n \geq 1$, то универсальное расслоение γ_n над $BU(n)$ ориентируемо относительно любой теории когомологий. В частности, для каждого $n \geq 1$ существует и единствен класс Тома $t_n \in \tilde{H}^{2n}(MU_n; \mathbb{Z})$ с $\iota_n^*(t_n) = \iota_{2n} \in \tilde{H}^{2n}(S^{2n}; \mathbb{Z})$ и $t_1 = y \in \tilde{H}^2(MU_1; \mathbb{Z})$. Для любого $U(n)$ -расслоения ξ с классифицирующим отображением $f: X \rightarrow BU(n)$ мы получаем класс Тома $t(\xi) = M(f)^*(t_n) \in \tilde{H}^{2n}(M(\xi); \mathbb{Z})$. Этот класс удовлетворяет условию естественности: $t(g^*\xi) = M(g)^*(t(\xi))$ для любого отображения $g: Y \rightarrow X$, а также равенству $t(\xi \times \eta) = t(\xi) \wedge t(\eta)$ (почему?).

Для всех $n \geq 1$ определены изоморфизмы Тома

$$\Phi_*: \tilde{H}_{q+2n}(MU_n; \mathbb{Z}) \rightarrow H_q(BU(n); \mathbb{Z}),$$

связанные друг с другом посредством коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{H}_{q+2n}(MU_n; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\sigma^2} & \tilde{H}_{q+2n+2}(S^2 MU_n; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{M(i_n)_*} & \tilde{H}_{q+2n+2}(MU_{n+1}; \mathbb{Z}) \\ \cong \downarrow \Phi_* & \swarrow \Phi_* & & & \cong \downarrow \Phi_* \\ H_q(BU(n); \mathbb{Z}) & \xrightarrow{i_{n*}} & & & H_q(BU(n+1); \mathbb{Z}). \end{array}$$

В самом деле, если $a \in \tilde{H}_*(MU_n; \mathbb{Z})$, то

$$\begin{aligned} \Phi_* \circ M(i_n)_* \circ \sigma^2(a) &= p_{n+1*}(t_{n+1} \cap M(i_n)_* \sigma^2(a)) = \\ &= p_{n+1*} \circ D(i_n)_*[M(i_n)^*(t_{n+1}) \cap \sigma^2(a)] = \\ &= i_{n*} \circ p_{n*}[t(\varepsilon^1 \oplus \gamma_n) \cap \sigma^2(a)] = \\ &= i_{n*} \circ p_{n*}[\sigma^{-2}(t_n) \cap \sigma^2(a)] = \\ &= i_{n*} \circ p_{n*}(t_n \cap a) = i_{n*} \circ \Phi_*(a). \end{aligned}$$

Таким образом, переходя к прямому пределу, мы получаем «стабильный изоморфизм Тома»

$$\Phi_*: H_q(MU; \mathbb{Z}) \rightarrow H_q(BU; \mathbb{Z}), \quad q \in \mathbb{Z}.$$

16.36. Лемма. $H_*(MU; \mathbb{Z})$ и $H_*(BU; \mathbb{Z})$ являются кольцами Понтрягина, и Φ_* — кольцевой гомоморфизм.

Доказательство. Нам нужно доказать коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{H}_{q+2n}(MU_n) \otimes \tilde{H}_{p+2m}(MU_m) & \xrightarrow{\wedge} & \\
 \downarrow \Phi_* \otimes \Phi_* & & \\
 H_q(BU(n)) \otimes H_p(BU(m)) & \xrightarrow{\times} & \\
 & & \\
 \tilde{H}_{q+p+2n+2m}(MU_n \wedge MU_m) & \xrightarrow{M(\mu_{n,m})_*} & \tilde{H}_{q+p+2n+2m}(MU_{n+m}) \\
 \downarrow \Phi_* & & \downarrow \Phi_* \\
 H_{q+p}(BU(n) \times BU(m)) & \xrightarrow{\mu_{n,m}*} & H_{q+p}(BU(n+m)).
 \end{array}$$

Но если $a \in \tilde{H}_*(MU_n)$ и $b \in \tilde{H}_*(MU_m)$, то

$$\begin{aligned}
 \Phi_* \circ M(\mu_{nm})_*(a \wedge b) &= p_{n+m*}(t_{n+m} \cap M(\mu_{nm})_*(a \wedge b)) = \\
 &= p_{n+m*} \circ D(\mu_{nm})_*[M(\mu_{nm})_*(t_{n+m} \cap (a \wedge b))] = \\
 &= \mu_{nm*} \circ (p_n \times p_m)_*[t(\gamma_n \times \gamma_m) \cap (a \wedge b)] = \\
 &= \mu_{nm*} \circ (p_n \times p_m)_*[(t_n \wedge t_m) \cap (a \wedge b)] = \\
 &= \mu_{nm*} \circ (p_n \times p_m)_*[(t_n \cap a) \times (t_m \cap b)] = \\
 &= \mu_{nm*}[p_{n*}(t_n \cap a) \times p_{m*}(t_m \cap b)] = \mu_{nm*}(\Phi_*(a) \times \Phi_*(b)). \quad \square
 \end{aligned}$$

16.37. Теорема. $H_*(MU; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[b_1, b_2, \dots]$, где $\Phi_*(b_i) = y_i$.

Пусть теперь $f: \mathbb{C}P^\infty \simeq MU(1) \xrightarrow{M(i)} \Sigma^2 MU$ — отображение из примера 16.28, iii).

16.38. Предложение. $f_*(y_i) = b_{i-1}$, $i \geq 1$.

Доказательство. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
 H_{2i-2}(BU(1); \mathbb{Z}) & \xrightarrow{i_*} & H_{2i-2}(BU; \mathbb{Z}) \\
 \uparrow \Phi_* & & \uparrow \Phi_* \\
 \tilde{H}_{2i}(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{H}_{2i}(MU_1; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{M(i)_*} & \tilde{H}_{2i-2}(MU; \mathbb{Z}).
 \end{array}$$

Вспоминая, что

$$BU(1) \xrightarrow{p} D(\gamma_1) \xrightarrow{\cong} MU_1,$$

находим

$$\Phi_*(y_i) = p_*(y \cap y_i) = y \cap y_i.$$

Но $\langle y^k, y \cap y_i \rangle = \langle y^{k+1}, y_i \rangle = \delta_i^{k+1}$, так что $y \cap y_i = y_{i-1}$, $i \geq 1$. Отсюда следует требуемый результат. $\square$

Аналогичные результаты справедливы и для спектров MO , MSp .

Вернемся теперь к элементу $y^E \in \tilde{E}^*(\mathbb{C}P^\infty)$. Напомним, что в $\tilde{E}^*(S^0)$ существует элемент $u = u^E$, для которого $i^*y^E = u^E \iota_2 \in \tilde{E}^*(\mathbb{C}P^1) = \tilde{E}^*(S^2)$. Руководствуясь предложением 16.38, определим элементы $b_i^E \in E_{2i}(MU)$, полагая

$$b_i^E = f_*(u^E \beta_{i+1}), \quad i \geq 0.$$

Множитель u^E введен в определение для нормировки $b_0^E = 1 \in E_0(MU)$.

16.39. Теорема. $E_*(MU) \cong \tilde{E}_*(S^0)[b_1^E, b_2^E, \dots]$.

Доказательство. Совершенно так же, как в теореме 16.31, находим, что мономы от переменных b_i^E задают $\tilde{E}_*(S^0)$ -базис члена E^2 спектральной последовательности $H_*(MU; \tilde{E}_*(S^0)) \Rightarrow E_*(MU)$. Как и прежде,

$$d_r b_i^E = d_r f_*(u^E \beta_{i+1}) = f_*(d_r u^E \beta_{i+1}) = 0,$$

откуда вытекает, что $d_r = 0$ для $r \geq 2$. Таким образом, спектральная последовательность $H_*(MU; \tilde{E}_*(S^0)) \Rightarrow E_*(MU)$ тривиальна, что и доказывает нашу теорему. $\square$

16.40. Можно проверить, что все $U(n)$ -расслоения ориентируемы относительно E . Прежде всего рассуждения, аналогичные использованным при доказательстве теоремы 16.32, показывают, что

$$E^*(MU) \cong \text{Hom}_{\tilde{E}_*(S^0)}^*(E_*(MU), \tilde{E}_*(S^0)).$$

В частности, существует и единствен такой элемент $t \in E^0(MU)$, что $t(1) = 1$ и $t(m) = 0$ для всех других мономов m от переменных b_i^E . Для каждого n обозначим через

$$M(i_n): MU_n \rightarrow \Sigma^{2n} MU$$

«вложение» MU_n в $\Sigma^{2n} MU$ и возьмем

$$t_n = M(i_n)^* \sigma^{-2n}(t) \in \tilde{E}^{2n}(MU_n).$$

Для любого $U(n)$ -расслоения $\xi \rightarrow X$ с классифицирующим отображением $f: X \rightarrow BU(n)$ определим класс $t(\xi)$, полагая

$$t(\xi) = M(f)^*(t_n) \in \tilde{E}^{2n}(M(\xi))$$

(ср. с п. 16.35). Мы хотим доказать, что $t(\xi)$ — класс Тома расслоения ξ . Поскольку для любого $b \in X$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & S^{2n} & \\ j_b \swarrow & & \searrow j_{f(b)} \\ M(\xi) & \xrightarrow{M(f)} & MU_n, \end{array}$$

то для этого достаточно установить, что t_n является классом Тома расслоения γ_n , или, эквивалентно, что $\iota_n^*(t_n) \in \tilde{E}^{2n}(S^{2n})$ является образующей модуля $\tilde{E}^*(S^{2n})$. Рассмотрим еще одну коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
 & S^{2n-2} & MU_1 & & \\
 S^{2n-2} \iota_1 \nearrow & & \downarrow \varepsilon' & \searrow \Sigma^{2n-2} M(i_1) & \\
 S^{2n} & & & & \Sigma^{2n} MU \\
 \downarrow \iota_n & & \nearrow M(i_n) & & \\
 & MU_n & & &
 \end{array}$$

в которой $\varepsilon' = e_{n-1} \cdot S^2 e_{n-2} \cdot \dots \cdot S^{2n-4} e_1$. Из коммутативности этой диаграммы следует, что

$$\iota_n^*(t_n) = \iota_n^* M(i_n)^* \sigma^{-2n}(t) = \sigma^{-2n+2} \iota_1^* M(i_1)^* (\sigma^{-2}t).$$

Если обозначить через $g_{2n} \in \tilde{E}^{2n}(S^{2n})$ каноническую образующую, представляемую отображением $\iota^E \wedge 1: S^0 \wedge S^{2n} \rightarrow \tilde{E} \wedge S^{2n}$, то

$$\begin{aligned}
 \langle \iota_n^* t_n, g_{2n} \rangle &= \langle \sigma^{-2n+2} \iota_1^* M(i_1)^* (\sigma^{-2}t), g_{2n} \rangle = \\
 &= \langle t, \sigma^{-2} M(i_1)_* \iota_{1*} g_2 \rangle = \langle t, \sigma^{-2} M(i_1)_* u^E \beta_1 \rangle = \langle t, b_0^E \rangle = 1.
 \end{aligned}$$

Таким образом, $\iota_n^* t_n$ является образующей модуля $\tilde{E}^*(S^{2n})$. Следовательно, мы имеем изоморфизмы Тома

$$\Phi_*: \tilde{E}_{q+2n}(M(\xi)) \rightarrow E_q(X),$$

$$\Phi^*: E^q(X) \rightarrow \tilde{E}^{q+2n}(M(\xi)).$$

Проводя теперь рассуждения из предложения 16.38 в обратном порядке, нетрудно убедиться, что

$$\Phi_*(b_i^E) = u^E \beta_i \in E_{2i}(BU), \quad i \geq 1.$$

Предостережение. Было бы заманчивым предположить, что $E^*(MU) \cong \tilde{E}^*(S^0)[[c'_1, c'_2, \dots]]$ для $c'_i = \Phi^*(c_i)$. Но это неверно: $E^*(MU)$ вообще не имеет никакой естественной кольцевой структуры. Разумеется, для $E = MU$ мы получаем умножение в $MU^*(MU)$, задаваемое композицией отображений (см. главу 17), однако и в этом случае Φ^* не является гомоморфизмом колец: композиция даже не коммутативна!

16.41. Аналогичные результаты имеют место и для спектров BO и BSp . Мы приведем здесь два частных примера:

$$KO_*(MSp) \cong \hat{KO}_*(S^0)[Z'_1, Z'_2, \dots],$$

$$MSp_*(MSp) \cong MSp_*(S^0)[\sigma'_1, \sigma'_2, \dots].$$

16.42. Одним из наиболее значительных приложений характеристических классов является теория характеристических чисел многообразий. Предположим, что нам задан некоторый класс многообразий M^n , ориентированных относительно кольцевого спектра (т. е. имеющих фундаментальный класс). Рассмотрим, например, U -многообразия и спектр E , удовлетворяющий условию 16.27. (Этого частного случая достаточно, чтобы продемонстрировать общий метод.) Каждое U -многообразие M^n может быть вложено в сферу S^{n+2k} для достаточно большого k , и нормальное расслоение ν^k этого вложения наделяется $U(k)$ -структурой. Пусть $f: M' \rightarrow BU(k)$ — классифицирующее отображение для расслоения ν^k . Тогда можно рассмотреть характеристические классы $z(\nu^k) = f^*(z) \in E^*(M^n)$, $z \in E^*(BU(k))$, а также элементы $z[M^n] = \langle z(\nu^k), \sigma_{M^n} \rangle \in E_*(pt)$, где σ_{M^n} — фундаментальный класс. Элементы $z[M^n]$ называются *характеристическими числами* многообразия M^n . В дальнейшем мы увидим, что они зависят только от класса бордантности $[M^n]$ многообразия M^n . Название «характеристические числа» объясняется тем, что первоначально элементы $z[M^n]$ определялись для спектра $E = H(\mathbb{Z})$ и, следовательно, лежали в группе $H_*(pt; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

В частности, мы имеем обобщенные классы Чженя $c_i \in E^*(BU(k))$, $1 \leq i \leq k$. Поэтому для каждого монома $c^\alpha = c_1^{\alpha_1} c_2^{\alpha_2} \dots c_k^{\alpha_k}$ определено число Чженя $c^\alpha[M^n]$. Часто используются и некоторые другие полиномы $s_\alpha(c_1, c_2, \dots, c_k)$ от классов Чженя $c_1, c_2, \dots, c_k$.

Характеристические числа можно рассматривать и с иной точки зрения. Вспомним, что группа Ω_n^U унитарных бордизмов изоморфна $\pi_n(MU)$, и мы имеем гомоморфизм Гуревича

$$h: \pi_n(MU) \rightarrow E_n(MU).$$

По теореме 16.39

$$E_*(MU) \cong \tilde{E}_*(S^0)[b_1, b_2, \dots],$$

так что для любого класса бордизмов

$$M^n \in \Omega_n^U = \pi_n(MU)$$

его образ при гомоморфизме Гуревича равен

$$h[M^n] = \sum_{\alpha} n_{\alpha} b^{\alpha},$$

где $n_{\alpha} \in \tilde{E}_*(S^0) = E_*(pt)$. Здесь через b^{α} обозначен моном $b_1^{\alpha_1} b_2^{\alpha_2} \dots b_r^{\alpha_r}$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$. Что можно сказать о коэффициентах n_{α} ? В следующем предложении мы установим, что $n_{\alpha} = s_{\alpha}[M^n]$, где элементы $s_{\alpha} \in E^*(BU)$ образуют базис, дуальный к $\{u^{\alpha} \mid \beta^{\alpha}\} \subset E_*(BU)^1$, $\|\alpha\| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r$.

1) Здесь через u обозначен элемент $u^E \in \tilde{E}^0(S^0)$. — *Прим ред.*

16.43. Предложение. Пусть M^n — некоторое U -многообразие и $z \in E^*(BU)$. Тогда мы имеем $z[M^n] = \langle z, \Phi_* h[M^n] \rangle$ и, следовательно,

$$h[M^n] = \sum_{\alpha} s_{\alpha}[M^n] b^{\alpha} \in E_n(M^n).$$

Доказательство. Напомним конструкцию Понтрягина — Тома 12.30, задающую изоморфизм $\Omega_*^U \cong \pi_*(MU)$. Пусть M^n вложено в сферу S^{n+2k} с трубчатой окрестностью N , которую мы отождествляем с $D(v)$. Обозначим через $f: M^n \rightarrow BU(k)$ классифицирующее отображение нормального расслоения v . Тогда имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{E}_{n+2k}(S^{n+2k}) & \xrightarrow{p_*} & \tilde{E}_{n+2k}(M(v)) & \xrightarrow{M(f)_*} & \tilde{E}_{n+2k}(MU_k) \\ & & \cong \downarrow \Phi_* & & \cong \downarrow \Phi_* \\ & & E_n(M^n) & \xrightarrow{f_*} & E_n(BU(k)), \end{array}$$

где $p: S^{n+2k} \rightarrow M(v)$ — отображение, совпадающее на $N = D(v)$ с проекцией $D(v) \rightarrow M(v)$ и переводящее $S^{n+2k} - N$ в отмеченную точку $*$ пространства Тома $M(v)$. Согласно лемме 14.40

$$\Phi_* p_* (\iota_{n+2k}) = \sigma_{M^n},$$

где ι_{n+2k} — образующая модуля $\tilde{E}_{n+2k}(S^{n+2k})$. Так как $[M^n]$ представляется в $\pi_n(MU)$ гомотопическим классом $\{[M(f) \circ p]\}$, то $h[M^n] = M(f)_* \circ p_* (\iota_{n+2k})$. Следовательно, для любого $z \in E^*(BU)$ мы имеем

$$\begin{aligned} z[M^n] &= \langle f^*(z), \sigma_{M^n} \rangle = \langle f^*(z), \Phi_* p_* (\iota_{n+2k}) \rangle = \\ &= \langle z, f_* \circ \Phi_* \circ p_* (\iota_{n+2k}) \rangle = \langle z, \Phi_* \circ M(f)_* \circ p_* (\iota_{n+2k}) \rangle = \langle z, \Phi_* \circ h[M^n] \rangle. \end{aligned}$$

Таким образом, если $h[M^n] = \sum_{\alpha} n_{\alpha} b^{\alpha}$, то

$$z[M^n] = \left\langle z, \Phi_* \left(\sum_{\alpha} n_{\alpha} b^{\alpha} \right) \right\rangle = \left\langle z, \sum_{\alpha} n_{\alpha} u^{\|\alpha\|} \beta^{\alpha} \right\rangle = \sum_{\alpha} n_{\alpha} \langle z, u^{\|\alpha\|} \beta^{\alpha} \rangle.$$

Взяв $z = s_v$, мы получаем окончательно

$$s_v[M^n] = \sum_{\alpha} n_{\alpha} \langle s_v, u^{\|\alpha\|} \beta^{\alpha} \rangle = n_v. \quad \square$$

16.44. Следствие. Характеристические числа U -многообразия M^n инвариантны относительно бордантности.

Это утверждение можно доказать и непосредственно, используя лишь определения характеристического числа и бордизма.

Замечание. Характеристические классы $z(v)$, конечно же, не инвариантны относительно бордантности: таковыми они стано-

вятся только после кронекеровского умножения на σ_M . Из доказательства предложения 16.43 очевидно, что при этом мы имеем в виду вполне определенный класс σ_M , а именно, $\Phi_*(p_*(l_{n+2h}))$. Можно показать, что Φ_* зависит от выбора класса Тома t , однако становится фиксированным, коль скоро фиксируем универсальный класс Тома $t \in E^0(MU)$. В противоположность этому характеристические числа $z[M^n]$ определены лишь с точностью до обратимого элемента из $\tilde{E}^0(S^0)$.

З а м е ч а н и е. Нетрудно показать, что полиномы s_α описываются следующим образом: представим симметрический полином

$$\sum x_1 x_2 \dots x_{\alpha_1} x_{\alpha_1+1}^2 \dots x_{\alpha_2}^2 \dots x_{\alpha_r}^r,$$

в виде $s_\alpha(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$. Тогда $s_\alpha = s_\alpha(c_1, c_2, \dots, c_n)$ (см. [48]).

Предложение 16.43 доставляет нам способ вычисления характеристических чисел $h[M^n]$ для конкретных многообразий M^n .

16.45. Предложение. Для всех $n \geq 0$

$$h[\mathbb{C}P^n] = (b^{-n-1})_{2n} \in H_{2n}(MU; \mathbb{Z})^1,$$

где $b = 1 + b_1 + b_2 + \dots$

Доказательство. Касательное расслоение τ к комплексному проективному пространству $\mathbb{C}P^n$ удовлетворяет соотношению $\tau \oplus \varepsilon^1 \simeq (n+1)\gamma$, где γ — линейное расслоение Хопфа над $\mathbb{C}P^n$ (см. лемму 16.7). Кроме того, стабильное нормальное расслоение ν является противоположным к τ , так что если $\chi: BU \rightarrow BU$ — операция перехода к стабильно противоположному расслоению ($\xi \mapsto -\xi$), то мы имеем

$$s_\nu(\nu) = (\chi^* s_\nu)(\tau) = (\chi^* s_\nu)((n+1)\gamma) = \sum_{\alpha} \langle \chi^* s_\nu, y_\alpha \rangle y^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n+1}} = \sum_{\alpha} \langle s_\nu, \chi_* y_\alpha \rangle y^{\alpha_1 + \dots + \alpha_{n+1}}.$$

Для того чтобы найти $s_\nu[\mathbb{C}P^n]$, нужно взять $\langle s_\nu(\nu), \sigma_{\mathbb{C}P^n} \rangle$, но $\sigma_{\mathbb{C}P^n} = y_n \in H_{2n}(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z})$. Таким образом, мы получаем

$$\begin{aligned} s_\nu[\mathbb{C}P^n] &= \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_{n+1} = n} \langle s_\nu, \chi_* (y_\alpha) \rangle = \\ &= \left\langle s_\nu, \chi_* \left(\sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_{n+1} = n} y_\alpha \right) \right\rangle = \\ &= \langle s_\nu, \chi_* ((1 + y_1 + y_2 + \dots)^{n+1})_{2n} \rangle = \langle s_\nu, (\chi_* (1 + y_1 + y_2 + \dots))_{2n}^{n+1} \rangle. \end{aligned}$$

Мы оставляем читателю в качестве упражнения проверку того, что $\chi_* (1 + y_1 + y_2 + \dots) = (1 + y_1 + y_2 + \dots)^{-1}$. Поэтому

$$s_\nu[\mathbb{C}P^n] = \langle s_\nu, (1 + y_1 + y_2 + \dots)^{-n-1}_{2n} \rangle = \langle \Phi^* s_\nu, (b^{-n-1})_{2n} \rangle$$

¹⁾ Здесь $b^{-1} = (1 + (b_1 + b_2 + \dots))^{-1} = 1 - (b_1 + b_2 + \dots) + (b_1 + b_2 + \dots)^2 - (b_1 + b_2 + \dots)^3 + \dots$ — Прим. ред.

и, следовательно,

$$h[\mathbb{C}P^n] = \sum_{\alpha} \langle \Phi^* s_{\alpha}, (b^{-n-1})_{2n} \rangle b^{\alpha} = (b^{-n-1})_{2n},$$

поскольку $\{\Phi^* s_{\alpha}\}$ является базисом, двойственным к $\{b^{\alpha}\}$. $\square$

16.46. П р и м е р ы.

$$b^{-2} = 1 - 2b_1 + \dots, \text{ следовательно, } h[\mathbb{C}P^1] = -2b_1;$$

$$b^{-3} = 1 - 3b_1 + 6b_1^2 - 3b_2 + \dots, \text{ так что } h[\mathbb{C}P^2] = 6b_1^2 - 3b_2.$$

Вообще,

$$(b^{-n-1})_{2n} = -(n+1)b_n + \{\text{разложимые члены}\}.$$

Аналогичные результаты имеют место и для других классических групп G . Например, мы получаем

$$h[\mathbb{R}P^n] = (a^{-n-1})_n \in H_n(MO; \mathbb{Z}_2),$$

где $a = 1 + a_1 + a_2 + \dots$ ($H_*(MO; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[a_1, a_2, \dots]$).

16.47. Зная структуру кольца $H_*(BU; \mathbb{Z})$, можно доказать с помощью теоремы 15.60 Бореля теорему 11.60 Ботта о периодичности для унитарной группы. Так как $\Omega U \simeq \mathbb{Z} \times \Omega SU$, то достаточно показать, что $BU \simeq \Omega SU$. Мы начнем с некоторых геометрических конструкций.

В главе 11 мы определили пространство BU как $BU = \bigcup_{k \geq 0} BU(k)$, где

$$BU(k) = \bigcup_{n \geq k} G_{k,n} = \bigcup_{n \geq k} \frac{U(n)}{U(n-k) \times U(k)}.$$

На самом деле, легко видеть, что пространство

$$\bigcup_{n \geq 1} \frac{U(2n)}{U(n) \times U(n)}$$

имеет тот же самый гомотопический тип, что и $\bigcup_{k \geq 1} BU(k)$. Таким образом, для наших целей можно взять

$$BU = \bigcup_{n \geq 1} \frac{U(2n)}{U(n) \times U(n)}.$$

Мы считаем, что подгруппа $U(2n) \subset U(2n+2)$ образована всеми матрицами вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A \in U(2n).$$

Комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^n$ рассматривается как факторпространство

$$\frac{U(n+1)}{U(n) \times U(1)}.$$

Таким образом, если $U(n+1) \subset U(2n)$ — подгруппа матриц

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}, \quad A \in U(n+1),$$

то вложение индуцирует отображение

$$\frac{U(n+1)}{U(n) \times U(1)} \xrightarrow{f_n} \frac{U(2n)}{U(n) \times U(n)},$$

которое является классифицирующим для расслоения Хопфа γ_n над $\mathbb{C}P^n$.

Определим теперь отображения

$$g_{n,m}: S^1 \wedge \frac{U(n+m)}{U(n) \times U(m)} \rightarrow SU(n+m),$$

полагая

$$g_{n,m}[t, A] = \begin{pmatrix} e^{\pi i t} I_n & 0 \\ 0 & e^{-\pi i t} I_m \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} e^{-\pi i t} I_n & 0 \\ 0 & e^{\pi i t} I_m \end{pmatrix} A^{-1}.$$

Без труда проверяется коммутативность диаграмм

$$\begin{array}{ccc} S^1 \wedge \mathbb{C}P^n & \xrightarrow{g_{n,1}} & SU(n+1) \\ \downarrow S f_n & & \cap \\ S^1 \wedge \frac{U(2n)}{U(n) \times U(n)} & \xrightarrow{g_{n,n}} & SU(2n) \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{ccc} S^1 \wedge \frac{U(2n)}{U(n) \times U(n)} & \xrightarrow{g_{n,n}} & SU(2n) \\ \cap & & \cap \\ S^1 \wedge \frac{U(2n+2)}{U(n+1) \times U(n+1)} & \xrightarrow{g_{n+1,n+1}} & SU(2n+2). \end{array}$$

Следовательно, мы получаем такие отображения $h: S^1 \wedge \mathbb{C}P^\infty \rightarrow SU$, $g: S^1 \wedge BU \rightarrow SU$, для которых коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} S^1 \wedge \mathbb{C}P^\infty & & \\ \downarrow S f & \searrow h & \\ S^1 \wedge BU & \xrightarrow{g} & SU \end{array}$$

Классифицирующее пространство BU является H -пространством относительно умножения, ассоциированного с суммой Уитни комплексных векторных расслоений. Это умножение можно описать следующим образом. Группа U действует на пространстве

$$\mathbb{C}^\infty = \{(x_1, x_2, \dots): x_i \in \mathbb{C}, i \geq 1, x_i \neq 0, \text{ лишь для конечного числа индексов } i\}.$$

Группа $U(2n)$ действует в подпространстве пространства $\mathbb{C}^\infty$, натянутом на $2n$ первых базисных векторов. Пусть

$$\Delta: \mathbb{C}^\infty \oplus \mathbb{C}^\infty \rightarrow \mathbb{C}^\infty$$

— отображение, задаваемое формулами

$$\Delta(e_i, 0) = e_{2i-1}, \quad \Delta(0, e_i) = e_{2i}, \quad i \geq 1.$$

Тогда можно определить отображение

$$\mu_{2n}: U(2n) \times U(2n) \rightarrow U(4n),$$

полагая $\mu_{2n}(A, B) = \bar{\Delta} \cdot (A \oplus B) \cdot \bar{\Delta}^{-1}$. Например,

$$\mu_2 \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & x & 0 & y \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & u & 0 & v \end{pmatrix}.$$

Отображение μ_{2n} индуцирует отображение факторпространств (по-прежнему обозначаемое через μ_{2n})

$$\mu_{2n}: \frac{U(2n)}{U(n) \times U(n)} \times \frac{U(2n)}{U(n) \times U(n)} \rightarrow \frac{U(4n)}{U(2n) \times U(2n)}.$$

Нетрудно убедиться, что имеют место коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \frac{U(2n)}{U(n) \times U(n)} \times \frac{U(2n)}{U(n) \times U(n)} & \xrightarrow{\mu_{2n}} & \frac{U(4n)}{U(2n) \times U(2n)} \\ \downarrow g'_{n,n} \times g'_{n,n} & & \downarrow g'_{2n,2n} \\ \Omega SU(2n) \times \Omega SU(2n) & \xrightarrow{\Omega \mu_{2n}} & \Omega SU(4n), \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \frac{U(2n)}{U(n) \times U(n)} \times \frac{U(2n)}{U(n) \times U(n)} & \xrightarrow{\mu_{2n}} & \frac{U(4n)}{U(2n) \times U(2n)} \\ \cap & & \cap \end{array}$$

$$\frac{U(2n+2)}{U(n+1) \times U(n+1)} \times \frac{U(2n+2)}{U(n+1) \times U(n+1)} \xrightarrow{\mu_{2n+2}} \frac{U(4n+4)}{U(2n+2) \times U(2n+2)},$$

где

$$g'_{n,n}: \frac{U(2n)}{U(n) \times U(n)} \rightarrow \Omega SU(2n)$$

— отображение, сопряженное к $g_{n,n}$. Следовательно, $\{\mu_{2n}\}$ определяют отображение $\mu: BU \times BU \rightarrow BU$, обладающее всеми свойствами гомотопического умножения ($\mu_{2n}: U(2n) \times U(2n) \rightarrow U(4n)$ гомотопно в $U(4n+4)$ вложению $h: U(2n) \times U(2n) \rightarrow U(4n)$, использован-

ному нами в п. 11.46). Кроме того, если задать в ΩSU структуру H -пространства с помощью умножения $\Omega\mu$, то $g'_{n,n}$, $n \geq 1$, определяют отображение H -пространств

$$g': BU \rightarrow \Omega SU.$$

Пусть $h': \mathbb{C}P^\infty \rightarrow \Omega SU$ — отображение, сопряженное к h . Тогда имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & H_*(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}) & \\ f_* \swarrow & & \searrow h'_* \\ H_*(BU; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{g'_*} & H_*(\Omega SU; \mathbb{Z}). \end{array}$$

Мы хотим показать, что g' — гомотопическая эквивалентность. На группе SU можно задать структуру клеточного пространства. Следовательно, в силу сформулированной в главе 9 теоремы Милнора, ΩSU имеет гомотопический тип клеточного пространства. Поскольку $\pi_0(BU, *) = \pi_1(BU, *) = \pi_0(\Omega SU, \omega_0) = \pi_1(\Omega SU, \omega_0) = 0$, то достаточно доказать, что

$$g'_*: H_*(BU; \mathbb{Z}) \rightarrow H_*(\Omega SU; \mathbb{Z})$$

— изоморфизм. Отображение g'_* является гомоморфизмом колец Понтрягина и $H_*(BU; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[y_1, y_2, \dots]$, где $y_i = f_*(y_i)$, $i \geq 1$, и $\{y_1, y_2, \dots\}$ — базис в гомологиях $H_*(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z})$. Таким образом, достаточно показать, что $H_*(\Omega SU; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[y'_1, y'_2, \dots]$, где $y'_i = h'_*(y_i)$. Отметим здесь следующее обстоятельство. Кольцевая структура в $H_*(\Omega SU; \mathbb{Z})$ была определена с помощью умножения $\Omega\mu$, однако согласно предложению 2.25 она совпадает с кольцевой структурой, индуцированной умножением петель в ΩSU .

16.48. Лемма. Отображение

$$(S^1 \wedge \mathbb{C}P^n, S^1 \wedge \mathbb{C}P^{n-1}) \xrightarrow{\circ_{n-1}} (SU(n+1), SU(n)) \xrightarrow{\pi} (S^{2n+1}, s_0)$$

индуцирует изоморфизм групп гомологий. Здесь $\pi(A) = Ae_1 \in S^{2n+1}$ для $A \in SU(n+1)$.

Доказательство. Поскольку пространства

$$\frac{S^1 \wedge \mathbb{C}P^n}{S^1 \wedge \mathbb{C}P^{n-1}} \quad \text{и} \quad S^{2n+1}$$

хаусдорфовы и компактны, то для доказательства леммы достаточно показать, что индуцированное отображение

$$\frac{S^1 \wedge \mathbb{C}P^n}{S^1 \wedge \mathbb{C}P^{n-1}} \rightarrow S^{2n+1}$$

биективно. Другими словами, мы должны доказать, что

$$a) \quad g_{n,1}(t, A)(e_1) = e_1 \Leftrightarrow t \in I \quad \text{или}$$

$$A(U(n) \times U(1)) \subseteq \frac{\{1\} \times U(n)}{\{1\} \times U(n-1) \times U(1)} = \mathbb{C}P^{n-1};$$

б) любой вектор $u \in \mathbb{C}^{n+1}$, не равный e_1 , можно представить в виде $u = g_{n,1}(t, A) e_1$ для некоторых $t \in I$, $A \in U(n+1)$.

Для любого элемента $A \in U(n+1)$ мы имеем

$$e_1 = \alpha A(e_{n+1}) + (e_1 - \alpha A(e_{n+1})), \quad \alpha = \langle e_1, A(e_{n+1}) \rangle.$$

Тогда $A(e_{n+1}) \perp (e_1 - \alpha A(e_{n+1}))$ и, следовательно,

$$\begin{pmatrix} e^{-\pi i t} I_n & 0 \\ 0 & e^{\pi i t} \end{pmatrix} A^{-1} e_1 = e^{\pi i t} \alpha e_{n+1} + e^{-\pi i t} A^{-1} (e_1 - \alpha A(e_{n+1})).$$

Таким образом,

$$g_{n,1}(t, A) e_1 = \begin{pmatrix} e^{\pi i t} I_n & 0 \\ 0 & e^{-\pi i t} \end{pmatrix} (e^{\pi i t} \alpha A(e_{n+1}) + e^{-\pi i t} (e_1 - \alpha A(e_{n+1}))), \quad \text{или}$$

$$16.49. \quad g_{n,1}(t, A) e_1 = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & e^{-2\pi i t} \end{pmatrix} (e_1 + (e^{2\pi i t} - 1) \alpha A(e_{n+1}))$$

Из этого равенства вытекает, что $g_{n,1}(t, A) e_1 = e_1$ тогда и только тогда, когда $t \in I$ или $A(e_{n+1}) \perp e_1$, т. е.

$$A(U(n) \times U(1)) \subseteq \frac{\{1\} \times U(n)}{\{1\} \times U(n-1) \times U(1)}.$$

Пусть u — единичный вектор и $u \neq e_1$. Тогда

$$u = e_1 + (u - e_1) = e_1 + \frac{\|u - e_1\|^2}{\langle e_1, u \rangle - 1} \cdot \frac{\langle e_1, u \rangle - 1}{\|u - e_1\|} \cdot \frac{u - e_1}{\|u - e_1\|} = e_1 + (e^{2\pi i t} - 1) \langle e_1, u \rangle v,$$

если положить

$$v = \frac{u - e_1}{\|u - e_1\|} \quad \text{и} \quad e^{2\pi i t} = - \frac{\langle e_1, u \rangle - 1}{\langle e_1, u \rangle + 1}.$$

Если $u \neq e_1$, то также и

$$u' = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & e^{2\pi i t} \end{pmatrix} u \neq e_1;$$

следовательно, найдется такой элемент $A \in U(n+1)$, что

$$A(e_{n+1}) = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & e^{2\pi i t} \end{pmatrix} v = \frac{u' - e_1}{\|u' - e_1\|}.$$

Таким образом,

$$u' = e_1 + (e^{2\pi i t} - 1) \langle e_1, A(e_{n+1}) \rangle A(e_{n+1}),$$

т. е. в силу формулы 16.49

$$g_{n,1}(t, A) e_1 = u. \quad \square$$

Обозначим через z_{i+1} элемент $\sigma(y_i) \in \tilde{H}_{2i+1}(S\mathbb{C}P^{n-1}; \mathbb{Z})$, $1 \leq i \leq n-1$.

16.50. Теорема.

$$H_*(SU(n); \mathbb{Z}) \cong E(\lambda_2, \dots, \lambda_n),$$

где

$$\lambda_i = g_{n-1, 1*}(z_i) \in H_{2i-1}(SU(n); \mathbb{Z}), \quad 2 \leq i \leq n, \quad n \geq 1.$$

Доказательство. Будем доказывать теорему индукцией по размерности n . Для $n=2$ утверждение очевидно, поскольку $SU(2) \cong S^3$.

Рассмотрим расслоение $SU(n) \rightarrow SU(n+1) \xrightarrow{\pi} S^{2n+1}$ и ассоциированную с ним точную последовательность Вана

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_m(SU(n); \mathbb{Z}) \xrightarrow{i_*} H_m(SU(n+1); \mathbb{Z}) \xrightarrow{\psi} \\ H_{m-(2n+1)}(SU(n); \mathbb{Z}) \xrightarrow{d^{2n+1}} H_{m-1}(SU(n); \mathbb{Z}) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Но если в каком-то расслоении $F \xrightarrow{i} E \rightarrow S^n$ пространство E и слой F являются H -группами, а отображение i — отображением H -групп, то из определения гомоморфизма ψ

$$(\psi: H_m(E) \rightarrow E_{n, m-n}^\infty \subset E_{n, m-n}^+ \cong H_n(S^n; H_{m-n}(F))) \cong H_{m-n}(F))$$

следует, что $\psi(x \cdot i_*(y)) = \psi(x) \cdot y$ для любых $x \in H_*(E)$, $y \in H_*(F)$. Кроме того, в нашем случае

$$\psi: H_{2n+1}(SU(n+1); \mathbb{Z}) \rightarrow H_0(SU(n); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$

совпадает с краевым гомоморфизмом

$$\pi_*: H_{2n+1}(SU(n+1); \mathbb{Z}) \rightarrow H_{2n+1}(S^{2n+1}; H_0(SU(n); \mathbb{Z})).$$

Поскольку $\pi_*(\lambda_{n+1}) = \pi_* \circ g_{n, 1*}(z_{n+1})$, то из леммы 16.48 вытекает, что $\pi_*(\lambda_{n+1}) = \pm \iota_{2n+1} \in H_{2n+1}(S^{2n+1}; \mathbb{Z})$, т. е. $\psi(\lambda_{n+1}) = \pm 1$. Следовательно, для любого $x \in H_*(SU(n); \mathbb{Z})$ мы имеем

$$\psi(\lambda_{n+1} \cdot i_*(x)) = \pm x,$$

что доказывает эпиморфность гомоморфизма ψ . Таким образом, мы получаем семейство коротких точных последовательностей

$$0 \rightarrow H_m(SU(n); \mathbb{Z}) \xrightarrow{i_*} H_m(SU(n+1); \mathbb{Z}) \xrightarrow{\psi} H_{m-2n-1}(SU(n); \mathbb{Z}) \rightarrow 0.$$

Покажем теперь, что элементы $\lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}$ являются простой системой образующих алгебры $H_*(SU(n+1); \mathbb{Z})$. Для любого $u \in H_*(SU(n+1); \mathbb{Z})$ положим $w = \psi(u)$; тогда

$$\psi(\lambda_{n+1} \cdot w) = \psi(\lambda_{n+1}) \cdot w = \pm 1 \cdot w = \pm \psi(u).$$

Следовательно, $u \mp \lambda_{n+1} \cdot w \in \text{im } i_*$, и стало быть, элементы w и $u \mp \lambda_{n+1} \cdot w$ являются линейными комбинациями мономов $\lambda_2^{e_2} \lambda_3^{e_3} \dots \lambda_n^{e_n}$. Тот факт, что эти мономы линейно независимы, очевиден. $\square$

Рассмотрим теперь элементы $y'_i = g'_{n, 1*}(y_i) \in H_{2i}(\Omega SU(n+1); \mathbb{Z})$. Поскольку

$$\sigma'(y'_i) = \sigma'(g'_{n, 1*}(y_i)) = g_{n, 1*}(\sigma(y_i)) = g_{n, 1*}(z_{i+1}) = \lambda_{i+1}, \quad i \geq 1,$$

то выполнены все условия теоремы Бореля 15.60. Таким образом, мы получаем следующий результат.

16.51. Теорема $H_*(\Omega SU(n+1); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[y'_1, y'_2, \dots, y'_n]$,
где

$$y'_i = g'_{n-1*}(y_i) \in H_{2i}(\Omega SU(n+1); \mathbb{Z}).$$

Из этой теоремы вытекает, в частности, что $g'_*: H_*(BU; \mathbb{Z}) \rightarrow H_*(\Omega SU; \mathbb{Z})$ — изоморфизм и, значит, $g': BU \rightarrow \Omega SU$ — гомотопическая эквивалентность.

Гомотопические эквивалентности $\mathbb{Z} \times BO \cong \Omega^4 BSp$ и $\mathbb{Z} \times BSp \cong \Omega^4 BO$ строятся в три шага каждая:

$$\mathbb{Z} \times BO \simeq \Omega(U/O), \quad U/O \simeq \Omega(Sp/U), \quad Sp/U \simeq \Omega Sp;$$

$$\mathbb{Z} \times BSp \simeq \Omega(U/Sp), \quad U/Sp \simeq \Omega(O/U), \quad O/U \simeq \Omega SO.$$

Доказательство того, что каждое из этих шести отображений является гомотопической эквивалентностью, в принципе, проводится так же, как выше. Однако в техническом отношении оно гораздо сложнее, поскольку теперь нужно доказывать, что каждое из отображений индуцирует изоморфизм гомологий с коэффициентами в $\mathbb{Z}_p$ для каждого простого p .

Приведенное выше доказательство гомотопической эквивалентности $\mathbb{Z} \times BU \simeq \Omega^2 BU$ принадлежит Картану и Муру [38], а также Дайеру и Лашофу [32]. Достоинством этого доказательства является тот факт, что оно использует технику и результаты, уже имеющиеся в нашем распоряжении. В то же время оно имеет существенный недостаток, состоящий в том, что вне рамок нашего рассмотрения осталась геометрическая природа изоморфизма $\tilde{K}^0(S^n) \cong \tilde{K}^0(S^{n+2})$. Например, развитой нами техники недостаточно для доказательства того, что изоморфизм периодичности — это умножение на $\{y-1\} \in \tilde{K}^0(S^2) = \tilde{K}^0(\mathbb{C}P^1)$. Приходится сожалеть, что принадлежащее Атье геометрическое доказательство теоремы периодичности по своей технике и используемому материалу выходит за рамки настоящей книги. Рекомендуем читателю, желающему познакомиться с этим доказательством, превосходную книжку Атье [16].

16.52. Упражнение. i) Для любого кольца R положим $p_i = (-1)^i c_{2i}(\omega^+ \otimes \mathbb{C}) \in H^{4i}(BSO(n); R)$, где $\omega^+ \rightarrow BSO(n)$ — универсальное $SO(n)$ -расслоение. Показать, что если $1/2 \in R$, то

$$H^*(BSO(2r); R) \cong R[p_1, p_2, \dots, p_{r-1}, e],$$

$$H^*(BSO(2r+1); R) \cong R[p_1, p_2, \dots, p_r],$$

где e — класс Эйлера расслоения ω^+ . (Отметим, что $e^2(\omega^+) = 0$ для нечетного n и $e^2(\omega^+) = p_r$ для $n = 2r$.)

ii) Так как $SO(2) \cong SU(1) \cong S^1$, то $H_*(BSO(2); R)$ является свободным R -модулем с базисом $\{1, y_1, y_2, \dots\}$, $y_i \in H_{2i}(BSO(2); R)$. Показать, что если $1/2 \in R$ и $Bi: BSO(2) \rightarrow BSO$ — отображение, индуцированное вложением, то $Bi_*(y_{2k+1}) = 0$ для $k \geq 0$ и $H_*(BSO; R) \cong R[q_1, q_2, \dots]$, где $q_i = Bi_*(y_{2i}) \in H_{4i}(BSO; R)$.

16.53. Упражнение. Вычислить кольцо $H_*(U(n); \mathbb{Z})$.

ССЫЛКИ НА ЛИТЕРАТУРУ

1. Адамс [7].	6. Коннер, Флойд [42].
2. Атья [16].	7. Люевичус [48].
3. Борель, Хирцебрух [23].	8. Милнор [56].
4. Ботт [24, 25].	9. Стинрод [73].
5. Дайер, Лашоф [32].	10. Хьюзмоллер [96].

КОГОМОЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ
И ГОМОЛОГИЧЕСКИЕ КООПЕРАЦИИ

В главе 13 для произвольного кольцевого спектра E мы построили отображения Гуревича

$$H: [X, Y] \rightarrow \text{Hom}_{\tilde{E}_*(S^0)}(\tilde{E}_*(X), \tilde{E}_*(Y))$$

и Бордмана

$$B: [X, Y] \rightarrow \text{Hom}_{\tilde{E}^*(S^0)}(\tilde{E}^*(Y), \tilde{E}^*(X)).$$

Эти отображения можно рассматривать как средство, позволяющее переводить геометрические задачи (существование или несуществование отображений $f: X \rightarrow Y$ с заданными свойствами) на алгебраический язык (существование или несуществование гомоморфизмов $\tilde{E}_*(S^0)$ -модулей с заданными свойствами). Действительно, для того чтобы показать, что не существует отображения $f: X \rightarrow Y$ с определенными свойствами, достаточно установить, что гомоморфизмы $f_*: E_*(X) \rightarrow E_*(Y)$ с соответствующими свойствами не принадлежат образу $\text{im } H$. В связи с этим весьма полезно очертить размеры образа $\text{im } H$.

Следующее простое наблюдение оказывается чрезвычайно плодотворным во многих областях алгебраической топологии. Для любого кольцевого спектра E функторы $E_*(-)$ принимают значение в категории $\mathcal{M}_E$ градуированных $\tilde{E}_*(S^0)$ -модулей. Предположим, что в действительности $E_*(-)$ всегда принимает значения в некоторой меньшей категории $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}_E$. Тогда $\text{im } H$ лежит в $\text{Hom}_{\mathcal{B}}(E_*(X), E_*(Y)) \subset \text{Hom}_{\tilde{E}_*(S^0)}(E_*(X), E_*(Y))$, где через $\text{Hom}_{\mathcal{B}}(-, -)$ обозначены морфизмы в категории $\mathcal{B}$. Хороший пример такой ситуации доставляет $\cup$ -умножение: если E — кольцевой спектр, то на $\mathcal{F}\mathcal{F}'$ кофунктор $E^*(-)$ принимает значения не в $\mathcal{M}_E$, а в меньшей категории $\mathcal{A}_E$ градуированных алгебр над $\tilde{E}^*(S^0)$. Другими словами, если предполагается, что гомоморфизм $f^*: E^*(Y) \rightarrow E^*(X)$ индуцирован отображением $f: X \rightarrow Y$ топологических пространств, то ему нужно быть кольцевым гомоморфизмом. Например, $H^*(S^2 \times S^3; \mathbb{Z})$ и $H^*(S^2 \vee S^3 \vee S^5; \mathbb{Z})$ изоморфны как градуированные группы и не изоморфны как кольца; поэтому не может существовать гомотопической эквивалентности $S^2 \times S^3 \simeq S^2 \vee S^3 \vee S^5$.

Стинрод нашел такую градуированную алгебру $A(p)^*$ над $\mathbb{Z}_p$, что группа $H^*(X; \mathbb{Z}_p)$ является градуированным $A(p)^*$ -модулем для любого спектра X , а гомоморфизм $f^*: H^*(Y; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^*(X; \mathbb{Z}_p)$,

индуцированный отображением $f: X \rightarrow Y$, представляет собой гомоморфизм градуированных $A(p)^*$ -модулей. Таким образом, $\text{im } B \subset \text{Hom}_{A(p)^*}(H^*(Y; \mathbb{Z}_p), H^*(X; \mathbb{Z}_p))$. Как мы увидим, алгебра Стинрода $A(p)^*$ устроена довольно сложно и эта сложность затрудняет работу с ней. С другой стороны, в сложности структуры алгебры Стинрода заключены огромные достоинства: отнюдь не любой гомоморфизм $f^*: H^*(Y; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^*(X; \mathbb{Z}_p)$ оказывается $A(p)^*$ -линейным и поэтому группа $\text{Hom}_{A(p)^*}(H^*(Y; \mathbb{Z}_p), H^*(X; \mathbb{Z}_p))$ зачастую очень мала. Неудивительно, что лишь после этого открытия Стинрода были доказаны многие теоремы несуществования, долго не поддававшиеся решению иными средствами.

Для любых X и n произвольный однородный элемент $\theta \in A(p)^q$ мы можем рассматривать как гомоморфизм

$$\theta: H^n(X; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^{n+q}(X; \mathbb{Z}_p),$$

полагая $\theta(x) = \theta \cdot x$, $x \in H^n(X; \mathbb{Z}_p)$. В этом случае θ называется *когомологической операцией степени q* . Операции Стинрода обладают тем дополнительным свойством, что они коммутируют с надстройкой:

$$\theta \cdot \sigma = \sigma \cdot \theta: H^{n+1}(\Sigma X; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^{n+q+1}(X; \mathbb{Z}_p).$$

17.1. Определение. Когомологической операцией типа (p, q) в теории когомологий k^* называется естественное преобразование $\theta: k^p(-) \rightarrow k^q(-)$ кофункторов со значениями в категории множеств. Операция θ называется *аддитивной*, если она представляет собой естественное преобразование кофункторов со значениями в категории групп. *Стабильная* когомологическая операция степени q — это такая последовательность когомологических операций $\theta^n: k^n(-) \rightarrow k^{n+q}(-)$, $n \in \mathbb{Z}$, что $\theta^n \cdot \sigma = \sigma \cdot \theta^{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. Обычно такую последовательность $\{\theta^n\}$ обозначают просто θ .

17.2. Обозначим через $A(E)^q$ множество всех стабильных когомологических операций степени q для теории когомологий $E^*(-)$, где E — некоторый спектр. На множестве $A(E)^q$ можно определить операцию сложения $+$, полагая $(\theta + \phi)(x) = \theta(x) + \phi(x)$ для всех $x \in E^*(X)$ и любых пространств X . Операция сложения $+$ превращает $A(E)^q$ в абелеву группу. Композиция операций определяет спаривание

$$A(E)^q \times A(E)^r \xrightarrow{\sim} A(E)^{q+r}.$$

17.3. Лемма. Если $\theta = \{\theta^n\}$ — стабильная когомологическая операция, то каждая операция θ^n аддитивна.

Доказательство. Мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} E^{n+1}(\Sigma X) \times E^{n+1}(\Sigma X) & \xleftarrow[\cong]{\{i_1^*, i_2^*\}} & E^{n+1}(\Sigma X \vee \Sigma X) & \xrightarrow{\mu'^*} & E^{n+1}(\Sigma X) & \xrightarrow{\sigma} & E^n(X) \\ \downarrow \theta \times \theta & & \downarrow \theta & & \downarrow \theta & & \downarrow \theta \\ E^{n+q+1}(\Sigma X) \times E^{n+q+1}(\Sigma X) & \xleftarrow[\cong]{\{i_1^*, i_2^*\}} & E^{n+q+1}(\Sigma X \vee \Sigma X) & \xrightarrow{\mu'^*} & E^{n+q+1}(\Sigma X) & \xrightarrow{\sigma} & E^{n+q}(X). \end{array}$$

где $\mu': \Sigma X \rightarrow \Sigma X \vee \Sigma X$ — коумножение на ΣX . Для заданных $x, y \in E^n(X)$ положим $x = \sigma(x')$, $y = \sigma(y')$. Согласно когомологическому варианту леммы 7.37

$$\mu'^* \circ \{i_1^*, i_2^*\}^{-1}(x', y') = x' + y'.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \theta(x + y) &= \theta(\sigma x' + \sigma y') = \theta \circ \sigma \circ \mu'^* \circ \{i_1^*, i_2^*\}^{-1}(x', y') = \\ &= \sigma \circ \mu'^* \circ \{i_1^*, i_2^*\}^{-1} \circ (\theta \times \theta)(x', y') = \\ &= \sigma(\theta x' + \theta y') = \theta \sigma x' + \theta \sigma y' = \theta x + \theta y. \quad \square \end{aligned}$$

17.4. Следствие. Композиция когомологических операций билинейна и, следовательно, определяет гомоморфизм

$$A(E)^p \otimes A(E)^q \rightarrow A(E)^{p+q}.$$

Доказательство. В силу леммы 17.3

$$[\theta \circ (\phi + \psi)](x) = \theta(\phi(x) + \psi(x)) = \theta\phi(x) + \theta\psi(x).$$

Кроме того, по определению операции сложения

$$[(\theta + \phi) \circ \psi](x) = \theta\psi(x) + \phi\psi(x). \quad \square$$

Так как композиция когомологических операций очевидным образом ассоциативна, то она превращает $A(E)^* = \bigoplus_q A(E)^q$ в градуированное кольцо. В действительности $A(E)^*$ является градуированной алгеброй над $\check{E}^*(S^0)$, поскольку для любых $r \in \check{E}^*(S^0)$ и $\theta \in A(E)^*$ мы можем определить $r\theta$ как такую стабильную операцию, что

$$(r\theta)(x) = (\theta(x))r$$

для всех x .

17.5. Теорема. Пусть умножение в $E^*(E)$ индуцировано композицией отображений: $[f][g] = [\Sigma^m f \cdot g]$ для $f: E \rightarrow \Sigma^n E$, $g: E \rightarrow \Sigma^m E$. Тогда соответствие $\theta \mapsto \theta([1_E])$, $[1_E] \in E^0(E)$, задает кольцевой изоморфизм $A(E)^* \rightarrow E^*(E)$.

Доказательство. Обозначим через α отображение, задаваемое формулой $\alpha(\theta) = \theta([1_E])$. Определим $\beta: E^*(E) \rightarrow A(E)^*$, полагая $(\beta[f])[g] = [\Sigma^m f \cdot g]$ для любых $f: E \rightarrow \Sigma^n E$, $g: E \rightarrow \Sigma^m E$. Тогда

$$\alpha \circ \beta[f] = (\beta[f])[1_E] = [f \cdot 1_E] = [f]$$

и

$$(\beta \circ \alpha(\theta))[g] = [\Sigma^m \theta[1_E] \cdot g] = \sigma^* \theta[1_E] = \theta g^* [1_E] = \theta[g],$$

так что $\beta \circ \alpha(\theta) = \theta$. То, что α — кольцевой изоморфизм, очевидно. $\square$

17.6. Примеры. i) Обозначим через $A(p)^*$ алгебру Стиррода $A(H(\mathbb{Z}_p))^*$. Таким образом, $A(p)^* \cong H^*(H(\mathbb{Z}_p); \mathbb{Z}_p)$ для каждого простого p . Позже мы вычислим алгебру $A(2)^*$: используя спектральную последовательность Серра, мы найдем $\tilde{H}^*(H(\mathbb{Z}_2, q); \mathbb{Z}_2)$ для всех $q \geq 1$.

ii) В алгебре $A(K)^* \cong K^*(K)$ легко находятся две следующие операции: $1 = \Psi^1$ и Ψ^{-1} — операция, переводящая каждое виртуальное расслоение в комплексно сопряженное с ним. Эти две операции порождают подгруппу $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Автору неизвестно, существуют ли в $K^*(K)$ другие элементы¹⁾; если нет, то алгебра $A(K)^*$ малоинтересна.

Итак, мы установили, что для любого пространства X группа $E^*(X)$ является модулем над алгеброй $A(E)^* = E^*(E)$. Возникает надежда, что для гомотопий существует дуальная конструкция. И в самом деле, в 1967 году Адамс нашел такую конструкцию при некоторых дополнительных предположениях на E . Не удивительно, что объектом, дуальным к $E^*(E)$, оказался $E_*(E)$. Мы снабдим объект $E_*(E)$ структурными отображениями, которые превратят его в алгебру Хопфа (умножение в ней — это умножение Понтрягина, индуцированное спариванием $E \wedge E \rightarrow E$ кольцевого спектра E). Тогда для любого X группа $E_*(X)$ превратится в комодуль над $E_*(E)$.

17.7. Определение. Модули над алгебрами можно описать в терминах коммутативных диаграмм. Именно, пусть R — кольцо, A — алгебра над R с единицей η . Тогда A -модулем называется R -модуль M с заданным на нем A -действием, т. е. таким гомоморфизмом $\phi_M: A \otimes M \rightarrow M$, что диаграммы

$$\begin{array}{ccccc}
 R \otimes M & \xrightarrow{\eta \otimes 1} & A \otimes M & & A \otimes A \otimes M \xrightarrow{\phi_A \otimes 1} A \otimes M \\
 & \searrow \cong & \downarrow \phi_M & & \downarrow 1 \otimes \phi_M \quad \downarrow \phi_M \\
 & & M & & A \otimes M \xrightarrow{\phi_M} M
 \end{array}$$

коммутативны. Здесь $\phi_A: A \otimes A \rightarrow A$ — гомоморфизм, задающий умножение на A . (Заметим, что A является A -модулем с A -действием ϕ_A .)

Обращая в этом определении стрелки, мы приходим к понятию комодуля. Пусть C — коалгебра над R с пополнением $\epsilon: C \rightarrow R$. Тогда C -комодулем называется R -модуль L с заданным на нем C -кодействием, т. е. таким R -гомоморфизмом $\psi_L: L \rightarrow C \otimes L$, что

¹⁾ Существуют, и много (несчетное множество); см. [1*] и работу Adams J. F., Clark P. W. Stable operations on complex K-theory. — Illinois Jour. Math., 1977, 21, p. 826—829. — Прим. ред.

диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
 R \otimes L & \xleftarrow{\varepsilon \otimes 1} & C \otimes L \\
 & \searrow \cong & \uparrow \psi_L \\
 & & L
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 C \otimes C \otimes L & \xleftarrow{\psi_C \otimes 1} & C \otimes L \\
 \uparrow 1 \otimes \psi_L & & \uparrow \psi_L \\
 C \otimes L & \xleftarrow{\psi_L} & L
 \end{array}$$

коммутативны. Здесь ψ_C — коумножение на C . (Заметим, что ψ_C является кодействием для C). Нетрудно определить аналоги этих понятий для градуированных объектов.

В дальнейшем нас будет интересовать случай $R = \tilde{E}_*(S^0)$ и $C = E_*(E)$. Здесь стоит сделать следующее замечание. Группа $E_*(E)$ является левым $\tilde{E}_*(S^0)$ -модулем относительно обычного действия

$$\pi_*(E) \otimes \pi_*(E \wedge E) \rightarrow \pi_*(E \wedge E \wedge E) \xrightarrow{(\mu \Delta)_*} \pi_*(E \wedge E).$$

В то же время на $E_*(E)$ существует естественное правое действие группы $\tilde{E}_*(S^0)$:

$$\pi_*(E \wedge E) \otimes \pi_*(E) \rightarrow \pi_*(E \wedge E \wedge E) \xrightarrow{(\mu \Delta)_*} \pi_*(E \wedge E).$$

Следовательно, $E_*(E)$ является также правым $\tilde{E}_*(S^0)$ -модулем и эти две модульные структуры, вообще говоря, различны. Таким образом, $E_*(E)$ есть то, что называют бимодулем над $\tilde{E}_*(S^0)$. Понятия коалгебры, алгебры Хопфа и т. д. для бимодуля формально выглядят так же, как и раньше; однако следует проявлять осторожность, чтобы не смешать две различные модульные структуры.

17.8. Теорема. Пусть E — такой коммутативный кольцевой спектр, что $E_*(E) = C$ является плоским правым модулем над $\tilde{E}_*(S^0) = R$. Тогда существуют такие гомоморфизмы

$$\begin{aligned}
 \phi: C \otimes C &\rightarrow C, & \varepsilon: C &\rightarrow R, \\
 \eta_L: R &\rightarrow C, & c: C &\rightarrow C, \\
 \eta_R: R &\rightarrow C, & \psi_E: C &\rightarrow C \otimes_R C
 \end{aligned}$$

и, кроме того, для каждого X существует такой гомоморфизм

$$\psi_X: E_*(X) \rightarrow C \otimes_R E_*(X),$$

что

i) C является алгеброй Хопфа с коммутативным умножением ϕ , имеющим левую и правую единицы η_L, η_R , и с ассоциативным коумножением ψ_E , имеющим пополнение ε ;

ii) если $\lambda \in R$ и $x \in C$, то

$$\lambda x = \phi(\eta_L(\lambda) \otimes x), \quad x\lambda = \phi(x \otimes \eta_R(\lambda));$$

- iii) $e\eta_L = 1 = e\eta_R$, $c\eta_L = \eta_R$, $c\eta_R = \eta_L$, $ec = e$, $c^2 = 1$;
 iv) $\psi_E(1) = 1 \otimes 1$, следовательно, $\psi_E\eta_L(\lambda) = \eta_L(\lambda) \otimes 1$ и $\psi_E\eta_R(\lambda) = 1 \otimes \eta_R(\lambda)$ для всех $\lambda \in R$;
 v) гомоморфизм ψ_X естествен относительно отображений спектров X ;
 vi) ψ_X является кодействием;
 vii) если $\psi_X(x) = \sum_i e'_i \otimes x_i$ и $\psi_Y(y) = \sum_j e''_j \otimes y_j$ для $x, x_i \in E_*(X)$, $y, y_j \in E_*(Y)$, $e'_i, e''_j \in C$, то

$$\psi_{X \wedge Y}(x \wedge y) = \sum_{i,j} (-1)^{|x_i| \cdot |e''_j|} e'_i e''_j \otimes (x_i \wedge y_j);$$

viii) диаграмма

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{c} & C \\ \psi_E \downarrow & & \downarrow \psi_E \\ C \otimes_R C & \xrightarrow{(c \otimes c) \circ T} & C \otimes_R C \end{array}$$

коммутативна;

ix) диаграммы

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\varepsilon} & R \\ \psi_E \downarrow & & \downarrow \eta_L \\ C \otimes_R C & \xrightarrow{\phi(1 \otimes c)} & C, \end{array} \quad \begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\varepsilon} & R \\ \psi_E \downarrow & & \downarrow \eta_R \\ C \otimes_R C & \xrightarrow{\phi(c \otimes 1)} & C \end{array}$$

коммутативны;

x) отображение $\psi_{S^0}: \hat{E}_*(S^0) \rightarrow C \otimes_R \hat{E}_*(S^0)$ совпадает с η_L .

Доказательство. Как мы уже указывали, отображение ϕ является умножением Понтрягина в $\hat{E}_*(E)$. Пусть $\iota: S^0 \rightarrow E$ — единица спектра E и μ — умножение в E . Определим гомоморфизмы η_L , η_R , e и c , полагая

$$\eta_L: \pi_*(E) \cong \pi_*(E \wedge S^0) \xrightarrow{(\wedge 1)_*} \pi_*(E \wedge E),$$

$$\eta_R: \pi_*(E) \cong \pi_*(S^0 \wedge E) \xrightarrow{(\wedge 1)_*} \pi_*(E \wedge E),$$

$$e: \pi_*(E \wedge E) \xrightarrow{\mu_*} \pi_*(E),$$

$$c: \pi_*(E \wedge E) \xrightarrow{\tau_*} \pi_*(E \wedge E).$$

Для любых спектров X, Y определим гомоморфизм m как композицию

$$m: \pi_*(X \wedge E) \otimes_{\pi_*(E)} \pi_*(E \wedge Y) \rightarrow \pi_*(X \wedge E \wedge E \wedge Y) \xrightarrow{(\wedge \mu \wedge 1)_*} \pi_*(X \wedge E \wedge Y).$$

Если $\pi_*(X \wedge E)$ является плоским правым $\pi_*(E)$ -модулем, то m — изоморфизм, как показано в теореме 13.75. В предположении, что C есть плоский правый R -модуль, гомоморфизм ψ_X можно определить как композицию

$$\pi_*(E \wedge X) \cong \pi_*(E \wedge S^0 \wedge X) \xrightarrow{(1 \wedge \iota \wedge 1)_*}$$

$$\pi_*(E \wedge E \wedge X) \cong C \otimes_R \pi_*(E \wedge X).$$

Мы получим ψ_E , просто взяв $X = E$. Доказательство свойств i) — x) состоит в выписывании некоторого количества диаграмм и в проверке того, что каждая из них коммутативна. Приведем пример одной из диаграмм, необходимой для доказательства свойства vi):

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_*(E \wedge X) & \xrightarrow{(1 \wedge \iota \wedge 1)_*} & \\
 \downarrow (1 \wedge \iota \wedge 1)_* & 1 & \\
 \pi_*(E \wedge E \wedge X) & \xrightarrow{(1 \wedge \iota \wedge 1 \wedge 1)_*} & \\
 \uparrow m & 3 & \\
 \pi_*(E \wedge E) \otimes_R \pi_*(E \wedge X) & \xrightarrow{(1 \wedge \iota \wedge 1)_* \otimes 1} & \\
 \\
 \pi_*(E \wedge E \wedge X) & \xleftarrow{m} & \pi_*(E \wedge E) \otimes_R \pi_*(E \wedge X) \\
 \downarrow (1 \wedge 1 \wedge \iota \wedge 1)_* & 2 & \downarrow 1 \otimes (1 \wedge \iota \wedge 1)_* \\
 \pi_*(E \wedge E \wedge E \wedge X) & \xleftarrow{m} & \pi_*(E \wedge E) \otimes_R \pi_*(E \wedge E \wedge X) \\
 \uparrow m & 4 & \uparrow 1 \otimes m \\
 \pi_*(E \wedge E \wedge E) \otimes_R \pi_*(E \wedge X) & \xleftarrow{m \otimes 1} & \pi_*(E \wedge E) \otimes_R \pi_*(E \wedge E) \otimes_R \pi_*(E \wedge X)
 \end{array}$$

(везде, где необходимо, подразумевается изоморфизм $\pi_*(E \wedge X) \cong \pi_*(E \wedge S^0 \wedge X)$). Квадрат 1 очевидно коммутативен, квадраты 2 и 3 коммутативны в силу естественности гомоморфизма m . Коммутативность квадрата 4 легко выводится из ассоциативности умножения m . Таким образом, $(1 \otimes \psi_X) \cdot \psi_X = (\psi_E \otimes 1) \cdot \psi_X$. Взяв $X = E$, мы получаем ассоциативность умножения ψ_E , утверждаемую свойством i). $\square$

Замечание. Гомоморфизм s представляет собой автоморфизм алгебры C , переводящий правое R -действие в левое и на-

оборот. Следовательно, алгебра C является плоским правым R -модулем тогда и только тогда, когда она является плоским левым R -модулем.

17.9. Примеры. i) Пусть $E = H(\mathbb{Z}_p)$. Так как $\mathbb{Z}_p = R$ — поле, а алгебра $H(\mathbb{Z}_p)_* (H(\mathbb{Z}_p))$, оказывается, имеет конечный тип (т. е. группа $H_q(H(\mathbb{Z}_p); \mathbb{Z}_p)$ конечно порождена для любого q), то из теоремы об универсальных коэффициентах следует, что $A(p)_* = H(\mathbb{Z}_p)_* (H(\mathbb{Z}_p))$ двойственна (как векторное пространство над $\mathbb{Z}_p$) алгебре Стиррода $A(p)^*$. Структура алгебры $A(p)_*$ была вычислена Дж. Милнором. Он установил, что $A(p)_*$ является тензорным произведением внешней алгебры и алгебры полиномов. Естественно ожидать, что коумножение (которое двойственно к умножению в $A(p)^*$) должно быть устроено довольно сложно. Мы опишем алгебры $A(2)^*$ и $A(2)_*$ в главе 18.

ii) Ранее мы уже отмечали, что алгебра $K^*(K)$, возможно, очень мала. Однако в дальнейшем мы вычислим алгебру $K_*(K)$ и увидим, что она имеет очень богатую и полезную структуру. Кроме того, мы вычислим также алгебру $KO_*(KO)$.

iii) Разумеется, можно рассматривать $MU_*(MU)$ и $MSp_*(MSp)$ как модули над кольцами $\hat{M}\hat{U}_*(S^0)$ и $\hat{M}\hat{S}p_*(S^0)$ соответственно.

Прежде чем начать вычисление различных примеров алгебры $A(E)_*$, рассмотрим более подробно ее общие свойства. Это относится, в частности, к двойственности между $A(E)^*$ и $A(E)_*$. Ранее мы показали, как надеть $E^*(X)$ структурой левого $A(E)^*$ -модуля. Однако и $E_*(X)$ также обладает естественной структурой $A(E)^*$ -модуля: если элемент $u \in E_n(X)$ представляется отображением $f: S^n \rightarrow E \wedge X$ и $a \in E^m(E)$ представляется отображением $g: E \rightarrow \Sigma^m E$, то $a \cdot u$ — это элемент из $E_{n-m}(X)$, представляемый композицией

$$S^{n-m} \simeq \Sigma^{-m} S^n \xrightarrow{\Sigma^{-m} f} \Sigma^{-m} E \wedge X \xrightarrow{\Sigma^{-m} g \wedge 1} E \wedge X.$$

17.10. Предложение. Пусть $a \in A(E)^*$, $u \in E_*(X)$ и $\psi u = \sum_i e_i \otimes u_i \in C \otimes E_*(X)$. Тогда

$$a \cdot u = \sum_i \langle a, ce_i \rangle u_i.$$

Доказательство. Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi_*(E \wedge X) & \xrightarrow{a} & \pi_*(E \wedge X) \\ \downarrow (1 \wedge 1 \wedge 1)_* & & \swarrow (1 \wedge 1 \wedge 1)_* \\ \pi_*(E \wedge E \wedge X) & \xrightarrow{a} & \pi_*(E \wedge E \wedge X) \\ \uparrow m & & \searrow (\mu \wedge 1)_* \\ \pi_*(E \wedge E) \otimes_R \pi_*(E \wedge X) & \xrightarrow{\alpha} & \pi_*(E \wedge X), \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow i \\ \downarrow \end{array}$$

гомоморфизм α в которой определяется формулой $\alpha(e \otimes u) = \langle a, ce \rangle u$. Доказательство того факта, что нижний четырехугольник коммутативен, заключается в вычислении отображения, задаваемого композицией $(\mu \wedge 1)_* \cdot a \cdot t(e \otimes u)$, и в сравнении его с определением $\langle a, ce \rangle u$. Предложение немедленно следует из коммутативности диаграммы. $\square$

В том случае, когда элемент $z \in E^*(X)$ полностью определяется значениями $\langle z, u \rangle$ для всех $u \in E_*(X)$, разумно определить действие алгебры $A(E)^*$ на $E^*(X)$ в терминах гомоморфизма ψ_X .

17.11. Предложение. Пусть $a \in A(E)^*$, $y \in E^*(X)$, $u \in E_*(X)$ и $\psi_X(u) = \sum_i e_i \otimes u_i$. Тогда

$$\langle ay, u \rangle = \sum_i (-1)^{|y| \cdot |e_i|} \langle a, e_i \langle y, u_i \rangle \rangle.$$

Выражение в правой части этого равенства имеет смысл, поскольку $e_i \in E_*(E)$, а $\langle y, u_i \rangle$ принадлежит кольцу $\tilde{E}_*(S^0)$, которое действует справа на $E_*(E)$.

Доказательство. Для любого спектра F определим гомоморфизм $y_*: \pi_*(F \wedge X) \rightarrow \pi_*(F \wedge E)$ следующим образом. Предположим, что $y \in E^*(X)$ представляется отображением $g: X \rightarrow \Sigma^p E$ и что $f: S^r \rightarrow F \wedge X$ задает некоторый элемент из $\pi_*(F \wedge X)$. Пусть $y_*([f])$ — класс композиции

$$S^{r-p} \simeq \Sigma^{-p} S^r \xrightarrow{\Sigma^{-p} f} \Sigma^{-p} F \wedge X \simeq F \wedge \Sigma^{-p} X \xrightarrow{1 \wedge \Sigma^{-p} g} F \wedge E.$$

Тогда нетрудно проверить, что $\langle ay, u \rangle = \langle a, y_* u \rangle$ для $a \in E^*(E)$, $u \in E_*(X)$. Рассмотрим теперь коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \pi_*(E \wedge X) & \xrightarrow{y_*} & \pi_*(E \wedge E) \\ \downarrow (1 \wedge 1 \wedge 1)_* & & \swarrow (1 \wedge 1 \wedge 1)_* \\ \pi_*(E \wedge E \wedge X) & \xrightarrow{y_*} & \pi_*(E \wedge E \wedge E) \\ \uparrow t & & \searrow (1 \wedge \mu)_* \\ \pi_*(E \wedge E) \otimes_R \pi_*(E \wedge X) & \xrightarrow{\beta} & \pi_*(E \wedge E), \end{array}$$

гомоморфизм β в которой определяется формулой

$$\beta(e \otimes u) = (-1)^{|y| \cdot |e|} e \langle y, u \rangle, \quad \text{где } e \in E_*(E), \quad u \in E_*(X).$$

Предложение следует из коммутативности этой диаграммы. $\square$

И, наконец, переходя к конкретным вычислениям, выясним, как влияют описанные выше структуры на гомоморфизм Гуревича. Имеем

$$h: [X, Y] \rightarrow \text{Hom}_{E_*(E)}(E_*(X), E_*(Y)),$$

где через $\text{Hom}_C(M, L)$ обозначено множество гомоморфизмов $\phi: M \rightarrow L$ комодулей над коалгеброй C . В частности, для $X = E(S^n)$ мы имеем

$$h: \pi_n(Y) = [S^n, Y] \rightarrow \text{Hom}_{E_*(E)}(\tilde{E}_*(S^n), E_*(Y)).$$

Пусть теперь $\phi: M \rightarrow L$ — такой гомоморфизм градуированных групп, модулей и т. д., что $\phi(M_k) \subset L_{k+d}$ для всех $k \in \mathbb{Z}$. Тогда говорят, что ϕ имеет *степень* d . Запись $\text{Hom}_A(M, L)$ означает, что мы рассматриваем гомоморфизмы степени 0. Обозначим через $\text{Hom}_A^d(M, L)$ группу гомоморфизмов степени d . Композиция с итерированной надстройкой $\sigma^n: \tilde{E}_r(S^0) \rightarrow \tilde{E}_{r+n}(S^n)$ позволяет рассматривать h как гомоморфизм

$$h: \pi_n(Y) \rightarrow \text{Hom}_{E_*(E)}^n(\tilde{E}_*(S^0), E_*(Y)).$$

17.12. Определение. Пусть C — алгебра Хопфа над кольцом R с единицей 1 и M — комодуль над C с действием $\phi_M: M \rightarrow C \otimes_R M$. Элемент $m \in M$ называется *примитивным*, если $\phi_M(m) = 1 \otimes m$. Множество $P(M)$ всех примитивных элементов образует подгруппу в M (которая не является R -подмодулем, за исключением того случая, когда левое и правое R -действия в бимодуле C совпадают).

17.13. Лемма. *Существует изоморфизм*

$$\kappa: \text{Hom}_C^n(R, M) \rightarrow P_n(M),$$

задаваемый формулой $\kappa(\theta) = \theta(1)$, $\theta \in \text{Hom}_C^n(R, M)$.

Доказательство. Структура C -комодуля на кольце R задается с помощью гомоморфизма $\eta_L: R \rightarrow C \simeq C \otimes_R R$, переводящего элемент $r \in R$ в $r \cdot 1 (= r \cdot 1 \otimes 1)$. Тот факт, что $\theta: R \rightarrow M$ является C -гомоморфизмом, означает коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\eta_L} & C \otimes_R R \\ \theta \downarrow & & \downarrow 1 \otimes \theta \\ M & \xrightarrow{\phi_M} & C \otimes_R M. \end{array}$$

Таким образом, $\phi_M(\kappa(\theta)) = \phi_M(\theta(1)) = (1 \otimes \theta)(\eta_L(1)) = 1 \otimes \theta(1) = 1 \otimes \kappa(\theta)$. Другими словами, $\kappa(\theta) \in P_n(M)$. Ясно, что отображение κ — гомоморфизм.

Предположим теперь, что $p \in P_n(M)$, и пусть $\theta_p: R \rightarrow M$ определяется формулой $\theta_p(r) = rp$, $r \in R$. Тогда для всех $r \in R$ мы имеем

$$\begin{aligned} \phi_M \circ \theta_p(r) &= \phi_M(rp) = r\phi_M(p) = (\phi_M - \text{отображение } R\text{-модулей}) \\ & r(1 \otimes p) = r \cdot 1 \otimes p = \\ & r \cdot 1 \otimes \theta_p(1) = (1 \otimes \theta_p)(r \cdot 1 \otimes 1) = (1 \otimes \theta_p)(\eta_L(r)). \end{aligned}$$

Следовательно, $\theta_p \in \text{Hom}_C^n(R, M)$ и поэтому $\kappa(\theta_p) = p$. С другой стороны, если элементы $\theta, \theta' \in \text{Hom}_C^n(R, M)$ таковы, что $\kappa(\theta) = \kappa(\theta')$, то $\theta(1) = \theta'(1)$. Значит, для всех $r \in R$ мы имеем $\theta(r) = \theta(r \cdot 1) = r\theta(1) = r\theta'(1) = \theta'(r \cdot 1) = \theta'(r)$, т. е. $\theta = \theta'$. Таким образом, κ — изоморфизм. $\square$

17.14. Следствие. Пусть E — такой кольцевой спектр, что $E_*(E)$ — плоский модуль над $\tilde{E}_*(S^0)$. Тогда образ гомоморфизма Гуревича $h: \pi_*(X) \rightarrow E_*(X)$ содержится в группе $P(E_*(X))$ элементов из $E_*(X)$, примитивных относительно $E_*(E)$ -кодействия.

Во многих важных случаях группа $PE_*(X)$ вычисляется без особого труда, что позволяет оценить группу $\text{in } h$.

17.15. Среди всех алгебр Хопфа $E_*(E)$ простейшей для вычисления (с точки зрения развитой нами техники) является алгебра $MU_*(MU)$.

17.16. Теорема. $MU_*(MU) \cong \tilde{MU}_*(S^0)[\beta'_1, \beta'_2, \dots]$, где $\Phi_*(\beta'_i) = \beta_i \in MU_*(BU)$ и стандартное отображение $f: \mathbb{C}P^\infty \simeq MU_1 \rightarrow \Sigma^2 MU$ переводит β_i в β'_{i-1} , $i \geq 1$. Если $\beta' = 1 + \beta'_1 + \beta'_2 + \dots$, то коумножение задается формулой

$$\Psi_{MU}(\beta'_k) = \sum_{i+l=k} (\beta'_i)_{\#}^{i+1} \otimes \beta'_l, \quad k \geq 0.$$

Антиавтоморфизм s определяется как $s(\beta'_k) = m_k$, где $x = \sum_{i \geq 0} m_i u^{i+1}$ — формальный степенной ряд, обратный ряду $u = \sum_{k \geq 0} \beta'_k x^{k+1}$. Пополнение e задается правилом

$$e(1) = 1, \quad e(\beta'_i) = 0, \quad i \geq 1.$$

Гомоморфизм η_L определяется формулой

$$\eta_L(a) = a \cdot 1$$

для всех $a \in \tilde{MU}_*(S^0)$.

Доказательство. Первые два утверждения — это в точности теорема 16.39. Отображения

$$\eta_R: MU \simeq S^0 \wedge MU \xrightarrow{1 \wedge 1} MU \wedge MU$$

и

$$\eta_L: MU \simeq MU \wedge S^0 \xrightarrow{1 \wedge 1} MU \wedge MU$$

индуцируют естественные преобразования

$$\eta_R, \eta_L: MU_*(-) \rightarrow (MU \wedge MU)_*(-)$$

и

$$\bar{\eta}_R, \bar{\eta}_L: MU^*(-) \rightarrow (MU \wedge MU)^*(-).$$

¹⁾ См. предложение 16.30. — Прим. ред.

На самом деле, $\bar{\eta}_R$ — это отображение Бордмана, следовательно, как и в пп. 13.77 и далее, мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} MU^*(X) & \xrightarrow{\bar{\eta}_R} & (MU \wedge MU)^*(X) \\ \alpha \searrow & & \swarrow \rho \\ \text{Hom}_{\widetilde{MU}_*(S^0)}(MU_*(X), MU_*(MU)) & & \end{array}$$

Пусть $X = \mathbb{C}P^\infty$ и

$$y^R = \bar{\eta}_R(y), \quad y^L = \bar{\eta}_L(y) \in (MU \wedge MU)^*(\mathbb{C}P^\infty)^1,$$

$$\beta_i^R = \eta_R(\beta_i), \quad \beta_i^L = \eta_L(\beta_i) \in (MU \wedge MU)_*(\mathbb{C}P^\infty).$$

Равенство $f_*(\beta_i) = \beta'_{i-1}$, $i \geq 1$, можно интерпретировать как

$$17.17. \quad y^R = \bar{\eta}_R[f] = \sum_{i \geq 0} \beta'_i (y^L)^{i+1}.$$

Подводя (17.17) в k -ю степень, мы найдем, что

$$(y^R)^k = \sum_{i \geq k} (\beta'_i)^k_{2(i-k)} \cdot (y^L)^i.$$

Гомоморфизм $\psi_{\mathbb{C}P^\infty}$ — это композиция

$$MU_*(\mathbb{C}P^\infty) \xrightarrow{\eta_L} (\widetilde{MU} \wedge \widetilde{MU})_*(\mathbb{C}P^\infty) \cong MU_*(MU) \otimes_{\widetilde{MU}_*(S^0)} \widetilde{MU}_*(\mathbb{C}P^\infty).$$

Предположим, что $\psi_{\mathbb{C}P^\infty}(\beta_i) = \sum_{j=0}^i B_{i-j}^i \otimes \beta_j$, $i \geq 1$, для некоторых

коэффициентов $B_{i-j}^i \in MU_{2(i-j)}(MU)$. Формула для $\psi_{\mathbb{C}P^\infty}(\beta_i)$ эквивалентна равенству

$$\beta_i^L = \sum_{j=0}^i B_{i-j}^i \beta_j^R.$$

Взяв произведение Кронекера, мы получим

$$B_{i-k}^i = \left\langle (y^R)^k, \sum_{j=0}^i B_{i-j}^i \beta_j^R \right\rangle = \left\langle \sum_{i \geq k} (\beta'_i)^k_{2(i-k)} (y^L)^i, \beta_i^L \right\rangle = (\beta'_i)^k_{2(i-k)}.$$

Таким образом, $\psi_{\mathbb{C}P^\infty}(\beta_i) = \sum_{j=0}^i (\beta'_i)^j_{2(i-j)} \otimes \beta_j$. Применяя к этому равенству гомоморфизм $1 \otimes f_*$ и используя естественность кодей-

¹⁾ Здесь через y обозначен гомологический класс $[f]$; см. пп. 16.27—16.30.—
Прим. ред

ствия ψ_X , мы находим, что

$$\psi_{MU}(\beta'_{i-1}) = \sum_{j=1}^i (\beta')_{2(i-j)}' \otimes \beta'_{j-1}, \quad i \geq 1.$$

Нетрудно проверить, что полученная формула эквивалентна формуле для ψ_{MU} в утверждении теоремы.

Так как $\tau \cdot \eta_R = \eta_L$, то применяя антиавтоморфизм c к формуле 17.17, мы получим

$$y^L = \sum_{i \geq 0} c\beta'_i (y^R)^{i+1}.$$

С другой стороны, по определению элементов m_i мы имеем $y^L = \sum_{i \geq 0} m_i (y^R)^{i+1}$. Следовательно, $c(\beta'_i) = m_i$ для $i \geq 0$.

Легко видеть, что для любого $x \in MU_*(MU)$ справедливо равенство $\varepsilon(x) = \langle 1, x \rangle$. Но

$$\langle 1, \beta'_i \rangle = \langle 1, f_*(\beta_{i+1}) \rangle = \langle f^*(1), \beta_{i+1} \rangle = \langle y, \beta_{i+1} \rangle = 0, \quad i \geq 1.$$

Таким образом, $\varepsilon(\beta'_i) = 0$, $i \geq 1$. Формула для гомоморфизма η_L очевидна. $\square$

Замечание 1. Формула для η_R очень сложна. Интересующийся читатель может найти ее в [7].

Замечание 2. Так как элементы m_i определяются чисто формально, то для их вычисления применяются стандартные манипуляции с формальными рядами. Предлагаем читателю доказать в качестве упражнения следующее соотношение:

$$m_i = \frac{1}{i+1} (\beta')_{2i}^{-i-1}.$$

Например,

$$m_1 = -\beta'_1,$$

$$m_2 = 2\beta'^2_1 - \beta'_2,$$

$$m_3 = -5\beta'^3_1 + 5\beta'_1\beta'_2 - \beta'_3.$$

Алгебра когомологических операций $A(MU)^* = MU^*(MU)$ была вычислена Новиковым [63] и Ландвебером [44]. Простое изложение этих результатов можно найти также в [5].

Для спектра MSp имеет место аналогичный результат.

17.18. Теорема. $MSp_*(MSp) \cong \widetilde{MSp}_*(S^0)[\sigma'_1, \sigma'_2, \dots]$, где $\Phi_*(\sigma'_i) = \sigma_i$. Стандартное отображение g , задающее z^1 , удовлетворяет условию $g_*(\sigma_i) = \sigma'_{i-1}$, $i \geq 1$. Если $\sigma' = 1 + \sigma'_1 + \sigma'_2 + \dots$, то

$$\psi_{MSp}(\sigma'_k) = \sum_{i+j=k} (\sigma')_{2i}^{j+1} \otimes \sigma'_j, \quad k \geq 0.$$

¹⁾ Элемент z определен в п. 16.34. — Прим. ред.

Антиавтоморфизм s определяется формулой $s(\sigma'_k) = n_k$, где n_k выражается через элементы σ'_k так же, как m_k через элементы β'_k . Дополнение ϵ задается правилом $\epsilon(1) = 1$, $\epsilon(\sigma'_k) = 0$, $k \geq 1$. Гомоморфизм η_L задается формулой $\eta_L(a) = a \cdot 1$ для всех $a \in \dot{M}Sp_*(S^0)$.

Замечание. Аналогичный результат существует и для спектра MO . Однако, как оказалось, $MO \simeq \bigvee_{\alpha} \Sigma^{\alpha} H(\mathbb{Z}_2)$ и поэтому

кооперации для MO несут точно такую же информацию, как и кооперации для $H(\mathbb{Z}_2)$.

Займемся теперь вычислением алгебр $K_*(K)$ и $KO_*(KO)$. Из предложения 13.49 мы знаем, что $K_q(K) \cong \operatorname{dir} \lim_n \tilde{K}_{q+2n}(BU)$, где морфизмы прямой системы имеют вид

$$\tilde{K}_{q+2n}(BU) \xrightarrow{\sigma^*} \tilde{K}_{q+2n+2}(S^2 \wedge BU) \xrightarrow{B^*} \tilde{K}_{q+2n+2}(BU).$$

Аналогично, $KO_q(KO) \cong \operatorname{dir} \lim_n \tilde{KO}_{q+8n+4}(BSp)$, где морфизмы прямой системы имеют вид

$$\tilde{KO}_{q+8n+4}(BSp) \xrightarrow{\sigma^*} \tilde{KO}_{q+8n+12}(S^8 \wedge BSp) \xrightarrow{B^*} \tilde{KO}_{q+8n+12}(BSp).$$

Мы опишем алгебру $K_*(K)$, изучая ее образ в алгебре $K_*(K) \otimes \mathbb{Q}$, которую значительно легче вычислить.

17.19. Лемма. Для любых спектров E и F отображение

$$\bigwedge \otimes 1: \pi_*(E) \otimes \pi_*(F) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \pi_*(E \wedge F) \otimes \mathbb{Q}$$

является изоморфизмом.

Доказательство. Мы будем рассматривать спектр E как фиксированный, а спектр F — как переменный. Тензорное умножение на $\mathbb{Q}$ и на $\pi_*(E) \otimes \mathbb{Q}$ сохраняет точность, поэтому $\pi_*(E) \otimes \pi_*(-) \otimes \mathbb{Q}$ и $\pi_*(E \wedge -) \otimes \mathbb{Q}$ являются теориями гомологий, а $\bigwedge \otimes 1$ — их естественным преобразованием. Это естественное преобразование является изоморфизмом для $F = S^0$, поскольку $\pi_0(S^0) = \mathbb{Z}$, а $\pi_q(S^0)$ — конечные группы для всех $q > 0$ по теореме Серра (см. [72], с. 659 и далее русского издания). Следовательно, $\bigwedge \otimes 1$ — естественная эквивалентность. $\square$

Напомним, что в силу результатов главы 13 $\pi_*(K) \cong \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ и отображение комплексификации $s: KO \rightarrow K$ переводит $\bigoplus_n \pi_{4n}(KO)$ в подгруппу $\mathbb{Z}[t^2, t^{-2}]$ группы $\pi_*(K)$.

17.20. Следствие. $K_*(K) \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}[u, v, u^{-1}, v^{-1}]$, u образ гомоморфизма

$$(s \wedge s)_* \otimes 1: KO_*(KO) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow K_*(K) \otimes \mathbb{Q}$$

равен $\mathbb{Q}[u^2, v^2, u^{-2}, v^{-2}]$.

17.21. Лемма. Для любого $q \in \mathbb{Z}$ группы $K_q(K)$ и $KO_{4q}(KO)$ не имеют кручения. Следовательно, для всех $q \in \mathbb{Z}$

$$K_q(K) \rightarrow K_q(K) \otimes \mathbb{Q}$$

и

$$KO_{4q}(KO) \rightarrow KO_{4q}(KO) \otimes \mathbb{Q}$$

— *мономорфизмы.*

Доказательство. Группы $K_{q+2n}(BU)$ и $KO_{4q+8n+4}(BSp)$ не имеют кручения в силу пп. 16.33 и 16.34. Следовательно, это же утверждение справедливо и для прямых пределов. $\square$

Таким образом, мы сможем описать алгебры $K_*(K)$ и $\bigoplus_q KO_{4q}(KO)$, если укажем, какие конечные ряды Лорана $f(u, v)$ лежат в их образах.

В качестве модели для исследования отображения Ботта

$$\underline{B}: \tilde{K}_{q+2n}(BU) \rightarrow \tilde{K}_{q+2n+2}(BU)$$

используем вычисления $H_*(K)$, проделанные в пп. 16.18 — 16.25, хотя, разумеется, в данном случае эти вычисления значительно усложнятся. Согласно предложению 16.19 отображение $\underline{B}$ обращает в нуль произведения и, следовательно, определяет гомоморфизм

$$\underline{B}: Q_q(K_*(BU)) \rightarrow Q_{q+2}(K_*(BU))$$

факторколец неразложимых элементов. Двойственными к $QK_*(BU)$ и $QKO_*(BSp)$ группами являются группы $PK^*(BU)$ и $PKO^*(BSp)$ примитивных элементов:

$$PK^*(BU) \cong \text{Hom}_{\tilde{K}_*(S^0)}(QK_*(BU), \tilde{K}_*(S^0)),$$

$$PKO^*(BSp) \cong \text{Hom}_{\widehat{KO}_*(S^0)}(QKO_*(BSp), \widehat{KO}_*(S^0)).$$

Как и прежде, можно отождествить $PK^*(BU)$ с группой A^* аддитивных нестабильных когомологических операций

$$\phi: K^0(X) \rightarrow K^*(X).$$

Группа A^* разлагается в прямую сумму вида

$$A^* = \tilde{K}_*(S^0) \oplus \tilde{A}^*.$$

Первое слагаемое в ней порождается операцией Ψ^0 , которая переводит каждое $U(n)$ -расслоение в тривиальное расслоение ε^n той же самой размерности, а второе слагаемое состоит из тех операций, которые обращаются в нуль в случае $X = \text{pt}$. Группу $\tilde{A}^*$ можно отождествить также с группой аддитивных операций

$$\tilde{\phi}: \tilde{K}^0(X) \rightarrow \tilde{K}^*(X).$$

Операция $\phi \in A^*$ полностью определяется своим значением на универсальном линейном расслоении $\gamma \rightarrow BU(1)$, и это значение может быть любым элементом из

$$K^*(BU(1)) \cong K^*(\text{pt})[[Y]].$$

Определим теперь некоторые операции, которые окажутся полезными в дальнейших вычислениях. Прежде всего, пусть ϕ^r — такая операция, что $\phi^r(\gamma) = Y^r$. Операция Ψ^{-1} , которая переводит любое виртуальное расслоение в комплексно сопряженное с ним, также лежит в A^* . Имеем $\Psi^{-1}\gamma = \bar{\gamma} = \gamma^{-1} = (1 + Y)^{-1}$.

17.22. Лемма Операция Ψ^{-1} коммутирует со всеми операциями из A^0 .

Доказательство. Пусть $\phi \in A^0$ и $\phi(\gamma) = t(Y)$ для некоторого степенного ряда f . Поскольку $\bar{\gamma}$ — линейное расслоение, то

$$\phi(\Psi^{-1}(\gamma)) = f(\bar{\gamma} - 1) = f(\Psi^{-1}(Y)).$$

С другой стороны, $\Psi^{-1}(\phi(\gamma)) = \Psi^{-1}(t(Y)) = t(\Psi^{-1}(Y))$, так как Ψ^{-1} коммутирует с суммами, произведениями и пределами. $\square$

Поскольку $\Psi^{-1} \cdot \Psi^{-1} = 1$, то операция Ψ^{-1} расщепляет A^0 в прямую сумму подгрупп, соответствующих собственным значениям $+1$ и -1 . Выберем в каждой из этих подгрупп некоторые базисные операции. Пусть S^r — операция, задаваемая формулой

$$S^r(\gamma) = (Y + \bar{Y})^r,$$

где $\bar{Y} = \Psi^{-1}(Y) = (1 + Y)^{-1} - 1$. Обозначим через A^r операцию, определяемую формулой

$$A^r(\gamma) = (Y - \bar{Y})(Y + \bar{Y})^{r-1}.$$

17.23. Лемма. Если $x \in QK_*(BU)$ и выполняется одно из условий

$$i) \langle \phi^r, x \rangle = 0 \text{ для всех } r \geq 1,$$

$$ii) \langle S^r, x \rangle = 0 = \langle A^r, x \rangle \text{ для всех } r \geq 1,$$

то $x = 0$.

Доказательство. Если выполнено условие i), то утверждение леммы очевидно. В случае ii) заметим, что

$$S^r(\gamma) = Y^{2r} + \{\text{бóльшие степени } Y\},$$

$$A^r(\gamma) = 2Y^{2r-1} + \{\text{бóльшие степени } Y\}. \square$$

Далее, отображения комплексификации $c: KO \rightarrow K$ и $c': BS\mathbb{P} \rightarrow BU$ определяют гомоморфизм

$$(c \wedge c')_*: \widehat{KO}_{4n}(BS\mathbb{P}) \rightarrow \widehat{K}_{4n}(BU).$$

Класс $Z_n \in KO_{4n}(BS\mathbb{P})$ задает элемент в $Q_{4n}(K_*(BU))$, который мы также обозначим через Z_n .

$$\mathbf{17.24. Лемма} \quad i) \langle \phi^r, Z_n \rangle = \delta'_n;$$

$$ii) \langle S^r, Z_n \rangle = 2t^{2r}\delta'_n, \quad \langle A^r, Z_n \rangle = 0, \text{ где } t \in \tilde{K}_2(S^0) \text{ — образующая.}$$

Доказательство. Утверждение i) очевидно. Так как элемент Z_n лежит в образе гомоморфизма $c: KO_*(BU) \rightarrow K_*(BU)$, то

$$\langle A^r, Z_n \rangle = \langle A^r, \Psi^{-1}Z_n \rangle = \langle \Psi^{-1}A^r, Z_n \rangle = -\langle A^r, Z_n \rangle,$$

откуда следует, что $\langle A^r, Z_n \rangle = 0$. Рассмотрим теперь коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & BU & \\ c' \nearrow & & \searrow s \\ BSp & \xrightarrow{2} & BSp, \end{array}$$

где s — симплектификация виртуальных расслоений и 2 означает $1 + 1$ в смысле суммы Уитни. Пусть $P^r \in P^{4r}(KO^*(BSp))$ — такой однозначно определенный элемент, ограничение которого на $BSp(1)$ есть $Z^r \in KO^{4r}(BSp(1))$. Образ элемента Z в группе $\tilde{K}^4(BU(1))$ равен

$$t^{-2}(\gamma + \gamma - 2) = t^{-2}(Y + \dot{Y}),$$

поэтому образ элемента Z^r в $\tilde{K}^{4r}(BU(1))$ есть $t^{-2r}(Y + \dot{Y})^r$. Отображение $s: BU \rightarrow BSp$ является H -отображением и, значит, переводит примитивные элементы в примитивные. Следовательно, образ P^r в $P^{4r}(K^*(BU))$ равен $t^{-2r}S^r$. Итак,

$$\langle S^r, (c \wedge c')_* Z_n \rangle = \langle t^{2r} c s^* P^r, c c'_* Z_n \rangle =$$

$$t^{2r} c \langle 2^* P^r, Z_n \rangle = 2 t^{2r} c \langle Z^r, Z_n \rangle = 2 t^{2r} \delta'_n. \quad \square$$

Определим теперь гомоморфизм $\bar{B}: \hat{A}^* \rightarrow \hat{A}^*$ требованием коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \tilde{K}^0(X) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{K}^0(S^2 \wedge X) \\ B\phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ \tilde{K}^*(X) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{K}^*(S^2 \wedge X) \end{array}$$

для любого $\phi \in \hat{A}^*$ и любого X . Горизонтальные стрелки в этой диаграмме — изоморфизмы периодичности. Тогда мы имеем между $\bar{B}$ и B соотношение:

$$\langle \phi, Bx \rangle = t \langle \bar{B}\phi, x \rangle, \quad x \in Q_*(K_*(BU)).$$

Доказательство этого соотношения аналогично доказательству предложения 16.21.

Заменой предложения 16.22 служат следующие вычисления для гомоморфизма $\bar{B}$.

17.25. Лемма. Если операция $\phi \in A^*$ удовлетворяет соотношению $\phi(\gamma) = f(Y)$ для некоторого формального степенного ряда f , то

$$(\bar{B}\phi)(\gamma) = (1 + Y)f'(Y) - f'(0).$$

(Здесь f' означает формальную производную степенного ряда f .)

Доказательство. Снова рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{K}^0(X) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{K}^0(S^2 \wedge X) & \longrightarrow & \tilde{K}^0(S^2 \times X) \\ B\phi \downarrow & & \downarrow \phi & & \downarrow \phi \\ \tilde{K}^*(X) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{K}^*(S^2 \wedge X) & \longrightarrow & \tilde{K}^*(S^2 \times X). \end{array}$$

Каждая горизонтальная строка в ней есть умножение на элемент $w = \eta - 1$. Как и прежде, взяв $X = BU(1)$ и применяя диаграмму к $Y = \gamma - 1$, мы получим

$$\begin{aligned} w \times (B\phi)(Y) &= \phi(w \times Y) = \phi((\eta - 1) \times (\gamma - 1)) = \\ &= \phi(\eta \times \gamma - 1 \times \gamma - \eta \times 1 + 1 \times 1) = \phi(\eta \times \gamma) - \phi(1 \times \gamma) - \phi(\eta \times 1) + \phi(1). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} w \times (B\phi)(\gamma - 1) &= f(wY + w + Y) - f(Y) - f(w) + f(0) = \\ &= w(1 + Y)f'(Y) - wf'(0). \end{aligned}$$

Здесь мы пользуемся тем фактом, что $w^2 = 0$ в $\tilde{K}^0(S^2)$. Следовательно, $(B\phi)(\gamma - 1) = (1 + Y)f'(Y) - f'(0)$. $\square$

Так как $B\Psi^{-1} = -\Psi^{-1}$, то гомоморфизм $\bar{B}$ меняет местами подгруппы, соответствующие собственным значениям $+1$ и -1 операции Ψ^{-1} . В действительности лемма 17.25 дает следующие точные формулы.

17.26. Лемма. $\bar{B}\phi^r = r\phi^r + r\phi^{r-1}$, $\bar{B}S^r = rA^r$, $\bar{B}A^r = rS^r + (4r - 2)S^{r-1}$, где, по определению, $\phi^0 = S^0 = 0$.

Доказательство. Рассматривая $\tilde{A}^*$ как факторгруппу группы A^* , мы можем пренебречь членом $f'(0)$ в лемме 17.25. Для ϕ^r мы имеем $f(Y) = Y^r$, поэтому

$$(1 + Y)f'(Y) = (1 + Y)rY^{r-1} = rY^r + rY^{r-1}.$$

Таким образом, $\bar{B}\phi^r = r\phi^r + r\phi^{r-1}$.

Далее, дифференцируя соотношение $(1 + Y)(1 + \bar{Y}) = 1$, найдем, что

$$(1 + \bar{Y}) + (1 + Y) \frac{d}{dY} \bar{Y} = 0.$$

Следовательно,

$$(1 + Y) \frac{d}{dY} (Y + \bar{Y}) = Y - \bar{Y},$$

$$(1 + Y) \frac{d}{dY} (Y - \bar{Y}) = Y + \bar{Y} + 2.$$

Кроме того, $(Y - \bar{Y})^2 = (Y + \bar{Y})^2 - 4Y\bar{Y} = (Y + \bar{Y})^2 + 4(Y + \bar{Y})$. Поскольку для S^r мы имеем $f(Y) = (Y + \bar{Y})^r$, то

$$(1 + Y)f'(Y) = r(Y + \bar{Y})^{r-1}(Y - \bar{Y}),$$

откуда вытекает, что $\bar{B}S^r = rA^r$.

Для A^r имеем $f(Y) = (Y - \bar{Y})(Y + \bar{Y})^{r-1}$, и, следовательно,

$$(1 + Y)f'(Y) = (Y + \bar{Y} + 2)(Y + \bar{Y})^{r-1} + (r-1)(Y - \bar{Y})^2(Y + \bar{Y})^{r-2} = \\ = r(Y + \bar{Y})^r + (4r-2)(Y + \bar{Y})^{r-1}$$

Таким образом, $\bar{B}A^r = rS^r + (4r-2)S^{r-1}$. $\square$

17.27. Следствие. В $QK_*(BU)$ имеют место равенства

$$\bar{B}Y_n = t(nY_n + (n+1)Y_{n+1}),$$

$$(\bar{B})^2 Z_n = n^2 t^2 Z_n + (2n+1)(2n+2)Z_{n+1}.$$

Доказательство. Первая формула немедленно следует из лемм 17.26 и 17.24, i). Из леммы 17.26 мы получаем также, что $(\bar{B})^2 S^r = r^2 S^r + 2r(r-1)S^{r-1}$ и что $(\bar{B})^2 A^r$ является линейной комбинацией операций A^r и A^{r-1} . Поэтому вторая формула следует из 17.24, ii). $\square$

17.28. Следствие. В $QK_*(BU) \otimes \mathbb{Q}$ имеют место равенства

$$t^n Y_n = \frac{1}{n!} (B-t)(B-2t) \dots (B-(n-1)t) t Y_1,$$

$$Z_n = \frac{2}{(2n)!} (B^2 - t^2)(B^2 - 2^2 t^2) \dots (B^2 - (n-1)^2 t^2) Z_1. \quad \square$$

Если мы теперь рассмотрим BU как $2n$ -й член спектра¹⁾ K , а BSp — как $(8n+4)$ -й член спектра KO , то получим гомоморфизмы

$$\iota_n: \tilde{K}_{2q}(BU) \rightarrow K_{2q-2n}(K),$$

$$\kappa_n: \widehat{KO}_{4q+4}(BSp) \rightarrow KO_{4q-8n}(KO)$$

и $(c \wedge c)_* \circ \kappa_n = \iota_{4n+2} \circ (c \wedge c')_*: KO_q(BSp) \rightarrow K_{q-8n-4}(K)$.

17.29. Лемма. Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \tilde{K}_{2q}(BU) & \xrightarrow{\iota_n} & K_{2q-2n}(K) \\ B \downarrow & & \downarrow v \\ \tilde{K}_{2q+2}(BU) & \xrightarrow{\iota_n} & K_{2q-2n+2}(K), \end{array}$$

в которой элемент $v \in K_2(K)$ равен $\eta_R(t)$, коммутативна.

¹⁾ Точнее, $2n$ -м членом спектра K является $Z \times BU$, но во все дальнейшие рассуждения легко внести соответствующие поправки. — Прим. ред.

Доказательство. Для доказательства нужно взять класс $[f] \in \tilde{K}_{2q}(BU)$, выписать представители для элементов $v \cdot \iota_n[f]$ и $\iota_n B[f]$ и убедиться, что они совпадают. $\square$

Обозначим $\iota_n(Y_q)$ через Y_q^n и $\iota_n(Z_q)$ через Z_q^n . Тогда из леммы 17.29 следует, что $Y_q^n = v^{-n} Y_q^0$, $Z_q^{4n+2} = v^{-4n} Z_q^2$.

17.30. Предложение. В $K_*(K) \otimes \mathbb{Q}$ имеют место равенства

$$u^n Y_n^n = p'_n(u, v) = \frac{1}{n!} v(v-u)(v-2u) \dots (v-(n-1)u), \quad n \geq 1,$$

$$Z_{n+1}^2 = q'_n(u, v) = \frac{2}{(2n+2)!} (v^2 - u^2)(v^2 - 2^2 u^2) \dots (v^2 - n^2 u^2), \quad n \geq 0.$$

Доказательство. Немедленно следует из следствия 17.28 и леммы 17.29, если заметить, что умножение на t в $\tilde{K}_*(BU)$ переходит в умножение на $u = \eta_L(t)$ в $K_*(K)$. Элемент $tY_1 \in \tilde{K}_2(\mathbb{C}P^1)$ является образующим, поэтому $\iota_0(tY_1) = v$. Аналогично, элемент $Z \in \tilde{K}\tilde{O}_4(\mathbb{C}P^1)$ является образующим, поэтому $\iota_2(Z_1) = 1 \in K_0(K)$. $\square$

17.31. Так как $Q\tilde{K}_*(BU)$ является свободным $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -модулем с базисом $\{Y_1, Y_2, \dots\}$, то очевидно, что элементы Y_q^n порождают $K_*(K)$ над $\mathbb{Z}[u, u^{-1}]$. Но $Y_q^n = v^{-n} Y_q^0$, следовательно, полиномы $p'_n(u, v)$ порождают $K_*(K)$ над $\mathbb{Z}[u, u^{-1}, v^{-1}]$. Итак, мы описали образ $K_*(K)$ в $K_*(K) \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}[u, v, u^{-1}, v^{-1}]$. Аналогично, образ $\bigoplus_n Q_{4n} \tilde{K}\tilde{O}_*(BSp)$ в $Q\tilde{K}_*(BU)$ является свободным $\mathbb{Z}[t^4, 2t^2, t^{-4}]$ -модулем с базисом $\{Z_1, Z_2, \dots\}$. Поэтому образ $\bigoplus_n KO_{4n}(KO)$ в $K_*(K) \otimes \mathbb{Q}$ порождается над $\mathbb{Z}[u^4, 2u^2, u^{-4}, v^{-4}]$ полиномами $q'_n(u, v)$, $n \geq 0$.

Сказанное в п. 17.31 дает полное описание алгебр $K_*(K)$ и $KO_{4n}(KO)$. Однако можно дать и более удобное описание их элементов. В теореме 17.34 мы приводим полную характеристику тех полиномов Лорана, которые лежат в $K_*(K)$ или $KO_{4n}(KO)$; доказательство этой теоремы опирается на две следующие леммы.

17.32. Лемма. Пусть $f(t) \in \mathbb{Q}[t]$ — такой полином, что $f(k) \in \mathbb{Z}$ для всех целых k . Тогда f можно представить в виде целочисленной линейной комбинации биномиальных полиномов

$$p_n(t) = \frac{1}{n!} t(t-1)(t-2) \dots (t-(n-1)), \quad n \geq 0$$

(p_0 , по определению, равен 1). Если, кроме того, полином f удовлетворяет условию $f(-t) = f(t)$, то его можно представить в виде целочисленной линейной комбинации 1 и полиномов

$$q_n(t) = \frac{2}{(2n)!} t^2(t^2-1^2)(t^2-2^2) \dots (t^2-(n-1)^2), \quad n \geq 1.$$

(Заметим, что мы должны были бы интерпретировать q_0 как 2, но мы не будем рассматривать q_0 .)

Доказательство. Ясно, что полиномы p_n удовлетворяют условию $p_n(k) \in \mathbb{Z}$ для всех $k \in \mathbb{Z}$. Поскольку $q_n(t) = 2p_{2n}(t+n) - p_{2n-1}(t+n-1)$, то полиномы q_n также удовлетворяют этому условию. Кроме того, очевидно, что $q_n(-t) = q_n(t)$, $n \geq 1$. Мы докажем лишь второе утверждение леммы; первое утверждение доказывается аналогично и проще. Доказательство поведем индукцией по степени полинома f . Если $\deg f = 0$, утверждение очевидно. Предположим, что лемма справедлива для всех полиномов степени $\leq 2(d-1)$.

Пусть $f(t)$ — полином степени $\leq 2d$, такой, что $f(k) \in \mathbb{Z}$ для всех $k \in \mathbb{Z}$ и $f(-t) = f(t)$. Определим полином $\delta^2 f$, полагая

$$(\delta^2 f)(t) = f(t+1) - 2f(t) + f(t-1).$$

Тогда $\delta^2 f$ также удовлетворяет условиям леммы 17.32. Кроме того, легко видеть, что $\deg \delta^2 f \leq 2(d-1)$, поэтому по предположению индукции

$$(\delta^2 f)(t) = n_0 + \sum_{r \geq 1} n_r q_r(t)$$

для некоторых целых коэффициентов $n_0, n_1, \dots$. Так как $n_0 = (\delta^2 f)(0) = 2(f(1) - f(0))$, то число n_0 четно. Поскольку

$$\delta^2 q_n = q_{n-1}, \quad n \geq 2, \quad \delta^2 q_1 = 2,$$

то взяв

$$g(t) = (n_0/2)q_1 + \sum_{r \geq 1} n_r q_{r+1}(t),$$

мы получим, что $g(-t) = g(t)$ и $\delta^2 g = \delta^2 f$. Таким образом, обязательно $f(t) = a \cdot 1 + bt + g(t)$ для некоторых $a, b \in \mathbb{Q}$. Но разность $f(t) - g(t)$ четна, следовательно, $b = 0$. Кроме того, $a = f(0) \in \mathbb{Z}$. Это доказывает, что полином f имеет требуемый вид. $\square$

17.33. Лемма. i) Пусть $f(u, v)$ — полином Лорана из $\mathbb{Q}[u, u^{-1}, v, v^{-1}]$, который удовлетворяет условию

$$f(ht, kt) \in \mathbb{Z}\left[t, t^{-1}, \frac{1}{hk}\right]$$

для всех ненулевых целых чисел h, k . Тогда $f(u, v)$ можно представить в виде $\mathbb{Z}[u, u^{-1}, v^{-1}]$ -линейной комбинации полиномов

$$p'_n(u, v) = \frac{1}{n!} v(v-u)(v-2u) \dots (v-(n-1)u), \quad n \geq 1.$$

ii) Пусть $f(u, v)$ — полином Лорана из $\mathbb{Q}[u, u^{-1}, v, v^{-1}]$, удовлетворяющий условиям

$$f(-u, v) = f(u, v) = f(u, -v),$$

$$f(hu, kt) \in \mathbb{Z}\left[t^4, 2t^2, t^{-4}, \frac{1}{hk}\right], \quad h, k \in \mathbb{Z} - \{0\}.$$

Тогда $f(u, v)$ можно представить в виде $\mathbb{Z}[u^4, 2u^2, u^{-4}, v^{-4}]$ -линейной комбинации полиномов

$$q'_n(u, v) = \frac{2}{(2n+2)!} (v^2 - u^2)(v^2 - 2^2 u^2) \dots (v^2 - n^2 u^2), \quad n \geq 0.$$

Доказательство. Мы докажем утверждение ii); утверждение i) доказывается так же. Из равенств $f(-u, v) = f(u, v) = f(u, -v)$ вытекает, что f — полином Лорана от переменных u^2 и v^2 . Разлагая $f(u, v)$ в сумму однородных составляющих, мы видим, что достаточно рассмотреть случай, когда f однороден. Итак, пусть f — однородный полином степени $2r$. Если r четно, положим $f'(u, v) = u^{-2r} f(u, v)$; если же r нечетно, положим $f'(u, v) = (u^{-2r}/2) f(u, v)$. Тогда f' — однородный полином степени 0 и мы имеем

$$f'(u, v) = g(u^{-1}v)$$

для некоторого $g(w) \in \mathbb{Q}[w^2, w^{-2}]$. Полином Лорана g имеет лишь конечное число коэффициентов; пусть m — максимальный из показателей степеней, с которыми каждое простое число входит в знаменатели всех этих коэффициентов. Умножая g на подходящую положительную степень монома $w^4 = u^{-4}v^4$, мы видим, что достаточно рассмотреть случай, когда g делится на w и w^m . В частности, тогда $g(0) = 0$. Для любого целого числа $k \neq 0$ имеем $g(k) = f'(t, kt)$. Пусть p — некоторое простое число, делящее k . Тогда, по построению, p не входит в знаменатель числа $g(k)$. Если же простое число p не делит k , то $g(k) = f'(t, kt)$ по условию лежит в $\mathbb{Z}[1/k]$. Значит, и в этом случае p не входит в знаменатель числа $g(k)$. Итак, $g(k) \in \mathbb{Z}$. Следовательно, полином g удовлетворяет условиям леммы 17.32, и поэтому $f'(u, v) = g(u^{-1}v)$ может быть представлен в виде целочисленной линейной комбинации полиномов $1 = q'_0$ и

$$q_n(u^{-1}v) = \frac{2}{(2n)!} u^{-2n} v^2 (v^2 - u^2)(v^2 - 2^2 u^2) \dots (v^2 - (n-1)^2 u^2).$$

Но мы можем записать

$$\begin{aligned} q_{2n}(u^{-1}v) &= u^{-4n} \{ (4n+2)(4n+1) q'_{2n}(u, v) + 4n^2 u^2 q'_{2n-1}(u, v) \}, \\ q_{2n-1}(u^{-1}v) &= u^{-4n} \{ 4n(4n-1) u^2 q'_{2n-1}(u, v) + \\ &\quad (2n-1)^2 u^4 q'_{2n-2}(u, v) \}, \end{aligned}$$

что и завершает доказательство леммы. $\square$

Комбинируя п. 17.31 с леммой 17.33, мы получаем нашу основную теорему.

17.34. Теорема. i) Образ алгебры $K_*(K)$ в $K_*(K) \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}[u, v, u^{-1}, v^{-1}]$ состоит в точности из таких полиномов Лорана $f(u, v)$, что

$$f(ht, kt) \in \mathbb{Z} \left[t, t^{-1}, \frac{1}{hk} \right]$$

для всех $h, k \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

ii) Образ алгебры $\bigoplus_n KO_{4n}(KO)$ в $K_*(K) \otimes \mathbb{Q}$ состоит в точности из таких полиномов Лорана $f(u, v)$, что

$$f(-u, v) = f(u, v) = f(u, -v)$$

и

$$f(ht, kt) \in \mathbb{Z} \left[t^4, 2t^2, t^{-4}, \frac{1}{hk} \right]$$

для всех $h, k \in \mathbb{Z} - \{0\}$. $\square$

Алгебра $KO_*(KO)$ является модулем над $\widetilde{KO}_*(S^0)$, поэтому определено отображение

$$\rho: \widetilde{KO}_q(S^0) \otimes KO_0(KO) \rightarrow KO_q(KO), \quad q \in \mathbb{Z},$$

задающее эту модульную структуру.

17.35. Теорема. Отображение ρ является изоморфизмом для любого q . Более подробно

$$KO_q(KO) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2 \otimes KO_0(KO), & q \equiv 1, 2 \pmod{8}, \\ 0, & q \equiv 3, 5, 6, 7 \pmod{8}. \end{cases}$$

Доказательство. Если $q \equiv 0 \pmod{4}$, то утверждение немедленно следует из теоремы 17.34. Покажем, что $\rho: \widetilde{KO}_q(S^0) \otimes KO_0(KO) \rightarrow KO_q(KO)$ — эпиморфизм. Каждый элемент из $\widetilde{KO}_q(BSp)$ можно представить в виде $ax + by$ для некоторых $y \in \widetilde{KO}_4(BSp)$, $a, b \in \widetilde{KO}_*(S^0)$, $x \in \widetilde{KO}_0(BSp)$. Переходя к прямому пределу, находим, что такое же утверждение справедливо и для элементов $KO_q(KO)$. В силу замечания, сделанного в начале доказательства этой теоремы, элемент y можно записать в виде $y = cz$, $c \in \widetilde{KO}_4(S^0)$, $z \in KO_0(KO)$. Это показывает, что $\widetilde{KO}_q(S^0) \otimes KO_0(KO) \rightarrow KO_q(KO)$ — эпиморфизм. Следовательно, мы доказали теорему для всех случаев, исключая $q \equiv 1, 2 \pmod{8}$.

Для того чтобы доказать мономорфность ρ в случае, когда $q \equiv 1, 2 \pmod{8}$, мы должны более подробно описать отображение

$$\kappa_n: \widetilde{KO}_q(BSp) \rightarrow KO_{q-8n-4}(KO).$$

Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{KO}_q(BSp) & \xrightarrow{B_0} & \widetilde{KO}_{q+8}(BSp) \\ \downarrow (c \wedge c')_* & & \downarrow (c \wedge c')_* \\ \widetilde{K}_q(BU) & \xrightarrow{B^4} & \widetilde{K}_{q+8}(BU) \end{array}$$

коммутативна, поэтому из следствия 17.27 мы получаем, что

$$B_0 Z_n = n^4 y Z_n + \{n^2 + (n+1)^2\} \binom{2n+2}{2} x Z_{n+1} + 4! \binom{2n+4}{4} Z_{n+2}.$$

Здесь символом x обозначена образующая группы $\pi_4(KO)$ (которая отображается при комплексификации в элемент $2t^2 \in \pi_4(K)$), а символом y — образующая группы $\pi_8(KO)$ (которая отображается при комплексификации в элемент $t^4 \in \pi_8(K)$). Следовательно, если α — ненулевой элемент из $\tilde{KO}_q(S^0) \cong \mathbb{Z}_2$ ($q \equiv 1, 2 \pmod{8}$), то

$$B_0(\alpha Z_n) = n^4 \alpha y Z_n = \begin{cases} \alpha y Z_n, & n \text{ нечетно,} \\ 0, & n \text{ четно,} \end{cases}$$

поскольку $\alpha x = 0 = 2\alpha$. Таким образом, выражение $B_0\left(\sum_{k \geq 0} n_k \alpha y^{n-k} Z_{2k+1}\right)$ с целыми коэффициентами n_k обращается в нуль тогда и только тогда, когда $n_k \equiv 0 \pmod{2}$, $k \geq 0$. Переходя к пределу, мы находим, что

$$\kappa_n\left(\sum_{k \geq 0} n_k \alpha y^{n-k} Z_{2k+1}\right) = 0$$

тогда и только тогда, когда $n_k \equiv 0 \pmod{2}$, $k \geq 0$.

Предположим теперь, что $\rho(\alpha \otimes f) = 0$ для некоторого $f \in KO_0(KO)$. Тогда мы можем представить элемент f в виде

$$f = \kappa_n\left(\sum_{k \geq 0} n_k y^{n-k} Z_{2k+1} + \sum_{k \geq 1} n'_k x y^{n-k} Z_{2k}\right).$$

Так как диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \tilde{KO}_q(S^0) \otimes Q_{8n+4} \tilde{KO}_*(BSp) & \xrightarrow{\rho} & Q_{q+8n+4} \tilde{KO}_*(BSp) \\ \downarrow 1 \otimes \kappa_n & & \downarrow \kappa_n \\ \tilde{KO}_q(S^0) \otimes KO_0(KO) & \xrightarrow{\rho} & KO_q(KO) \end{array}$$

коммутативна, то

$$0 = \rho(\alpha \otimes f) = \rho \cdot (1 \otimes \kappa_n) \left[\alpha \otimes \left(\sum_{k \geq 0} n_k y^{n-k} Z_{2k+1} + \sum_{k \geq 1} n'_k x y^{n-k} Z_{2k} \right) \right] = \kappa_n \left(\sum_{k \geq 0} n_k \alpha y^{n-k} Z_{2k+1} \right).$$

Из результатов предыдущего абзаца следует, что $n_k \equiv 0 \pmod{2}$, $k \geq 0$. Но в $K_*(K) \otimes \mathbb{Q}$ элемент $\kappa_n\left(\sum_{k \geq 1} n'_k x y^{n-k} Z_{2k}\right)$ соответствует сумме

$$\sum_{k \geq 1} 2n'_k u^{4n-4k+2} v^{-4n} q'_{2k-1}(u, v) = \sum_{k \geq 1} 2n'_k (u^{-1}v)^{-4n-2} q_{2k}(u^{-1}v).$$

Это показывает, что f делится на 2 в $KO_0(KO)$ и поэтому $\alpha \otimes f = 0$. Следовательно, ρ — мономорфизм. $\square$

17.36. Упражнение. Показать, что ряд $f(u, v)$ представляет 0 в $\mathbb{Z}_2 \otimes KO_0(KO)$ тогда и только тогда, когда $f(h, k) \in 2\mathbb{Z}[1/hk]$ для всех нечетных целых чисел h, k .

17.37. Теорема. Структурные отображения алгебр $K_*(K)$ и $KO_*(KO)$ задаются следующими формулами:

$$i) \psi(u) = u \otimes 1, \psi(v) = 1 \otimes v;$$

$$ii) \varepsilon(u) = t = \varepsilon(v);$$

$$iii) c(u) = v, c(v) = u;$$

$$iv) \text{ если элемент } \alpha \in \widetilde{KO}_1(S^0) \text{ не равен нулю, то } \eta_R(\alpha) = \eta_L(\alpha).$$

Доказательство. Пусть $1: S^0 \rightarrow K$ — единица. Мы знаем, что группа $\pi_1(S^0) \cong \mathbb{Z}_2$ порождается отображением Хопфа η , причем $\iota_*(\eta) = \alpha$; другими словами, на основании следствия 17.14

$$\alpha \in \text{im}[h: \pi_1(S^0) \rightarrow \widetilde{KO}_1(S^0)] \subset P\widetilde{KO}_1(S^0).$$

Свойство 17.8, x) означает, что отображение ψ_{S^0} есть в точности

$$\eta_L: \widetilde{KO}_*(S^0) \rightarrow KO_*(KO) \cong KO_*(KO) \otimes_{\widetilde{KO}_*(S^0)} \widetilde{KO}_*(S^0).$$

Следовательно, поскольку элемент α примитивен, мы имеем $\eta_L(\alpha) = 1 \otimes \alpha = 1 \cdot \alpha \otimes 1 = \eta_R(\alpha)$, что доказывает утверждение iv).

По определению $u = \eta_L(t)$, $v = \eta_R(t)$; поэтому в силу теоремы 17.8, iv) имеют место равенства $\psi u = \psi \eta_L(t) = \eta_L(t) \otimes 1 = u \otimes 1$ и $\psi v = \psi \eta_R(t) = 1 \otimes \eta_R(t) = 1 \otimes v$. Согласно теореме 17.8 $c \cdot \eta_R = \eta_L$ и $c \cdot \eta_L = \eta_R$, откуда следует, что $c(u) = v$ и $c(v) = u$. Аналогично, $\varepsilon \cdot \eta_R = 1 = \varepsilon \cdot \eta_L$, т. е. $\varepsilon(u) = t = \varepsilon(v)$. $\square$

Теперь мы имеем полную информацию об алгебрах Хопфа $K_*(K)$ и $KO_*(KO)$. Выведем из нее некоторые следствия.

В следствии 17.14 мы показали, что $\text{im}[h: \pi_*(X) \rightarrow E_*(X)] \subset P(E_*(X))$; например, $h: \pi_*(MU) \rightarrow P(K_*(MU))$. Зная алгебры $K_*(K)$ и $K_*(MU) \cong \widetilde{K}_*(S^0)[Y'_1, Y'_2, \dots]$, можно попытаться вычислить $P(K_*(MU))$. Отображение $f: \mathbb{C}P^\infty \simeq MU_1 \rightarrow \Sigma^2 MU$ переводит $t^i Y_i \in K_{2i}(\mathbb{C}P^\infty)$ в $Y'_{i-1} \in K_{2i-2}(MU)$. С другой стороны, отображение $\mathbb{C}P^\infty \simeq BU(1) \rightarrow BU \xrightarrow{\iota} K$ переводит $t^i Y_i$ в $r'_i \in K_*(K)$.

Из результатов главы 16 известно, что любое $U(n)$ -расслоение ориентируемо относительно K ; в частности, существует универсальный класс Тома $t \in K^0(MU)$, который можно рассматривать как отображение спектров $\mu: MU \rightarrow K$. Это отображение задает естественное преобразование

$$\mu: MU_* \rightarrow K_*$$

теорий гомологий, а также естественное преобразование теорий когомологий. Из определения отображения μ следует, что

$$\mu: MU_*(\mathbb{C}P^\infty) \rightarrow K_*(\mathbb{C}P^\infty)$$

отображает β_i в $t^i Y_i$; значит,

$$\mu: MU_*(MU) \rightarrow K_*(MU)$$

отображает β'_i в Y'_i . Рассмотрим гомотопически коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^2 MU & \xrightarrow{\Sigma^2 \mu} & \Sigma^2 K \\ \uparrow i & & \uparrow i_1 \\ MU_1 & \simeq BU(1) \subset & BU, \end{array}$$

где BU интерпретируется как K_2 . Из этой диаграммы следует, что гомоморфизм $\mu_*: K_*(MU) \rightarrow K_*(K)$ переводит Y'_i в

$$i_{1*}(t^{i+1}Y_{i+1}) = \frac{(v-u)(v-2u)\dots(v-iu)}{(i+1)!}.$$

Положим

$$p_n = \frac{(v-u)(v-2u)\dots(v-nu)}{(n+1)!} \in K_{2n}(K).$$

Тогда ясно, что гомоморфизм

$$(\mu \wedge \mu)_* = \mu_* \circ \mu: MU_*(MU) \rightarrow K_*(K)$$

переводит β'_i в p_i , $i \geq 1$.

Теперь нетрудно видеть, что μ коммутирует с отображениями ψ : это означает, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} MU_*(X) & \xrightarrow{\mu\psi_X} & MU_*(MU) \otimes_{\tilde{M}U_*(S^0)} MU_*(X) \\ \downarrow \mu & & \downarrow (\mu \wedge \mu)_* \otimes \mu \\ K_*(X) & \xrightarrow{\kappa\psi_X} & K_*(K) \otimes_{\tilde{K}_*(S^0)} K_*(X) \end{array}$$

коммутативна. Взяв $X = MU$ и применяя теорему 17.16, мы получаем следующее утверждение.

17.38. Предложение. Действие ψ_{MU} на $K_*(MU)$ задается формулой

$$\psi_{MU}(Y'_k) = \sum_{i+j=k} (P^{j+1})_{2i} \otimes Y'_i, \quad k \geq 0,$$

где $P = 1 + p_1 + p_2 + \dots$. Следовательно, действие $\psi_{\mathbb{C}P^\infty}$ на $K_*(\mathbb{C}P^\infty)$ имеет вид

$$\psi_{\mathbb{C}P^\infty}(t^k Y_k) = \sum_{i+j=k} (P^j)_{2i} \otimes t^j Y_j, \quad k \geq 0.$$

17.39. Следствие. Коумножение ψ_K на элементах $p_i \in K_*(K)$ задается формулой

$$\psi_K(p_k) = \sum_{i+j=k} (P^{j+1})_{2i} \otimes p_j, \quad k \geq 0.$$

Аналогичные результаты имеют место и для спектров KO и MSp .

17.40. Предложение. Кодействие ψ_{MSp} на $KO_*(MSp)$ задается формулой

$$\psi_{MSp}(Z'_k) = \sum_{i+j=k} (Q^{j+1})_{4i} \otimes Z'_j, \quad k \geq 0,$$

где $Q = 1 + q_1 + q_2 + \dots$, $q_n = q'_n(u, v)$. Следовательно, кодействие ψ_{HP^∞} на $KO_*(HP^\infty)$ имеет вид

$$\psi_{HP^\infty}(Z_k) = \sum_{i+j=k} (Q^j)_{4i} \otimes Z_j, \quad k \geq 0.$$

17.41. Следствие. Коумножение ψ_{KO} на элементах $q_i \in KO_*(KO)$ задается формулой

$$\psi_{KO}(q_k) = \sum_{i+j=k} (Q^{j+1})_{4i} \otimes q_j, \quad k \geq 0.$$

Пусть G_n — пересечение в $K_*(MU)$ его подмодуля $K_{2n}(MU)$ с подмодулем, порожденным мономами $Y'^\alpha = Y_1'^{\alpha_1} Y_2'^{\alpha_2} \dots Y_r'^{\alpha_r}$ для $|\alpha| = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + r\alpha_r \leq n$. Тогда $h(\pi_{2n}(MU)) \subset P(K_*(MU)) \cap G_n$, поскольку $G_n = F_{2n,0} \subset K_{2n}(MU)$. Пусть $G_n \cap P(K_*(MU)) = P_{2n}$. Мы вычислим P_{2n} для малых значений n .

dim 2: Типичный элемент из G_1 имеет вид $AY'_1 + Bt$, $A, B \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$\begin{aligned} \psi_{MU}(AY'_1 + Bt) &= 1 \otimes AY'_1 + Ap_1 \otimes 1 + Bu \otimes 1 = \\ &= 1 \otimes (AY'_1 + Bt) + (A - 2B) p_1 \otimes 1. \end{aligned}$$

Этот элемент является примитивным тогда и только тогда, когда $A - 2B = 0$, поэтому произвольный элемент из P_2 имеет вид

$$B(2Y'_1 + t), \quad B \in \mathbb{Z}.$$

Вычисляя элемент $h[\mathbb{C}P^1] \in K_2(MU)$ способом, аналогичным изложенному в примере 16.4б (см. [8]), находим, что $h[\mathbb{C}P^1] = -2Y'_1 - t$. Таким образом, мы видим, что в размерности 2 $\text{im } h = P_2$.

dim 4: Типичный элемент из G_2 имеет вид $AY'_2 + BY_1'^2 + CtY'_1 + Dt^2$, где $A, B, C, D \in \mathbb{Z}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \psi_{MU}(AY'_2 + BY_1'^2 + CtY'_1 + Dt^2) &= A[1 \otimes Y'_2 + 2p_1 \otimes Y'_1 + p_2 \otimes 1] + \\ &+ B[1 \otimes Y_1'^2 + 2p_1 \otimes Y'_1 + p_1^2 \otimes 1] + C[u \otimes Y'_1 + up_1 \otimes 1] + Du^2 \otimes 1 = \\ &= 1 \otimes [AY'_2 + BY_1'^2 + CtY'_1 + Dt^2] + 2(A + B - C) p_1 \otimes Y'_1 + \\ &+ \frac{1}{12}(v - u) \{(2A + 3B - 12D)v - (4A + 3B - 6C + 12D)u\} \otimes 1. \end{aligned}$$

Этот элемент является примитивным тогда и только тогда, когда

$$A + B - C = 0,$$

$$2A + 3B - 12D = 0,$$

$$4A + 3B - 6C + 12D = 0,$$

или, другими словами, когда $A = 3C - 12D$, $B = -2C + 12D$. Поэтому произвольный элемент из P_4 имеет вид

$$C(3Y'_2 - 2Y_1'^2 + tY'_1) + D(-12Y'_2 + 12Y_1'^2 + t^2), \quad C, D \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, мы видим, что P_4 порождается элементами

$$3Y'_2 - 2Y_1'^2 + tY'_1, \quad 4Y_1'^2 + 4tY'_1 + t^2 = (2Y'_1 + t)^2$$

или же элементами

$$3Y'_2 - 6Y_1'^2 - 3tY'_1 - t^2 = -h[\mathbb{D}P^2], \quad (2Y'_1 + t)^2 = h[\mathbb{C}P^1]^2.$$

После всего сказанного можно предположить, что

i) $[\mathbb{C}P^i]$ могут быть выбраны в качестве полиномиальных образующих для Ω_*^U , $i \geq 1$ и

ii) $h: \pi_*(MU) \rightarrow P(K_*(MU))$ — изоморфизм.

Однако дальнейшие вычисления показывают, что эти предположения несовместимы. Именно, в P_6 имеется новая полиномиальная образующая вида $2Y'_2 + \{\text{разложимые элементы}\}$, в то время как из примера 16.46 следует, что $h[\mathbb{C}P^3] = -4Y'_2 + \{\text{разложимые элементы}\}$.

Вычислим теперь $PKO_*(MSp)$ в нескольких низших размерностях. Как и ранее, обозначим через G_n пересечение подмодуля $KO_{4n}(MSp)$ с подмодулем, порожденным мономами $Z'^{\alpha} = \bar{Z}'^{\alpha_1} Z'^{\alpha_2} \dots Z'^{\alpha_r}$ с $|\alpha| = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + r\alpha_r \leq n$, и пусть $P_k = P(KO_k(MSp)) \cap G_n$ для $4n \leq k \leq 4n + 3$.

dim 1: Согласно теореме 17.37, iv) имеет место равенство $\eta_R(\alpha) = \eta_L(\alpha)$, где $\alpha \in \widehat{KO}_1(S^0) \cong \mathbb{Z}_2$ — ненулевой элемент. Пересечение $G_0 \cap KO_1(MSp)$ изоморфно группе $\mathbb{Z}_2$ и порождается элементом $\alpha \cdot 1$, так что мы получаем

$$\psi_{MSp}(\alpha \cdot 1) = \alpha(1 \otimes 1) = \eta_L(\alpha) \otimes 1 = \eta_R(\alpha) \otimes 1 = 1 \otimes \alpha \cdot 1.$$

Следовательно, элемент $\alpha \cdot 1$ примитивен, и поэтому $P_1 \cong \mathbb{Z}_2$ порождается элементом α .

Далее, имеется отображение $\pi_1^S \cong \Omega_1^{tr} \rightarrow \Omega_1^{Sp}$. Так как образ ненулевого элемента $[\eta] \in \pi_1^S$ в $\widehat{KO}_1(S^0)$ равен α , то в размерности 1 $\text{im } h = P_1$. В качестве представителя для ненулевого элемента из Ω_1^{Sp} можно взять окружность S^1 со стабильным нормальным расслоением $\omega \otimes \mathbb{H}$ (где $\omega \rightarrow S^1 \cong \mathbb{R}P^1$ — расслоение Хопфа).

dim 2: Пересечение $G_0 \cap KO_2(MSp) = \mathbb{Z}_2$ порождается элементом $\alpha^2 \cdot 1$, и $\psi_{MSp}(\alpha^2 \cdot 1) = 1 \otimes \alpha^2 \cdot 1$. Поэтому $P_2 \cong \mathbb{Z}_2$ порождается элементом $\alpha^2 = h[S^1]^2$.

dim 3: $KO_3(MSp) = 0$, поэтому $P_3 = 0$.

dim 4: Для образующей $x \in \widehat{KO}_4(S^0)$ имеем

$$\psi_{MSp}(x \cdot 1) = x \cdot (1 \otimes 1) = x \cdot 1 \otimes 1 = 2u^2 \otimes 1$$

(элемент x отображается в $2u^2 \in KO_*(KO) \subset \mathbb{C}[u, v, u^{-1}, v^{-1}]$). Типичный элемент из $G_1 \cap KO_4(MSp)$ имеет вид $AZ'_1 + Bx$, $A, B \in \mathbb{Z}$, так что

$$\begin{aligned} \psi_{MSp}(AZ'_1 + Bx) &= 1 \otimes AZ'_1 + Aq_1 \otimes 1 + 2Bu^2 \otimes 1 = \\ &= 1 \otimes (AZ'_1 + Bx) + (A - 24B)q_1 \otimes 1. \end{aligned}$$

Этот элемент примитивен тогда и только тогда, когда $A - 24B = 0$, поэтому $P_4 \cong \mathbb{Z}$ порожден элементом $24Z'_1 + x$.

dim 5: Пересечение $G_4 \cap KO_5(MSp) \cong \mathbb{Z}_2$ порождается элементом $\alpha Z'_1$ и

$$\psi(\alpha Z'_1) = \alpha(1 \otimes Z'_1 + q_1 \otimes 1) = 1 \otimes \alpha Z'_1 + \alpha q_1 \otimes 1.$$

Из теоремы 17.35 и примера 17.36 следует, что $\alpha q_1 = 0$ для $q'_1(h, k) \in 2\mathbb{Z}[1/hk]$ и любых нечетных h, k . Поэтому $\alpha Z'_1$ примитивен и порождает $P_5 \cong \mathbb{Z}_2$.

dim 6: Аналогично предыдущему случаю, $P_6 \cong \mathbb{Z}_2$ порождается элементом $\alpha^2 Z'_1$.

dim 7: $KO_7(MSp) = 0$, поэтому $P_7 = 0$.

dim 8: $\psi_{MSp}(AZ'_1 + BZ'_1{}^2 + CxZ'_1 + Dy) =$

$$\begin{aligned} &1 \otimes AZ'_1 + 2Aq_1 \otimes Z'_1 + Aq_2 \otimes 1 + 1 \otimes BZ'_1{}^2 + 2Bq_1 \otimes Z'_1 + \\ &+ Bq_1^2 \otimes 1 + 2Cu^2 \otimes Z'_1 + 2Cu^2q_1 \otimes 1 + Du^4 \otimes 1. \end{aligned}$$

Для того чтобы упростить это выражение, воспользуемся соотношением $2u^2q_1 = 8q_1^2 - 20q_2$. В результате получим

$$\begin{aligned} \psi_{MSp}(AZ'_1 + BZ'_1{}^2 + CxZ'_1 + Dy) &= 1 \otimes (AZ'_1 + BZ'_1{}^2 + CxZ'_1 + Dy) - \\ &- 2Cv \otimes Z'_1 - Dv^4 \otimes 1 + 2Aq_1 \otimes Z'_1 + Aq_2 \otimes 1 + 2Bq_1 \otimes Z'_1 + Bq_1^2 \otimes 1 + \\ &+ 2Cu^2 \otimes Z'_1 + 8Cq_1^2 \otimes 1 - 20Cq_2 \otimes 1 + Du^4 \otimes 1 = \\ &= 1 \otimes (AZ'_1 + BZ'_1{}^2 + CxZ'_1 + Dy) + (2A + 2B - 24C)q_1 \otimes Z'_1 + \\ &+ \{(A - 20C + 240D)q_2 + (B + 8C - 240D)q_1^2\} \otimes 1. \end{aligned}$$

Этот элемент примитивен тогда и только тогда, когда

$$2A + 2B - 24C = A - 20C + 240D = B + 8C - 240D = 0$$

или, другими словами, если

$$A = 20C - 240D, \quad B = -8C + 240D.$$

Таким образом, $P_8 \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ и порождается элементами

$$20Z'_1 - 8Z'_1{}^2 + xZ'_1, \quad -240Z'_1 + 240Z'_1{}^2 + y,$$

или, эквивалентно, элементами

$$20Z'_1 - 8Z'_1{}^2 + xZ'_1,$$

$$144Z'_1{}^2 + 12xZ'_1 + y = \frac{1}{4}(24Z'_1 + x)^2.$$

$\dim 9: G_2 \cap KO_9(MSp)$ порождается элементами $\alpha Z'_2, \alpha Z'_1{}^2$ и $\alpha y \cdot 1$. Находим

$$\psi_{MSp}(\alpha Z'_2) = 1 \otimes \alpha Z'_2 + \alpha q_2 \otimes 1,$$

$$\psi_{MSp}(\alpha Z'_1{}^2) = 1 \otimes \alpha Z'_1{}^2,$$

$$\psi_{MSp}(\alpha y \cdot 1) = \alpha u^4 \otimes 1 = 1 \otimes \alpha y - \alpha(v^4 - u^4) \otimes 1 = 1 \otimes \alpha y,$$

так как $v^4 - u^4 = 240(q_1^2 - q_2)$.

Далее, $\alpha q_2 \neq 0$, поскольку

$$q'_2(1, 3) = \frac{1}{360}(9-1)(9-4) = \frac{1}{9} \notin 2\mathbb{Z}\left[\frac{1}{3}\right].$$

Следовательно, $P_9 \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ порождается элементами $\alpha Z'_1{}^2, \alpha y$.

$\dim 10$: Аналогичным образом $P_{10} \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ и порождается элементами $\alpha^2 Z'_1{}^2, \alpha^2 y$.

$\dim 11: KO_{11}(MSp) = 0$, поэтому $P_{11} = 0$.

Соберем наши вычисления в таблицу:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$P_n(KO_*(MSp))$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	0

Согласно следствию 17.14 для любого n имеет место включение $h(\pi_n(MSp)) \subset P_n(KO_*(MSp))$. Для $n \leq 8$ можно построить такие симплектические многообразия M^n , что $h[M^n]$ суть вычисленные выше образующие (см. [67]). Поэтому $h(\pi_n(MSp)) = P_n$, $n \leq 8$.

17.42. Упражнение. На основании замечаний, следующих за леммой 17.21, можно единственным образом определить аддитивные (нестабильные) когомологические операции $\Psi^k: K^0(X) \rightarrow K^0(X)$, $k \in \mathbb{Z}$, полагая $\Psi^k(y) = \gamma^k = (1 + Y)^k$.

а) Используя принцип расщепления (см. доказательство предложения 16.21), показать, что операции Ψ^k мультипликативны:

$$\Psi^k(xy) = \Psi^k(x) \Psi^k(y) \quad \text{для } x, y \in K^0(X).$$

б) Показать, что $\Psi^k \cdot \Psi^l = \Psi^{kl}$ для всех $k, l \in \mathbb{Z}$.

с) Вычислить Ψ^k на $K^0(S^{2n})$ для всех $k \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В главе 18 мы вычислим алгебру $E_*(E)$ для $E = H(\mathbb{Z}_2)$ и вкратце опишем $E_*(E)$ для $E = H(\mathbb{Z}_p)$, p нечетно. Затем, в двух последующих главах мы займемся приложениями этих алгебр Хопфа к некоторым фундаментальным проблемам. О применениях когомологических операций см. п. 18.24 и [62].

ССЫЛКИ НА ЛИТЕРАТУРУ

1. Адамс [5, 6, 7, 8].

2. Адамс, Харрис, Свитцер [12].

3. Ландвебер [44].

4. Мошер, Тангора [62].

5. Новиков [63].

АЛГЕБРА СТИНРОДА И ДВОЙСТВЕННАЯ
К НЕЙ АЛГЕБРА

Вычислив в предыдущей главе алгебры $E_*(E)$ для спектров $E = MU, MS_p, K$ и KO , обратимся теперь к вычислению алгебр $E_*(E)$ и $E^*(E)$ для $E = H(\mathbb{Z}_2)$. Несмотря на то, что алгебры Хопфа $H^*(H(\mathbb{Z}_2); \mathbb{Z}_2)$ и $H_*(H(\mathbb{Z}_2); \mathbb{Z}_2)$ были вычислены лет на пятнадцать раньше, чем соответствующие алгебры для других спектров, их вычисление ничуть не проще, чем, скажем, вычисление для спектра KO . Идея вычисления выглядит следующим образом: для каждого n существует расслоение $H(\mathbb{Z}_2, n-1) \rightarrow PH(\mathbb{Z}_2, n) \rightarrow H(\mathbb{Z}_2, n)$ со стягиваемым пространством расслоения $PH(\mathbb{Z}_2, n)$ (вообще, пространство путей PY стягиваемо для любого пространства Y). Поэтому в спектральной последовательности Серра этого расслоения $E_{p,q}^\infty = 0$, если $(p, q) \neq (0, 0)$. А этот факт позволяет вычислить $\tilde{H}_*(H(\mathbb{Z}_2, n); \mathbb{Z}_2)$, исходя из группы $\tilde{H}_*(H(\mathbb{Z}_2, n-1); \mathbb{Z}_2)$. Процесс вычисления начинается с $n=1$, так как $\tilde{H}_*(H(\mathbb{Z}_2, 1); \mathbb{Z}_2) \cong \tilde{H}_*(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2)$, а группу $\tilde{H}_*(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2)$ мы знаем: это векторное пространство над полем $\mathbb{Z}_2$ с базисом $\{x_i; i \geq 1\}$, $x_i \in \tilde{H}_i(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2)$. И, наконец, исходя из $\tilde{H}_*(H(\mathbb{Z}_2, n); \mathbb{Z}_2)$, найдем $H_q(H(\mathbb{Z}_2); \mathbb{Z}_2) \cong \varinjlim_n \tilde{H}_{q+n}(H(\mathbb{Z}_2, n); \mathbb{Z}_2)$. Именно так

проделал эти вычисления Картан (см. [37]), используя весьма нетривиальный аппарат гомологической алгебры. Мы изберем здесь иной подход. Прежде всего мы построим некоторые специальные когомологические операции — так называемые квадраты Стинрода Sq^i — и покажем, что они порождают алгебру $A^* = H^*(H(\mathbb{Z}_2); \mathbb{Z}_2)$. Затем будет несложно вычислить двойственную алгебру $A_* = H_*(H(\mathbb{Z}_2); \mathbb{Z}_2)$. Кроме того, мы сформулируем соответствующие результаты для спектра $H(\mathbb{Z}_p)$, где p — нечетное простое число.

Начиная с этого места, мы будем рассматривать лишь коэффициенты $\mathbb{Z}_2$. Поэтому, для краткости, будем писать H вместо $H(\mathbb{Z}_2)$ и $H^*(X, A)$ вместо $H^*(X, A; \mathbb{Z}_2)$. В одном месте нам понадобятся целочисленные когомологии, и мы обозначим их через $H^*(X, A; \mathbb{Z})$, оставляя обозначение $H^*(X, A)$ для когомологий с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$.

Идея построения квадратов Стинрода заключается в следующем. Диагональное отображение $\Delta: X \rightarrow X \times X$ удовлетворяет условию $\tau \cdot \Delta = \Delta$, где $\tau: X \times X \rightarrow X \times X$ — «тасующее» отображение. Любое цепное отображение $D_0: S(X) \rightarrow S(X) \otimes S(X)$, индуцирующее диагональный гомоморфизм $\Delta_*: H_0(X) \rightarrow H_0(X) \otimes H_0(X)$,

называется *диагональной аппроксимацией*. Другими словами, если $\rho: S(X \times X) \rightarrow S(X) \otimes S(X)$ — цепная эквивалентность из теоремы 13.30 Эйленберга — Зильбера, то $\rho \circ \Delta_*$ является диагональной аппроксимацией. В то же время произвольная диагональная аппроксимация не обязана удовлетворять равенству $T \cdot D_0 = D_0$, где $T(x \otimes y) = (-1)^{|x| \cdot |y|} (y \otimes x)$. Выполняется лишь более слабое условие: существует цепная гомотопия $D_1: S(X) \rightarrow S(X) \otimes S(X)$ степени 1, связывающая D_0 и $T \cdot D_0$: $\partial D_1 + D_1 \partial = T \cdot D_0 - D_0$. Аналогично, композиция $T \cdot D_1$ не равна D_1 , но существует связывающая их цепная гомотопия D_2 степени 2 и т. д.

Существование этой последовательности цепных гомотопий устанавливается с помощью теоремы 13.26 об ациклических моделях.

18.1. Предложение. *Существуют естественные гомоморфизмы $D_j: S(X) \rightarrow S(X) \otimes S(X)$ степеней j , $j \geq 0$, обладающие следующими свойствами:*

i) D_0 — это цепное отображение, индуцирующее диагональный гомоморфизм $H_0(X) \rightarrow H_0(X) \otimes H_0(X)$;

ii) $dD_j + (-1)^{j+1} D_j d = D_{j-1} + (-1)^j T D_{j-1}$, $j > 0$.

Если $\{D_j\}$ и $\{D'_j\}$ — два семейства таких гомоморфизмов, то существуют естественные гомоморфизмы $E_j: S(X) \rightarrow S(X) \otimes S(X)$ степеней j , $j \geq 0$, для которых

iii) $E_0 = 0$;

iv) $dE_{j+1} + (-1)^j E_{j+1} d = -E_j + (-1)^{j+1} T E_j + D_j - D'_j$, $j \geq 0$.

Доказательство. Применим теорему 13.26 к категории $\mathcal{C}$ цепных комплексов над R , где $R = \mathbb{Z}[t]/(t^2 - 1)$ — групповое кольцо группы $\mathbb{Z}_2$. Пусть W — свободный цепной комплекс над R :

$$\dots \rightarrow R \xrightarrow{1+t} R \xrightarrow{1-t} R \rightarrow \dots \xrightarrow{1-t} R \xrightarrow{e} \mathbb{Z}.$$

Другими словами, W представляет собой свободный градуированный R -модуль с образующими $w_k \in W_k$ по одной для каждого $k \geq 0$, снабженный дифференциалом d и гомоморфизмом пополнения e вида

$$d(w_k) = [1 + (-1)^k t] w_{k-1}, \quad k \geq 1,$$

$$e(1) = e(t) = 1.$$

Рассмотрим функторы $F, G: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}$, определенные формулами

$$F(X) = W \otimes S(X) \quad (t \cdot (w \otimes u) = tw \otimes u),$$

$$G(X) = S(X) \otimes S(X) \quad (t(u \otimes u') = T(u \otimes u')).$$

Тогда функтор F свободен на моделях $M = \{\Delta^n: n \geq 0\}$, а функтор G ацикличесен на моделях M (по теореме 13.13 Кюннета). Поэтому согласно теореме 13.26 существует цепное отображение $\phi: F \rightarrow G$, индуцирующее диагональный гомоморфизм $H_0(X) \rightarrow H_0(X) \otimes H_0(X)$. Определим гомоморфизмы D_j , полагая

$$18.2. \quad D_j(a) = \phi(w_j \otimes a), \quad a \in S(X).$$

Свойства i) и ii) семейства гомоморфизмов $\{D_j\}$ вытекают из того факта, что ϕ — цепное отображение. С другой стороны, если задано семейство $\{D_j\}$, удовлетворяющее условиям i), ii), то можно определить индуцирующее диагональный гомоморфизм цепное отображение ϕ , продолжая формулу 18.2 по линейности. Цепные гомотопии, соответствующие семействам $\{E_j\}$, удовлетворяют условиям iii) и iv). $\square$

Гомоморфизмы D_j задают коцепные отображения

$$D_j^*: \text{Hom}(S(X) \otimes S(X), \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}(S(X), \mathbb{Z})$$

степеней $-j$. Пусть $c \in \text{Hom}(S_n(X), \mathbb{Z})$, $d \in \text{Hom}(S_m(X), \mathbb{Z})$ — некоторые коцепи и $c \otimes d \in \text{Hom}((S(X) \otimes S(X))_{n+m}, \mathbb{Z})$ — их тензорное произведение. Положим

$$18.3. \quad c \cup_i d = D_i^*(c \otimes d) \in \text{Hom}(S_{n+m-i}(X), \mathbb{Z}).$$

Определенное таким образом $\cup_i$ -умножение коцепей обладает следующими свойствами.

18.4. $\cup_i$ -умножение естественно, т. е. $f^*(c \cup_i d) = f^*c \cup_i f^*d$ для любого отображения $f: Y \rightarrow X$ и $c, d \in S^*(X; \mathbb{Z})$.

$$18.5. \quad \delta(c \cup_i c') = (-1)^i \delta c \cup_i c' + (-1)^{i+n} c \cup_i \delta c' -$$

$$(-1)^i c \cup_{i-1} c' - (-1)^{nm} c' \cup_{i-1} c$$

для $c \in S^n(X; \mathbb{Z})$, $c' \in S^m(X; \mathbb{Z})$.

Доказательство. Для любого $a \in S(X)$ мы имеем

$$\begin{aligned} \delta(c \cup_i c')(a) &= D_i^*(c \otimes c')(da) = (c \otimes c')(D_i da) = \\ &= (c \otimes c')((-1)^i dD_i a - (-1)^i D_{i-1} a - TD_{i-1} a) = \\ &= (-1)^i \delta(c \otimes c')(D_i a) - (-1)^i (c \otimes c')(D_{i-1} a) - \\ &= (-1)^{nm} (c' \otimes c)(D_{i-1} a) = ((-1)^i \delta c \otimes c' + (-1)^{i+n} c \otimes \delta c')(D_i a) - \\ &= [(-1)^i c \otimes c' + (-1)^{nm} c' \otimes c](D_{i-1} a) = \\ &= [(-1)^i \delta c \cup_i c' + (-1)^{i+n} c \cup_i \delta c' - (-1)^i c \cup_{i-1} c' - \\ &= (-1)^{nm} c' \cup_{i-1} c](a). \quad \square \end{aligned}$$

$$18.6. \quad (c_1 + c_2) \cup_i (d_1 + d_2) = c_1 \cup_i d_1 + c_1 \cup_i d_2 + c_2 \cup_i d_1 + c_2 \cup_i d_2.$$

Это следует из линейности отображения D_i^* .

Пусть $c \in \text{Hom}(S_n(X), \mathbb{Z})$. Определим коцепи $\text{Sq}^i c \in \text{Hom}(S_{n+i}(X), \mathbb{Z})$, полагая

$$\text{Sq}^i c = \begin{cases} c \cup_{n-i} c, & 0 \leq i \leq n, \\ 0, & i > n. \end{cases}$$

Операции Sq^i обладают следующими свойствами.

$$18.7. \quad \text{Sq}^i \text{ естественны: } f^* \text{Sq}^i c = \text{Sq}^i f^* c.$$

18.8. Если $c = 0 \pmod{2}$ на $S(A)$, $A \subset X$, то $\text{Sq}^i c = 0 \pmod{2}$ на $S(A)$ (это — частный случай естественности).

$$18.9. \quad \text{Если } \delta c = 0 \pmod{2}, \text{ то } \delta \text{Sq}^i c = 0 \pmod{2}.$$

Доказательство

$$\delta \text{Sq}^i c = \delta(c \cup_{n-i} c) = \delta c \cup_{n-i} c + c \cup_{n-i} \delta c + 2c \cup_{n-i-1} c = 0 \pmod{2}. \quad \square$$

18.10. Если $c = \delta d \bmod 2$, то

$$\text{Sq}^i c = \delta [d \cup_{n-i} c + d \cup_{n-i-1} d] \bmod 2, \quad 0 \leq i \leq n.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \delta [d \cup_{n-i} c + d \cup_{n-i-1} d] &= \\ &= \delta d \cup_{n-i} c + d \cup_{n-i} \delta c + d \cup_{n-i-1} c + c \cup_{n-i-1} d + \\ &+ \delta d \cup_{n-i-1} d + d \cup_{n-i-1} \delta d + 2d \cup_{n-i-2} d = \\ &= c \cup_{n-i} c = \text{Sq}^i c \bmod 2. \quad \square \end{aligned}$$

18.11. Если c_1, c_2 — коциклы $\bmod 2$, то

$$\text{Sq}^i (c_1 + c_2) = \text{Sq}^i c_1 + \text{Sq}^i c_2 + \delta (c_1 \cup_{n-i+1} c_2) \bmod 2.$$

Доказательство. Если $i > n$, утверждение очевидно. Для $i \leq n$ имеем

$$\begin{aligned} \delta (c_1 \cup_{n-i+1} c_2) &= \delta c_1 \cup_{n-i+1} c_2 + c_1 \cup_{n-i+1} \delta c_2 + \\ &+ c_1 \cup_{n-i} c_2 + c_2 \cup_{n-i} c_1 = c_1 \cup_{n-i} c_2 + c_2 \cup_{n-i} c_1 \bmod 2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \text{Sq}^i (c_1 + c_2) &= (c_1 + c_2) \cup_{n-i} (c_1 + c_2) = \\ &= c_1 \cup_{n-i} c_1 + c_1 \cup_{n-i} c_2 + c_2 \cup_{n-i} c_1 + c_2 \cup_{n-i} c_2 = \\ &= \text{Sq}^i c_1 + \text{Sq}^i c_2 + \delta (c_1 \cup_{n-i+1} c_2) \bmod 2. \quad \square \end{aligned}$$

Свойства 18.7 — 18.11 показывают, что для каждого $n \geq 0$ и любой пары пространств (X, A) формула

$$\text{Sq}^i \{c\}_2 = \{\text{Sq}^i c\}_2$$

задает естественный гомоморфизм

$$\text{Sq}^i: H^n(X, A; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^{n+i}(X, A; \mathbb{Z}_2).$$

Этот гомоморфизм не зависит от выбора последовательности $\{D_j\}$. Действительно, если $\{D'_j\}$ — еще одна такая последовательность, то в силу предложения 18.1 существует последовательность $\{E_j\}$, удовлетворяющая условиям 18.1, iii) и 18.1, iv). Поэтому для любого коцикла c и любого $a \in S(X)$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} 0 &= (c \otimes c) [dE_{n-i+1} + E_{n-i+1}d + E_{n-i} + TE_{n-i} + D_{n-i} + D'_{n-i}](a) = \\ &= (c \otimes c) [E_{n-i+1}d + D_{n-i} + D'_{n-i}](a) = \\ &= [\text{Sq}^i c + \text{Sq}^{i'} c + \delta E_{n-i+1}^* (c \otimes c)](a) \bmod 2. \end{aligned}$$

Таким образом, $\{\text{Sq}^i c\}_2 = \{\text{Sq}^{i'} c\}_2$.

С помощью редукции по модулю 2 можно рассматривать Sq^i как гомоморфизм

$$\text{Sq}^i: H^n(X, A; \mathbb{Z}) \rightarrow H^{n+i}(X, A; \mathbb{Z}_2).$$

18.12. Предложение. Операции Sq^i обладают следующими свойствами:

а) $\text{Sq}^0 = 1$;

б) Sq^1 совпадает с гомоморфизмом Бокиштейна, ассоциированным с точной последовательностью коэффициентов

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0;$$

с) если $x \in H^n(X, A; \mathbb{Z}_2)$, то $Sq^n x = x^2$;

д) если $x \in H^n(X, A; \mathbb{Z}_2)$, то $Sq^i x = 0$ для $i > n$;

е) $\delta Sq^i = Sq^i \delta$, где $\delta: H^{n-1}(A; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^n(X, A; \mathbb{Z}_2)$ — кограничный гомоморфизм;

ф) $Sq^1 Sq^{2j} = Sq^{2j+1}$, $Sq^1 Sq^{2j+1} = 0$, $j \geq 0$;

г) $Sq^i xy = \sum_{j+k=i} Sq^j x Sq^k y$.

Доказательство. Свойство д) следует из определений. Пусть $\rho: S(X \times Y) \rightarrow S(X) \otimes S(Y)$ — цепная эквивалентность, существующая согласно теореме 13.30 Эйленберга — Зильбера. Если $\Delta: X \rightarrow X \times X$ — диагональное отображение, то оба цепных отображения D_0 и $\rho \circ \Delta_*$: $S(X) \rightarrow S(X) \otimes S(X)$ индуцируют диагональный гомоморфизм и, следовательно, цепно гомотопны. Поэтому

$$\{c \cup_0 d\} = \{D_0^*(c \otimes d)\} = \{\Delta^* \circ \rho^*(c \otimes d)\} = \{c\} \cup \{d\}.$$

Таким образом,

$$Sq^n x = x \cup_0 x = x \cup x = x^2$$

для $x \in H^n(X, A; \mathbb{Z}_2)$.

Докажем теперь свойство е). С этой целью напомним определение кограничного гомоморфизма δ . Пусть c — некоторый коцикл из $S^{n-1}(A; \mathbb{Z}_2)$; выберем коцепь $d \in S^{n-1}(X; \mathbb{Z}_2)$ с $i\#d = c$. Тогда $i\#\delta d = \delta i\#d = \delta c = 0$, и поэтому можно считать, что δd лежит в группе $S^n(X, A; \mathbb{Z}_2)$. Положим $\delta\{c\} = \{\delta d\}$. Таким образом, классы когомологий $Sq^i\{c\}$ и $Sq^i\delta\{c\}$ представляются соответственно коциклами $c \cup_{n-i-1} c$ и $\delta d \cup_{n-i} \delta d$. Пусть $d' = d \cup_{n-i} \delta d + d \cup_{n-i-1} d$. Тогда

$$i\#d' = i\#d \cup_{n-i} i\#(\delta d) + i\#d \cup_{n-i-1} i\#d = c \cup_{n-i-1} c \bmod 2,$$

$$\delta d' = \delta d \cup_{n-i} \delta d \bmod 2,$$

откуда следует, что $\delta Sq^i\{c\} = Sq^i\delta\{c\}$.

Пусть теперь $\beta: H^{n-1}(-; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^n(-; \mathbb{Z}_2)$ — гомоморфизм Бокиштейна, ассоциированный с точной последовательностью коэффициентов

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{\gamma} \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0, \text{ и } S(j) = \begin{cases} 1, & j \text{ четно,} \\ 0, & j \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Покажем, что $\beta Sq^j = S(j) Sq^{j+1}$; это равенство сведет доказательство свойств б) и ф) к доказательству свойства а). Итак, пусть $\{c\} \in H^{n-1}(X, A; \mathbb{Z}_2)$. Выберем коцепь $d \in S^{n-1}(X, A; \mathbb{Z}_4)$

с $r_{\#}(d) = c$. Тогда $r_{\#}(\delta d) = \delta r_{\#}(d) = \delta c = 0$, так что $\delta d = \alpha_{\#} c'$ для некоторого $c' \in S^n(X, A; \mathbb{Z}_2)$. Мы имеем $\beta\{c\} = \{c'\}$. Класс когомологий $\text{Sq}'\{c\}$ представляется коциклом $c \cup_{n-j-1} c$, и $\delta c = 2b$ для некоторого целочисленного класса $b \in S^n(X, A; \mathbb{Z})$. Имеет место равенство

$$\delta(c \cup_{n-j-1} c) = (-1)^{n-j-1} 2b \cup_{n-j-1} c + (-1)^{j-1} c \cup_{n-j-1} 2b - (-1)^{n-j-1} c \cup_{n-j-2} c - (-1)^{n-1} c \cup_{n-j-2} c.$$

Следовательно, $\beta \text{Sq}'\{c\}$ представляется по модулю 2 коциклом

$$b \cup_{n-j-1} c + c \cup_{n-j-1} b + S(j) c \cup_{n-j-2} c.$$

Но $b \cup_{n-j-1} c + c \cup_{n-j-1} b = \delta(c \cup_{n-j} b) \bmod 2$ и поэтому $\beta \text{Sq}'\{c\} = S(j) \text{Sq}^{j+1}\{c\}$, как и утверждалось.

Докажем теперь свойство а). Мы знаем из теоремы 15.54, что $H^*(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}_2[x]/(x^3)$. На основании свойства с) имеем $\beta \text{Sq}^0 x = \text{Sq}^1 x = x^2 \neq 0$. Следовательно, $\text{Sq}^0 x \neq 0$ и, значит, $\text{Sq}^0 x = x$, где x — единственный ненулевой элемент группы $H^1(\mathbb{R}P^2)$. Пусть $f: S^1 \cong \mathbb{R}P^1 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ — вложение одномерной клетки. Тогда $f^*x = g_1$, где g_1 — образующая группы $\tilde{H}^1(S^1)$. Поэтому $\text{Sq}^0 g_1 = \text{Sq}^0 f^*x = f^* \text{Sq}^0 x = f^*x = g_1$. Из свойства е) вытекает равенство $\sigma \text{Sq}^n = \text{Sq}^n \sigma$ для всех n , так что если $g_n \in \tilde{H}^n(S^n)$ — образующая, то $\text{Sq}^0 g_n = \text{Sq}^0 \sigma^{-n+1} g_1 = \sigma^{-n+1} \text{Sq}^0 g_1 = \sigma^{-n+1} g_1 = g_n$. Далее, если $\dim X \leq n$, то в силу теоремы 10.32 Хопфа имеет место изоморфизм $\psi: [X, S^n] \rightarrow \tilde{H}^n(X; \mathbb{Z})$. Кроме того, если пространство X n -мерно, то точная последовательность Бокштейна, ассоциированная с последовательностью коэффициентов

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{1} \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0,$$

заканчивается группами $\dots \rightarrow H^n(X; \mathbb{Z}) \xrightarrow{2} H^n(X; \mathbb{Z}) \xrightarrow{1} H^n(X; \mathbb{Z}_2) \rightarrow 0$. Поэтому для любого $x \in \tilde{H}^n(X; \mathbb{Z}_2)$ можно выбрать элемент $x' \in \tilde{H}^n(X; \mathbb{Z})$ с $r_*(x') = x$ и отображение $h: X \rightarrow S^n$ с $\psi[h] = x'$. Тогда

$$x = r_* x' = r_* h^*(g_n) = h^*(r_* g_n) = h^*(g_n),$$

так что

$$\text{Sq}^0 x = \text{Sq}^0 h^*(g_n) = h^*(\text{Sq}^0 g_n) = x.$$

Для произвольного клеточного пространства X с n -мерным остовом X^n вложение $i: X^n \rightarrow X$ индуцирует мономорфизм $i^*: \tilde{H}^n(X) \rightarrow \tilde{H}^n(X^n)$ и, следовательно, $\text{Sq}^0 = 1$ на X . Если же X — произвольное топологическое пространство, то для доказательства равенства $\text{Sq}^0 = 1$ используется клеточный эквивалент пространства X . Наконец, для произвольной пары (X, A) имеют место изоморфизмы

$$H^n(X, A) \cong H^n(X \cup CA, CA) \cong H^n(X \cup CA),$$

так что относительный случай следует из абсолютного.

Нам остается доказать лишь последнее свойство g). Пусть

$$\rho: S(X \times Y) \rightarrow S(X) \otimes S(Y)$$

— цепная эквивалентность из теоремы 13.30 Эйленберга — Зильбера и

$$\sigma: S(X) \otimes S(Y) \rightarrow S(X \times Y)$$

— обратная к ней цепная эквивалентность. Определим цепное отображение $r: W \rightarrow W \otimes W$, полагая на образующих

$$r(w_i) = \sum_{j+k=i} (-1)^j w_j \otimes t^j w_k$$

и продолжая его по линейности на весь комплекс W . Тогда композиция

$$\begin{aligned} W \otimes S(X \times Y) &\xrightarrow{r \otimes \rho} W \otimes W \otimes S(X) \otimes S(Y) \xrightarrow{1 \otimes T \otimes 1} W \otimes S(X) \otimes \\ &W \otimes S(Y) \xrightarrow{\phi_X \otimes \phi_Y} S(X) \otimes S(X) \otimes S(Y) \otimes S(Y) \xrightarrow{1 \otimes T \otimes 1} \\ &S(X) \otimes S(Y) \otimes S(X) \otimes S(Y) \xrightarrow{\sigma \otimes \sigma} S(X \times Y) \otimes S(X \times Y) \end{aligned}$$

является цепным отображением, индуцирующим диагональный гомоморфизм, и, следовательно, она цепно гомотопна отображению $\phi_{X \times Y}$. Заметим, что композиция $\sigma \circ \rho$ цепно гомотопна тождественному отображению 1. Поэтому для любых коцикла c и цикла a имеет место равенство $c(\sigma \circ \rho(a)) = c(a)$. Аналогичное равенство выполняется и для композиции $\rho \circ \sigma$. Итак, для любых коциклов $c \in S^n(X; \mathbb{Z}_2)$, $d \in S^m(Y; \mathbb{Z}_2)$ и циклов $a \in S(X; \mathbb{Z}_2)$, $b \in S(Y; \mathbb{Z}_2)$ находим (по модулю 2)

$$\begin{aligned} [Sq^i(c \times d)](a \times b) &= [Sq^i \rho^*(c \otimes d)] \sigma(a \otimes b) = \\ &[\rho^*(c \otimes d) \otimes \rho^*(c \otimes d)] \phi_{X \times Y}(w_{n+m-i} \otimes \sigma(a \otimes b)) = \\ &[c \otimes d \otimes c \otimes d](\rho \otimes \rho) \cdot (\sigma \otimes \sigma) \cdot (1 \otimes T \otimes 1) \cdot \\ &(\phi_X \otimes \phi_Y) \cdot (1 \otimes T \otimes 1) \cdot (r \otimes \rho)(w_{n+m-i} \otimes \sigma(a \otimes b)) = \\ &[c \otimes d \otimes c \otimes d](1 \otimes T \otimes 1) \cdot (\phi_X \otimes \phi_Y) \cdot \\ &(1 \otimes T \otimes 1) \left(\sum_{j+k=n+m-i} w_j \otimes t^j w_k \otimes a \otimes b \right) = \\ &\sum_{j+k=n+m-i} (c \otimes c \otimes d \otimes d) \cdot (\phi_X \otimes \phi_Y)(w_j \otimes a \otimes t^j w_k \otimes b) = \\ &\sum_{j+k=n+m-i} [(c \otimes c)(\phi_X(w_j \otimes a))] [(d \otimes d)(T^j \phi_Y(w_k \otimes b))] = \\ &\sum_{j+k=n+m-i} (Sq^{n-j}(c))(a) \cdot (Sq^{m-k}(d))(b) = \\ &\sum_{r+i=i} (Sq^r c \times Sq^s d)(a \times b). \end{aligned}$$

Так как любой элемент из $H_*(X \times Y)$ имеет вид $\sum_i \{a_i \times b_i\}$ для подходящих $\{a_i\} \in H_*(X)$, $\{b_i\} \in H_*(Y)$, то

$$\text{Sq}^i(x \times y) = \sum_{j+k=i} \text{Sq}^j x \times \text{Sq}^k y$$

для всех $x \in H^*(X)$, $y \in H^*(Y)$. Поэтому, чтобы получить формулу для $\cup$ -умножения, остается лишь применить диагональное отображение. $\square$

Легко видеть, что для любого n из свойства е) вытекает равенство $\sigma \cdot \text{Sq}^n = \text{Sq}^n \cdot \sigma$. Поэтому Sq^i являются стабильными когомологическими операциями, т. е. $\text{Sq}^i \in A^*$, $i \geq 0$.

Перейдем теперь к вычислению алгебры $A^* = H^*(H)$. Согласно предложению 8.37 имеет место точная последовательность

$$0 \rightarrow \lim_n^1 \tilde{H}^{q+n-1}(H_n) \rightarrow H^q(H) \rightarrow \lim_n^0 \tilde{H}^{q+n}(H_n) \rightarrow 0,$$

где гомоморфизмы обратной системы имеют вид

$$\tilde{H}^{q+n}(H_n) \xrightarrow{\varepsilon_{n-1}^*} \tilde{H}^{q+n}(SH_{n-1}) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}^{q+n-1}(H_{n-1}),$$

т. е. согласно предложению 15.43 представимы в виде

$$\tilde{H}^{q+n}(H_n) \xrightarrow{\sigma'} \tilde{H}^{q+n-1}(\Omega H_n) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}^{q+n-1}(H_{n-1}).$$

Так как пространство H_n является $(n-1)$ -связным, то из п. 15.42 вытекает, что σ' — изоморфизм при $n > q+1$. Следовательно, $\lim_n^1 \tilde{H}^{q+n-1}(H_n) = 0$ для любого q , так что

$$H^q(H) = \lim_n^0 \tilde{H}^{q+n}(H_n).$$

Мы знаем, что $H_1 \cong \mathbb{R}P^\infty$, и, значит, $H^*(H_1) \cong \mathbb{Z}_2[x]$. Вычислим по индукции $H^*(H_n)$, используя спектральную последовательность Лере — Серра расслоения

$$H_{n-1} \cong \Omega H_n \rightarrow PH_n \rightarrow H_n.$$

Пусть $\iota_n \in H^n(H_n)$ — класс когомологий, соответствующий единице $1 \in [H_n, H_n]$; нетрудно видеть, что $\iota_1 = x$. В кольце $H^*(H_2)$ мы имеем элементы

$$\iota_2, \text{Sq}^1 \iota_2, \text{Sq}^2 \text{Sq}^1 \iota_2, \text{Sq}^4 \text{Sq}^2 \text{Sq}^1 \iota_2, \dots$$

Из определения гомоморфизма σ' и того факта, что Sq^i коммутирует с δ , вытекает, что Sq^i коммутирует с σ' . Кроме того, $\sigma' \iota_n = \iota_{n-1}$ для любого $n \geq 2$. Следовательно,

$$\sigma'(\text{Sq}^{2^{s-1}} \text{Sq}^{2^{s-2}} \dots \text{Sq}^1 \iota_2) = \text{Sq}^{2^{s-1}} \dots \text{Sq}^1 \iota_1 = x^{2^s}.$$

Тогда член E_2 спектральной последовательности Серра имеет вид

	x^4				
	x^3		$x^3 \iota_2$		
E_2	x^2		$x^2 \iota_2$	$x^2 Sq^1 \iota_2$	$x^2 \iota_2^2$
	x		$x \iota_2$	$x Sq^1 \iota_2$	$x \iota_2^2$
	1		ι_2	$Sq^1 \iota_2$	ι_2^2
					$\iota_2 \cdot Sq^1 \iota_2$

Член E_3 выглядит следующим образом:

	x^4					
E_3	x^2			$x^2 Sq^1 \iota_2$		
	1			$Sq^1 \iota_2$		$(Sq^1 \iota_2)^2$
	0	1	2	3	4	5

Естественно предположить, что $H^*(H_2)$ является алгеброй полиномов от образующих $\iota_2, Sq^1 \iota_2, Sq^2 Sq^1 \iota_2, \dots$; это и в самом деле так. Для доказательства можно использовать теорему 15.62 Бореля. Действительно, при любом $n \geq 1$ мы имеем

$$\sigma'(Sq^{2^{n-1}} Sq^{2^{n-2}} \dots Sq^2 Sq^1 \iota_2) = x^{2^n}.$$

Но из замечания 15.59 вытекает, что элементы $x, x^2, x^4, \dots, x^{2^n}, \dots$ представляют собой простую систему образующих алгебры

$$H^*(H(\mathbb{Z}_2, 1); \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[x].$$

Следовательно, применима теорема Бореля.

Для того чтобы рассмотреть случай $n > 2$, введем некоторые новые обозначения. Пусть $I = (i_1, i_2, \dots, i_s)$ — произвольная последовательность целых чисел; равенство $I = 0$ означает, что I — пустое множество. Положим $Sq^I = Sq^{i_1} Sq^{i_2} \dots Sq^{i_s}$ (разумеется, $Sq^0 = 1$). Назовем последовательность I *допустимой*, если $I = 0$ или $i_1 \geq 2i_2, i_2 \geq 2i_3, \dots, i_{s-1} \geq 2i_s, i_s \geq 1$. Мономы Sq^I с допустимой последовательностью I называются *допустимыми мономами*. (Так как операции Sq^i удовлетворяют так называемым соотношениям Адема

$$Sq^a Sq^b = \sum_{c=0}^{\lfloor a/2 \rfloor} \binom{b-c-1}{a-2c}_2 Sq^{a+b-c} Sq^c, \quad a < 2b,$$

частным случаем которых является равенство 18.12, f), то ясно, что любой моном Sq^I выражается в виде линейной комбинации допустимых мономов. Это замечание не существенно для дальнейшего, и мы сделали его лишь для того, чтобы пояснить, откуда берется понятие допустимого монома.) *Степенью последовательности* $I = (i_1, i_2, \dots, i_s)$ называется число $d(I) = i_1 + i_2 + \dots + i_s$, так что Sq^I — когомологическая операция степени $d(I)$. Определим *избыточность* $e(I)$ последовательности I формулой

$$e(I) = (i_1 - 2i_2) + (i_2 - 2i_3) + \dots + (i_{s-1} - 2i_s) + i_s = i_1 - i_2 - \dots - i_s = 2i_1 - d(I).$$

Для последовательностей $I = (i_1, i_2, \dots, i_s)$, $J = (j_1, j_2, \dots, j_t)$ обозначим через IJ последовательность $(i_1, i_2, \dots, i_s, j_1, \dots, j_t)$. Таким образом, $Sq^{IJ} = Sq^I \cdot Sq^J$. Ясно, что $d(IJ) = d(I) + d(J)$.

18.13. Упражнение. Показать, что

$$e(IJ) = \begin{cases} e(I) - d(J), & \text{если } I \neq 0, \\ e(J), & \text{если } I = 0. \end{cases}$$

Вывести отсюда, что если $x \in H^n(X, A)$ и $e(I) > n$, то $Sq^I x = 0$.

18.14. Теорема. Алгебра $H^*(H_n)$ изоморфна алгебре полиномов от образующих $Sq^I \iota_n$, где I — произвольная допустимая последовательность с $e(I) < n$.

Доказательство. Для $n=1$ теорема очевидна. Кроме того, мы уже доказали ее для $n=2$, так как условие $e(I) < 2$ означает, что последовательность I либо пуста, либо имеет вид $(2^{s-1}, 2^{s-2}, \dots, 2, 1)$ для некоторого s . Докажем теорему в общем случае индукцией по n .

Предположим, что для некоторого n теорема доказана, и пусть $x_1, x_2, \dots$ — некоторое упорядочение множества элементов $Sq^I \iota_n$, где I допустима и $e(I) < n$. Пусть $x_i = Sq^{q_i} \iota_n \in H^{q_i}(H_n)$; тогда $q_i = d(I) + n$. Введем новую допустимую последовательность

$$J(q, r) = \begin{cases} (2^{r-1}q, 2^{r-2}q, \dots, 2q, q), & r \geq 1, \\ 0, & r = 0. \end{cases}$$

Без труда проверяется, что

$$e(J(q, r)) = \begin{cases} q, & r \geq 1, \\ 0, & r = 0 \end{cases}$$

и $d(J(q, r)) = q(2^r - 1)$. Элементы $\{x_i^{2^r} : i \geq 1, r \geq 0\}$ составляют простую систему образующих алгебры $H^*(H_n)$. Для $x_i = Sq^I \iota_n$ элемент $x_i^{2^r}$ может быть записан в виде

$$Sq^{J(q_i, r)} x_i = Sq^{J(q_i, r)} Sq^I \iota_n = Sq^{J(q_i, r) + I} \iota_n.$$

Поскольку

$$\sigma'(Sq^{J(q_i, r) + I} \iota_{n+1}) = Sq^{J(q_i, r) + I} \sigma'(\iota_{n+1}) = Sq^{J(q_i, r) + I} \iota_n = x_i^{2^r},$$

то, применяя теорему Бореля к расслоению $H_n \rightarrow PH_{n+1} \rightarrow H_{n+1}$, находим, что $H^*(H_{n+1})$ является алгеброй полиномов от образующих

$$\text{Sq}^{J(n+d(I), r)I} I_{n+1},$$

где I пробегает множество всех допустимых последовательностей с $e(I) < n$, $r \geq 0$. Нетрудно видеть, что последовательность $J(n+d(I), r)I$ допустима; единственно, что нужно проверить — это неравенство $n+d(I) \geq 2i_1$, но оно вытекает из условия $n > e(I) = 2i_1 - d(I)$. В силу упражнения 18.13 мы имеем

$$e(J(n+d(I), r)I) = \begin{cases} e(I), & r = 0, \\ n+d(I)-d(I), & r \geq 1. \end{cases}$$

Таким образом, $e(J(n+d(I), r)I) < n+1$ для всех допустимых последовательностей I с $e(I) < n$ и $r \geq 0$. Поэтому теорема будет доказана, если мы сумеем установить, что каждая допустимая последовательность I с $e(I) = n$ может быть записана в виде

$$I = J(n+d(I'), r)I'$$

для некоторых $r > 0$ и допустимой последовательности I' с $e(I') < n$.

Для заданной последовательности I обозначим через r первый номер, для которого $i_r > 2i_{r+1}$. Тогда мы можем представить I в виде

$$I = J(i_r, r)I',$$

где $I' = (i_{r+1}, i_{r+2}, \dots, i_s)$. Разумеется, $r \geq 1$, так что

$$n = e(I) = e(J(i_r, r)) - d(I') = i_r - d(I') > 2i_{r+1} - d(I') = e(I').$$

Кроме того, $i_r = n + d(I')$. $\square$

Гомоморфизмы нашей обратной системы $\{\tilde{H}^{q+n}(H_n)\}$ имеют вид

$$\tilde{H}^{q+n}(H_n) \xrightarrow{e_{n-1}^*} \tilde{H}^{q+n}(SH_n) \xrightarrow{\sigma} \tilde{H}^{q+n-1}(H_{n-1}),$$

и все произведения в $H^*(SH_n)$ равны нулю в силу следствия 13.66. Поэтому гомоморфизмы обратной системы переводят в нуль все произведения из $H^*(H_n)$, и выживают лишь неразложимые элементы, т. е. линейные комбинации элементов $\text{Sq}^I i_n$, $e(I) < n$.

18.15. Теорема. Как векторное пространство $A^* = H^*(H)$ имеет $\mathbb{Z}_2$ -базис, состоящий из допустимых мономов Sq^I . Следовательно, A^* порождается как алгебра элементами $1 \doteq \text{Sq}^0$, Sq^1 , Sq^2 , ...

Доказательство. В пункте, следующем за доказательством теоремы 18.12, было установлено, что $A^* \cong \varinjlim_n \tilde{H}^*(H_n)$, где морфизмы обратной системы имеют вид

$$\tilde{H}^{q+n}(H_n) \xrightarrow{\sigma'} \tilde{H}^{q+n-1}(\Omega H_n) \cong \tilde{H}^{q+n-1}(H_{n-1})$$

и σ' — изоморфизм при $n > q + 1$. Таким образом,

$$A^q \cong \lim_n^0 \tilde{H}^{n+q}(H_n) = \hat{H}^{n+q}(H_n)$$

для любого $n > q$.

В силу теоремы 18.14 векторное пространство $\tilde{H}^{n+q}(H_n)$ имеет $\mathbb{Z}_2$ -базис, состоящий из элементов $\text{Sq}^I \iota_n$, где I — допустимая последовательность, $d(I) = q$ и $e(I) < n$. Но из условия $d(I) = q < n$ автоматически вытекает, что $e(I) < n$. Поэтому можно утверждать, что $\tilde{H}^{n+q}(H_n)$ имеет $\mathbb{Z}_2$ -базис $\{\text{Sq}^I \iota_n: I \text{ — допустимая последовательность, } d(I) = q\}$. Так как гомоморфизм $A^q \rightarrow \lim_n^0 \tilde{H}^{n+q}(H_n)$ задается формулой $\theta \mapsto \{\theta(\iota_n)\}$, откуда следует утверждение теоремы. $\square$

Поскольку $A_* = H_*(H)$ имеет конечный тип над $\mathbb{Z}_2$ (это следует из $\mathcal{C}$ -теории Серра; см. [70], [72]), то формула универсальных коэффициентов показывает, что $A_* = H_*(H)$ представляет собой векторное пространство $\text{Hom}_{\mathbb{Z}_2}(H^*(H); \mathbb{Z}_2)$, двойственное к A^* . Займемся описанием алгебры A_* .

Мы уже знаем, что $H_1 \simeq \mathbb{R}P^\infty$ и $H_*(H_1)$ имеет $\mathbb{Z}_2$ -базис $x_1, x_2, \dots$, двойственный к степеням $\{x^i\}$ полиномиальной образующей x из $H^*(H_1) \cong \mathbb{Z}_2[x]$. Кроме того, H_1 является H -пространством, и, значит, существуют умножение Понтрягина

$$\mu_*: H_*(\mathbb{R}P^\infty) \otimes H_*(\mathbb{R}P^\infty) \rightarrow H_*(\mathbb{R}P^\infty)$$

и коумножение

$$\mu^*: H^*(\mathbb{R}P^\infty) \rightarrow H^*(\mathbb{R}P^\infty) \otimes H^*(\mathbb{R}P^\infty).$$

Так как $\mu \circ (*, 1) \simeq 1 \simeq \mu \circ (1, *)$, т. е. постоянное отображение $*$ является гомотопической единицей, то элемент $\mu^*(x)$ должен иметь вид $\mu^*(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$. Но μ^* — гомоморфизм колец, следовательно,

$$\mu^*(x^k) = (x \otimes 1 + 1 \otimes x)^k = \sum_{i+j=k} \binom{k}{i}_2 x^i \otimes x^j.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \langle x^k, x_i x_j \rangle &= \langle x^k, \mu_*(x_i \otimes x_j) \rangle = \langle \mu^* x^k, x_i \otimes x_j \rangle = \\ &= \sum_{n+m=k} \binom{k}{n}_2 \langle x^n \otimes x^m, x_i \otimes x_j \rangle = \begin{cases} \binom{k}{i}_2, & i+j=k, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \end{aligned}$$

Итак, мы получили, что

$$x_i x_j = \binom{(i+j)!}{i! j!}_2 x_{i+j}.$$

Другими словами $H_*(\mathbb{R}P^\infty)$ представляет собой так называемую алгебру разделенных полиномов.

Без труда проверяется, что элемент x_k неразложим тогда и только тогда, когда $k = 2^s$ для некоторого s .

Мы знаем, что гомоморфизмы обратной системы $\{\tilde{H}_{q+n}(H_n)\}$ переводят все разложимые элементы в нуль, поэтому лишь элементы x_{2^s} из $\tilde{H}_{2^s}(H_1)$ имеют шанс выжить в $H_*(H)$. Обозначим образ элемента x_{2^s} в $H_{2^s-1}(H)$ через ξ_s , $s \geq 1$. Более подробно, если $i: H_1 \rightarrow \Sigma H$ — естественное отображение, то $i_* x_{2^s} = \xi_s$. С другой стороны,

$$i^* \text{Sq}^I x = \text{Sq}^I x = \begin{cases} x^{2^s}, & \text{если } I = (2^{s-1}, 2^{s-2}, \dots, 2, 1) = J(s, 1), \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \langle \text{Sq}^I, \xi \rangle &= \langle \text{Sq}^I, i_*(x_{2^k}) \rangle = \langle i^* \text{Sq}^I, x_{2^k} \rangle = \\ \langle \text{Sq}^I x, x_{2^k} \rangle &= \begin{cases} \langle x^{2^s}, x_{2^k} \rangle, & I = J(s, 1) \\ 0, & I \neq J(s, 1) \end{cases} = \begin{cases} 1, & I = J(k, 1), \\ 0, & I \neq J(k, 1). \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, элемент ξ_k двойствен к $\text{Sq}^{J(k, 1)}$.

Мы можем представить полученный результат в виде следующего равенства:

$$\text{Sq}^I x = \sum_{s \geq 0} \langle \text{Sq}^I, \xi_s \rangle x^{2^s}.$$

На первый взгляд, это выражение не дает ничего нового. Заметим, однако, что каждый элемент $a \in A^*$ является $\mathbb{Z}_2$ -линейной комбинацией мономов Sq^I . Поэтому

$$18.16. \quad ax = \sum_{s \geq 0} \langle a, \xi_s \rangle x^{2^s} \text{ для всех } a \in A^*.$$

Рассмотрим теперь гомотопическое умножение $\mu: H \wedge H \rightarrow H$. Оно индуцирует коумножение

$$\phi^*: H^*(H) \rightarrow H^*(H \wedge H) \cong H^*(H) \otimes H^*(H).$$

18.17. Предложение. Пусть $a \in A^* = H^*(H)$ и $x, y \in H^*(X)$ — произвольные элементы. Если $\phi^* a = \sum_i a_i \otimes a'_i$, то $a(xy) = \sum_i (a_i x)(a'_i y)$.

Доказательство. Для любого элемента $z \in H^*(Z) = [Z, H]^*$, представленного отображением $f: Z \rightarrow \Sigma^p H$, определим гомоморфизм $z^*: H^*(H) \rightarrow H^*(Z)$, полагая $z^*(a) = a(z)$. Другими словами, если $a = [g: H \rightarrow \Sigma^q H]$, то $z^*(a) = [\Sigma^p g \circ f: Z \rightarrow \Sigma^{p+q} H]$. Тогда для любых $x \in H^*(X)$, $y \in H^*(Y)$ имеет место коммута-

тивная диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 [H, H]^* & \xrightarrow{(x \wedge y)^*} & [X \wedge Y, H]^* \\
 \downarrow \mu^* & \searrow (x \wedge y)^* & \\
 [H \wedge H, H]^* & \xrightarrow{(x \wedge y)^*} & [X \wedge Y, H]^* \\
 \uparrow & \nearrow \alpha & \\
 [H, H]^* \otimes_{\mathbb{Z}_2} [H, H]^* & &
 \end{array}$$

где $x \wedge y$ означает композицию $X \wedge Y \xrightarrow{x \wedge y} \Sigma^p H \wedge \Sigma^q H \cong \Sigma^{p+q} H \wedge H$ и $\alpha(a \otimes a') = a(x) \wedge a'(y)$, $a, a' \in [H, H]^*$. Так как $a(x \wedge y) = (x \wedge y)^*(a)$, то для доказательства предложения остается применить диагональный гомоморфизм Δ^* . $\square$

Замечание. Доказанное предложение верно для любого такого кольцевого спектра E , что $E^*(E) \otimes_{E^*(S^0)} E^*(E) \rightarrow E^*(E \wedge E)$ — изоморфизм.

Пусть теперь $X = \mathbb{R}P^\infty \times \mathbb{R}P^\infty \times \dots \times \mathbb{R}P^\infty$ (n множителей) и $p_i: X \rightarrow \mathbb{R}P^\infty$ — проекция на i -й множитель. Положим $y_i = p_i^*(x) \in H^1(X)$.

18.18. Предложение. Для любого $a \in A^*$ имеет место равенство

$$a(y_1 y_2 \dots y_n) = \sum_{\alpha} \langle a, \xi_{\alpha} \rangle y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \dots y_n^{\alpha_n},$$

где α пробегает множество всех последовательностей целых чисел вида $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ и $\xi_{\alpha} = \xi_{\alpha_1} \xi_{\alpha_2} \dots \xi_{\alpha_n}$.

Доказательство. Будем доказывать это равенство индукцией по n ; случай $n=1$ есть в точности формула 18.16. Предположим, что результат доказан для $n-1$. Тогда для любого n и любого $a \in A^*$ с $\phi^* a = \sum_i a_i \otimes a'_i$ имеем

$$\begin{aligned}
 a(y_1 y_2 \dots y_n) &= \sum_i a_i(y_1 \dots y_{n-1}) a'_i(y_n) = \\
 &= \sum_i \left(\sum_{\beta} \langle a_i, \xi_{\beta} \rangle y_1^{\beta_1} \dots y_{n-1}^{\beta_{n-1}} \right) \left(\sum_j \langle a'_i, \xi_j \rangle y_n^{2^j} \right) = \\
 &= \sum_{\beta, j} \left\langle \sum_i a_i \otimes a'_i, \xi_{\beta} \otimes \xi_j \right\rangle y_1^{\beta_1} \dots y_{n-1}^{\beta_{n-1}} y_n^{2^j} = \\
 &= \sum_{\beta, j} \langle \phi^* a, \xi_{\beta} \otimes \xi_j \rangle y_1^{\beta_1} \dots y_{n-1}^{\beta_{n-1}} y_n^{2^j} = \\
 &= \sum_{\beta, j} \langle a, \xi_{\beta} \xi_j \rangle y_1^{\beta_1} \dots y_{n-1}^{\beta_{n-1}} y_n^{2^j} = \sum_{\alpha} \langle a, \xi_{\alpha} \rangle y_1^{\alpha_1} \dots y_n^{\alpha_n},
 \end{aligned}$$

где $\alpha = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}, j)$. $\square$

В алгебре $H^*(X) \cong \mathbb{Z}_2[y_1, y_2, \dots, y_n]$ содержится подалгебра S симметрических полиномов. Основная теорема теории симметрических полиномов утверждает, что $S = \mathbb{Z}_2[\sigma_1, \dots, \sigma_n]$, где $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ — элементарные симметрические полиномы, определяемые равенством

$$\prod_{i=1}^n (t + y_i) = \sum_{j=0}^n \sigma_j(y_1, \dots, y_n) t^{n-j}.$$

В частности, $\sigma_n = y_1 y_2 \dots y_n$. Упорядочим мономы $\sigma_1^{\alpha_1} \dots \sigma_n^{\alpha_n}$ в S , вводя на множестве последовательностей $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ правый лексикографический порядок. Более подробно, $\sigma_1^{\alpha_1} \dots \sigma_n^{\alpha_n} > \sigma_1^{\beta_1} \dots \sigma_n^{\beta_n}$, если $\alpha_n > \beta_n$ или если $\alpha_n = \beta_n$ и $\alpha_{n-1} > \beta_{n-1}$, и т. д.

18.19. Предложение. Если I — допустимая последовательность с $d(I) \leq n$, то $Sq^I \sigma_n = \sigma_n \cdot P_I$, где P_I — симметрический полином вида $P_I = \sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \dots \sigma_{i_s} + \{\text{члены меньших порядков}\}$.

Доказательство. Используем индукцию по длине s последовательности I . Если мы формально запишем $Sq = Sq^0 + Sq^1 + Sq^2 + \dots$, то из формулы Картана 18.12, г) вытекает, что Sq — кольцевой гомоморфизм:

$$Sq(xy) = Sq(x) \cdot Sq(y).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} Sq(\sigma_n) &= Sq\left(\prod_{i=1}^n y_i\right) = \prod_{i=1}^n (Sq y_i) = \prod_{i=1}^n (y_i + y_i^2) = \\ &= \sigma_n \cdot \prod_{i=1}^n (1 + y_i) = \sigma_n \left(\sum_{j=0}^n \sigma_j\right) = \sum_{i=0}^n \sigma_n \sigma_j. \end{aligned}$$

Следовательно, $Sq^I \sigma_n = \sigma_n \sigma_i$, что доказывает предложение в случае $s = 1$.

Предположим теперь, что результат справедлив для всех допустимых последовательностей I' длины, меньшей s , и пусть $I = (i_1, i_2, \dots, i_s)$ — допустимая последовательность. Положим $I' = (i_2, i_3, \dots, i_s)$. Тогда формула Картана дает

$$\begin{aligned} Sq^I(\sigma_n) &= Sq^{i_1} Sq^{I'}(\sigma_n) = Sq^{i_1}(\sigma_n P_{I'}) = \sum_{j=0}^{i_1} Sq^j(\sigma_n) Sq^{i_1-j}(P_{I'}) = \\ &= \sigma_n \sigma_{i_1} P_{I'} + \sum_{j=0}^{i_1-1} \sigma_n \sigma_j Sq^{i_1-j}(P_{I'}) = \sigma_n \sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \dots \sigma_{i_s} + \\ &+ \sigma_n \sigma_{i_1} (\text{меньшие члены из } P_{I'}) + \sum_{j=0}^{i_1-1} \sigma_n \sigma_j Sq^{i_1-j}(P_{I'}). \end{aligned}$$

Легко видеть, что в этом выражении $\sigma_n \sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \dots \sigma_{i_s}$ есть наибольшее (в смысле нашего порядка) слагаемое. $\square$

18.20. Теорема. *Имеет место изоморфизм алгебр Хопфа $A_* \cong \mathbb{Z}_2[\xi_1, \xi_2, \dots]$, где справа коумножение ψ задается на образующих формулой*

$$\psi \xi_k = \sum_{i+j=k} \xi_j^2 \otimes \xi_i.$$

Доказательство. Так как мономы $\sigma_n \sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \dots \sigma_{i_s}$ линейно независимы в $S \subset H^*(X)$, то при $d(I) \leq n$ элементы $\text{Sq}^I \sigma_n$ также линейно независимы. Если бы существовал такой элемент $a \in A^*$, что $\langle a, \xi_\alpha \rangle = 0$ для любого монома ξ_α от переменных ξ_i , то в силу предложения 18.18 мы имели бы

$$a(\sigma_n) = \sum_{\alpha} \langle a, \xi_\alpha \rangle y_1^{2^{\alpha_1}} \dots y_n^{2^{\alpha_n}} = 0$$

для любого n . Но, как мы знаем, элемент a можно записать в виде линейной комбинации $a = \sum_I c_I \text{Sq}^I$ с подходящими коэффициентами $c_I \in \mathbb{Z}_2$. Таким образом, $0 = a(\sigma_n) = \sum_I c_I \text{Sq}^I \sigma_n$ для всех n . Однако это равенство возможно лишь в случае, когда $c_I = 0$ для всех I , т. е. когда $a = 0$. Следовательно, мономы от переменных ξ_i аддитивно порождают A_* .

Мы можем устроить биекцию $\alpha: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{A}$ между множеством $\mathcal{T}$ допустимых последовательностей I и множеством $\mathcal{A}$ всех последовательностей вида $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, полагая

$$\alpha(i_1, i_2, \dots, i_s) = (i_1 - 2i_2, i_2 - 2i_3, \dots, i_s).$$

Пусть $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$; тогда

$$\deg \xi^\alpha = \alpha_1 + (2^2 - 1)\alpha_2 + \dots + (2^n - 1)\alpha_n.$$

Следовательно, для любой допустимой последовательности I мы имеем $\deg \text{Sq}^I = \deg \xi^{\alpha(I)}$. Таким образом, мономов ξ^α данной степени существует ровно столько, сколько имеется допустимых мономов Sq^I той же самой степени, так что ξ^α должны быть линейно независимыми. Это доказывает кольцевой изоморфизм

$$A_* \cong \mathbb{Z}_2[\xi_1, \xi_2, \dots].$$

Чтобы установить формулу для ψ , вычислим сперва $(ab)x$ для $a, b \in A^*$. Имеем

$$(ab)x = a(bx) = a\left(\sum_k \langle b, \xi_k \rangle x^{2^k}\right) = \sum_k \langle b, \xi_k \rangle a(x^{2^k}).$$

Пусть $\Delta^{2^k}: \mathbb{R}^{P^\infty} \rightarrow \mathbb{R}^{P^\infty} \times \dots \times \mathbb{R}^{P^\infty}$ — отображение, задаваемое формулой $\Delta^{2^k}(t) = (\underbrace{t, \dots, t}_{2^k \text{ раз}})$ (так называемая 2^k -кратная диагональ).

Тогда $x^{2^k} = \Delta^{2^k*}(y_1, y_2, \dots, y_{2^k})$. Поэтому

$$ax^{2^k} = \Delta^{2^k*}(a(y_1, \dots, y_{2^k})) = \Delta^{2^k*}\left(\sum_{\alpha} \langle a, \xi_{\alpha} \rangle y_1^{2^{\alpha_1}} \dots y_n^{2^{\alpha_n}}\right) = \\ \sum_{\alpha} \langle a, \xi_{\alpha} \rangle x^{2^{\alpha_1} + 2^{\alpha_2} + \dots + 2^{\alpha_n}} \quad (n = 2^k).$$

Все слагаемые в этой сумме равны нулю по модулю 2, исключая случай, когда α имеет вид $(j, j, \dots, j)$ для некоторого j . Действительно, если $\alpha_m \neq \alpha_n$ для $m < n$, то слагаемое, соответствующее последовательности

$$\alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots, \alpha_m, \dots)$$

будет обратным для слагаемого, соответствующего α . Таким образом,

$$ax^{2^k} = \sum_i \langle a, \xi_j^{2^k} \rangle x^{2^{j+k}}.$$

Следовательно,

$$(ab)(x) = \sum_k \langle b, \xi_k \rangle \left(\sum_j \langle a, \xi_j^{2^k} \rangle x^{2^{j+k}} \right) = \\ \sum_m \left\langle a \otimes b, \sum_{j+k=m} \xi_j^{2^k} \otimes \xi_k \right\rangle x^{2^m}.$$

Но, с другой стороны,

$$(ab)(x) = \sum_m \langle ab, \xi_m \rangle x^{2^m}.$$

Согласно предложению 17.11 для любых $a \in A^*$, $y = H^*(X)$, $u \in H_*(X)$ имеют место равенства

$$\langle ay, u \rangle = \sum_i \langle a, e_i \langle y, u_i \rangle \rangle = \sum_i \langle a, e_i \rangle \langle y, u_i \rangle = \\ \sum_i \langle a \otimes y, e_i \otimes u_i \rangle = \langle a \otimes y, \psi u \rangle.$$

Если мы положим здесь $y = b \in H^*(H)$, $u = \xi_m \in H_*(H)$, то

$$(ab)(x) = \sum_m \langle a \otimes b, \psi \xi_m \rangle x^{2^m}.$$

Поскольку это равенство справедливо для всех $a, b \in A^*$, то

$$\psi \xi_m = \sum_{j+k=m} \xi_j^{2^k} \otimes \xi_k. \quad \square$$

Итак, несмотря на то, что умножение в A^* некоммутативно и довольно запутано, мультипликативная структура в A_* очень прозрачна. Разумеется, коумножение в A_* (двойственное к умножению в A^*) устроено непросто, но все же формулу для ψ

запомнить значительно легче, чем соотношения Адема

$$\mathrm{Sq}^a \mathrm{Sq}^b = \sum_{c=0}^{[a/2]} \binom{b-c-1}{a-2c}_2 \mathrm{Sq}^{a+b-c} \mathrm{Sq}^c, \quad a < 2b.$$

Конечно же, умножение ψ^* в A^* полностью определяется коумножением ψ , так что в принципе можно вывести соотношения Адема из свойств ψ . Однако это трудно и мы не станем делать никаких попыток в этом направлении.

В заключение сформулируем соответствующие результаты для спектра $H(\mathbb{Z}_p)$, p — нечетное простое число. Начнем с аналога теоремы 18.12.

18.21. Теорема. Для любых $i \geq 0$, $q \in \mathbb{Z}$, $(X, A) \in \mathcal{T}^2$ существует естественный гомоморфизм

$$P^i: H^q(X, A; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^{q+2i(p-1)}(X, A; \mathbb{Z}_p),$$

обладающий следующими свойствами:

- a) $P^0 = 1$;
- b) если $x \in H^{2n}(X, A; \mathbb{Z}_p)$, то $P^n x = x^p$;
- c) если $x \in H^n(X, A; \mathbb{Z}_p)$, то $P^i x = 0$ для $2i > n$;
- d) $\delta P^i = P^i \delta$;
- e) $P^i(xy) = \sum_{j+k=i} P^j x \cdot P^k y$.

Для любого нечетного простого p имеется гомоморфизм Бокштейна β , ассоциированный с точной последовательностью коэффициентов

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_{p^2} \rightarrow \mathbb{Z}_p \rightarrow 0.$$

Имеется простое описание пространства $H(\mathbb{Z}_p, 1)$. Без труда проверяется, что бесконечномерная сфера S^∞ стягиваема и что на ней существует вполне разрывное свободное действие группы $\mathbb{Z}_p$. Таким образом, $L = S^\infty / \mathbb{Z}_p$ есть $H(\mathbb{Z}_p, 1)$. Можно показать, что

$$H^*(L; \mathbb{Z}_p) \cong E(x) \otimes \mathbb{Z}_p[y], \quad x \in H^1(L; \mathbb{Z}_p), \quad y \in H^2(L; \mathbb{Z}_p),$$

где $\beta x = -y$, $\beta y = 0$ и $E(x)$ обозначает внешнюю алгебру.

Рассмотрим последовательности $I = (e_0, s_1, e_1, s_2, \dots, s_k, e_k)$ с $s_i \in \mathbb{N}$, $e_i = 0$ или 1 и мономы

$$P^I = \beta^{e_0} P^{s_1} \beta^{e_1} P^{s_2} \dots P^{s_k} \beta^{e_k}.$$

Последовательность I и моном P^I называются *допустимыми*, если $s_i \geq p s_{i+1} + e_i$, $i \geq 1$. Имеет место следующий аналог теоремы 18.15.

18.22. Теорема. $A^* = H(\mathbb{Z}_p)^*(H(\mathbb{Z}_p))$ имеет $\mathbb{Z}_p$ -базис, состоящий из допустимых мономов P^I .

Пусть $\xi_j \in A_* = H(\mathbb{Z}_p)_*(H(\mathbb{Z}_p))$ — элемент, двойственный к P^{J_k} , где $J_k = (0, p^{k-1}, 0, p^{k-2}, 0, \dots, 0, p, 0, 1, 0)$ и $\tau_k \in A_*$ — элемент, двойственный к $P^{J'_k}$, где $J'_k = (0, p^{k-1}, 0, \dots, p, 0, 1, 1)$.

Тогда

$$\deg \xi_k = 2(p^k - 1), \quad \deg \tau_k = 2p^k - 1.$$

Так как τ_k имеет нечетную степень, то $\tau_k^2 = 0$ для любого k . Элементы τ_k , ξ_k можно описать так же, так образы элементов x , y при естественном гомоморфизме

$$\hat{H}_*(L; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H_*(H(\mathbb{Z}_p); \mathbb{Z}_p).$$

18.23. Теорема. *Имеет место изоморфизм алгебр Хопфа $A_* = H(\mathbb{Z}_p)_* (H(\mathbb{Z}_p)) \cong E(\tau_0, \tau_1, \dots) \otimes \mathbb{Z}_p[\xi_1, \xi_2, \dots]$, где справа коумножение ψ задается формулами*

$$\psi \xi_k = \sum_{i+j=k} \xi_i^{p^j} \otimes \xi_j, \quad \psi \tau_k = \tau_k \otimes 1 + \sum_{i+j=k} \xi_i^{p^j} \otimes \tau_j.$$

Несмотря на полное сходство формулировок, не нужно думать, что доказательства теорем 18.21—18.23 полностью аналогичны доказательствам теорем 18.12, 18.15 и 18.20. Это одна из тех довольно часто встречающихся в математике ситуаций, когда простое число 2 является исключительным. Тем не менее, построение операций P^i настолько аналогично вышеизложенному построению операций Sq^i , что в работе [75] эти построения излагаются параллельно.

18.24. Следующий пример показывает, как работают когомологические операции в теории гомотопий. Предположим, что отображение $f: S^{n-1} \rightarrow S^m$ гомотопно постоянному отображению f_0 . Нетрудно проверить, что тогда пространство $X = S^m \cup_f e^n$ гомотопически эквивалентно $S^m \cup_{f_0} e^n = S^m \vee S^n$. Векторное пространство $\hat{H}^*(X; \mathbb{Z}_2)$ имеет две образующие над $\mathbb{Z}_2$: $x \in \hat{H}^n(X; \mathbb{Z}_2)$ и $y \in \hat{H}^m(X; \mathbb{Z}_2)$, а так как $X \simeq S^m \vee S^n$, то

$$\hat{H}^*(X; \mathbb{Z}_2) \cong \hat{H}^*(S^m; \mathbb{Z}_2) \oplus \hat{H}^*(S^n; \mathbb{Z}_2).$$

В самом деле, проекция $p: S^m \vee S^n \rightarrow S^m$ переводит образующую $g_m \in \hat{H}^m(S^m; \mathbb{Z}_2)$ в $x \in \hat{H}^m(X, \mathbb{Z}_2)$. Таким образом, для $a \in A^q$, $q > 0$, мы имеем $ax = ap^*(g_m) = p^*(ag_m) = p^*(0) = 0$. Следовательно, если для некоторого отображения $f: S^{n-1} \rightarrow S^m$ существует $a \in A^*$ с $ax = y$, то $f \neq f_0$.

В качестве примера покажем, что надстройка $S\eta: S^4 \rightarrow S^3$ отображения Хопфа $\eta: S^3 \rightarrow S^2$ не гомотопна постоянному отображению. Этот результат не следует из теоремы Фрейденшталя о надстройке, так как гомоморфизм $\Sigma: \pi_3(S^2, *) \rightarrow \pi_4(S^3, *)$ не является мономорфизмом. Пространство $X = S^2 \cup_\eta e^4$ есть не что иное, как $\mathbb{CP}^2$, и поэтому $H^*(X; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[y]/(y^3)$. В частности, $y^2 = Sq^2 y$. Далее, $SX = S^3 \cup_{S\eta} e^5$, и существуют образующие $x = \sigma^{-1}(y) \in \hat{H}^3(SX; \mathbb{Z}_2)$, $z = \sigma^{-1}(y^2) \in \hat{H}^5$. Из стабильности операций Sq^2 вытекает, что

$$Sq^2 x = Sq^2 \sigma^{-1}(y) = \sigma^{-1} Sq^2(y) = \sigma^{-1}(y^2) = z.$$

Следовательно, $S\eta$ не гомотопно постоянному отображению. На самом деле можно показать, что $\pi_4(S^3, *) \cong \mathbb{Z}_2$ и, значит, группа $\pi_4(S^3, *)$ порождена элементом $[S\eta]$.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В этой главе я отклонился от тех идей, на которых основывались вычисления алгебр $E_*(E)$, $E = MU, MSp, K, KO$. Если бы проводить вычисления алгебры A_* в духе главы 17, мы должны были бы вычислить $H_*(H(\mathbb{Z}_p, n); \mathbb{Z}_p)$ для $n \geq 1$, а затем перейти к пределу: $H_q(H(\mathbb{Z}_p); \mathbb{Z}_p) = \varinjlim_n H_{q+n}(H(\mathbb{Z}_p, n); \mathbb{Z}_p)$.

Иными словами, мы должны были бы использовать метод Картана [37]. Избранный мною подход мотивирован тем, что мне не удалось изложить подходящую технику из гомологической алгебры в достаточно простой форме. Достоинством его является тот факт, что мы в явном виде строим квадраты Стинрода, а не вводим их как некоторые элементы в двойственном базисе для A^* . Однако таким путем вряд ли можно получить доказательство теоремы 18.23 для простых нечетных чисел¹⁾. Поэтому я очень рекомендую любознательному читателю заглянуть в труды семинара Картана.

ССЫЛКИ НА ЛИТЕРАТУРУ

1. Картан [37].
2. Милнор [55].
3. Мошер, Тангора [62].
4. Серр [69].
5. Спеньер [72].
6. Стинрод, Эпштейн [75].

¹⁾ См. по этому поводу работу М. М. Постникова [7*]. — *Прим. ред.*

СПЕКТРАЛЬНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ АДАМСА
И e -ИНВАРИАНТ

Как уже отмечалось в главе 17, алгебры Хопфа $A(E)_* = E_*(E)$ и $A(E)^* = E^*(E)$ оказываются очень полезными при доказательстве несуществования отображений $f: X \rightarrow Y$ с заданными свойствами (если такое отображение f существует, то гомоморфизм $f_*: E_*(X) \rightarrow E_*(Y)$ должен быть $A(E)_*$ -линейным). Кроме того, в некоторых случаях эти алгебры позволяют получить удовлетворительное описание образов гомоморфизма Гуревича

$$H: [X, Y] \rightarrow \text{Hom}(E_*(X), E_*(Y))$$

и гомоморфизма Бордмана

$$B: [X, Y] \rightarrow \text{Hom}(E^*(Y), E^*(X)).$$

Однако возможности алгебр Хопфа $A(E)_*$ и $A(E)^*$ простираются значительно дальше. Адамсу удалось показать, что с их помощью можно получить различные теоремы существования. Именно, Адамс построил спектральную последовательность

$$\text{Ext}_{E_*(E)}^{s, t}(E_*(X), E_*(Y)) \Rightarrow [X, Y]_*,$$

член E_2 которой имеет чисто алгебраическую природу ($\text{Ext}_{E_*(E)}^{s, t}(E_*(X), E_*(Y))$ представляют собой производные функторы для $\text{Hom}_{E_*(E)}^t(E_*(X), E_*(Y))$) и которая сходится к полугеометрическому объекту $[X, Y]_* = [\Sigma^n X, Y]$. Краевой гомоморфизм этой спектральной последовательности совпадает с гомоморфизмом Гуревича

$$H: [X, Y]_* \rightarrow \text{Hom}_{E_*(E)}^n(E_*(X), E_*(Y)).$$

Другими словами, структуры $E_*(E)$ -комодулей на $E_*(X)$, $E_*(Y)$ почти определяют (не забудьте о дифференциалах!) группы $[X, Y]_*$.

Спектральную последовательность Адамса, как она традиционно называется, можно рассматривать и с иной точки зрения. Именно, можно считать, что эта спектральная последовательность измеряет отклонение гомоморфизма Гуревича от изоморфизма.

Подобно формуле 13.31 Кюннета, спектральная последовательность Адамса является смесью алгебры $(\text{Ext}_{E_*(E)}^{**}(M, N))$ и геометрии $([X, Y]_*)$. Мы начнем с необходимой алгебраической подготовки.

В главе 13 было показано, как неточность функтора $\text{Hom}(-, -)$ приводит к производному функтору $\text{Ext}(A, B)$ абелевых групп A, B . Аналогичная конструкция годится и для произвольных левых

модулей M , N над кольцом R , с той лишь оговоркой, что, вообще говоря, мы при этом получим целую вереницу производных функторов $\text{Ext}_R^p(-, -)$, $p \geq 0$.

19.1. Определение. R -модуль P называется *проективным*, если для любой диаграммы модулей

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ & \downarrow \pi & \\ B & \xrightarrow{\gamma} C & \longrightarrow 0 \end{array}$$

(γ — эпиморфизм) существует такой гомоморфизм R -модулей $\pi': P \rightarrow B$, что $\gamma \cdot \pi' = \pi$.

19.2. Пример. Каждый свободный R -модуль проективен.

Теперь мы в состоянии построить модули $\text{Ext}_R^p(M, N)$. С этой целью рассмотрим *проективную резольвенту* модуля M , т. е. такую точную последовательность R -модулей

$$0 \leftarrow M \xleftarrow{e} X_0 \xleftarrow{d_0} X_1 \xleftarrow{d_1} X_2 \leftarrow \dots,$$

в которой все модули X_k ($k \geq 0$) проективны. Такая резольвента всегда существует; более того, мы можем даже сделать все модули X_k свободными. Действительно, возьмем в качестве X_0 свободный R -модуль, порожденный всеми элементами из M , и пусть e — очевидный гомоморфизм. Применив эту же конструкцию к $\ker e$, получим эпиморфизм $X_1 \xrightarrow{d_0} \ker e$ со свободным модулем X_1 и т. д. Итак, пусть задана проективная резольвента модуля M

$$0 \leftarrow M \leftarrow X_0 \leftarrow X_1 \leftarrow X_2 \leftarrow \dots$$

Тогда для любого R -модуля N мы имеем коцепной комплекс

$$\text{Hom}_R(X_0, N) \xrightarrow{d_0^\#} \text{Hom}_R(X_1, N) \xrightarrow{d_1^\#} \text{Hom}_R(X_2, N) \rightarrow \dots$$

Рассмотрим когомологии этого комплекса и положим

$$\text{Ext}_R^p(M, N) = H^p(\text{Hom}_R(X_*, N)), \quad p \geq 0.$$

Тот факт, что это определение не зависит от выбора проективной резольвенты, требует дополнительного исследования.

Пусть $f: M \rightarrow M'$ — некоторый R -гомоморфизм и

$$0 \leftarrow M \xleftarrow{e} X_0 \xleftarrow{d_0} X_1 \xleftarrow{d_1} X_2 \leftarrow \dots,$$

$$0 \leftarrow M' \xleftarrow{e'} X'_0 \xleftarrow{d'_0} X'_1 \xleftarrow{d'_1} X'_2 \leftarrow \dots$$

— проективные резольвенты модулей M и M' соответственно. Если рассматривать $\{X_i, d_i\}$ и $\{X'_i, d'_i\}$ как цепные комплексы, то можно найти такое цепное отображение $\{f_i: X_i \rightarrow X'_i\}$, что $e' \cdot f_0 = f \cdot e$, и любые два таких цепных отображения цепно гомо-

топны. Это утверждение доказывается точно так же, как теорема 13.26 об ациклических моделях. Тот факт, что модули X_i , вообще говоря, не свободны, не имеет здесь большого значения: для доказательства вполне достаточно проективности. Полагая $f = 1_M$, мы видим, что любые две проективные резольвенты модуля M цепно эквивалентны и, следовательно, модули $\text{Ext}_R^p(M, N)$ определены корректно.

Для произвольного $f: M \rightarrow M'$ цепное отображение $\{f_i\}$ задает гомоморфизм

$$\text{Ext}_R^p(f, 1): \text{Ext}_R^p(M', N) \rightarrow \text{Ext}_R^p(M, N), \quad p \geq 0.$$

Если $g: M' \rightarrow M''$ — другой R -гомоморфизм, то легко видеть, что $\text{Ext}_R^p(f, 1) \cdot \text{Ext}_R^p(g, 1) = \text{Ext}_R^p(g \circ f, 1)$. Кроме того, $\text{Ext}_R^p(1, 1) = 1$, так что $\text{Ext}_R^p(-, -)$ является кофунктором относительно первого аргумента. Легко видеть, что $\text{Ext}_R^p(-, -)$ — функтор относительно второго аргумента.

19.3. Предложение. *Функторы $\text{Ext}_R^p(-, -)$ обладают следующими свойствами:*

- i) $\text{Ext}_R^0(M, N) = \text{Hom}_R(M, N)$;
- ii) если модуль M проективен, то $\text{Ext}_R^p(M, N) = 0$ для $p > 0$;
- iii) любая точная последовательность R -модулей

$$0 \rightarrow N_1 \rightarrow N_2 \rightarrow N_3 \rightarrow 0$$

индуцирует длинную точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}_R(M, N_1) \rightarrow \text{Hom}_R(M, N_2) \rightarrow \text{Hom}_R(M, N_3) \rightarrow \\ \text{Ext}_R^1(M, N_1) \rightarrow \text{Ext}_R^1(M, N_2) \rightarrow \text{Ext}_R^1(M, N_3) \rightarrow \dots \\ \text{Ext}_R^2(M, N_2) \rightarrow \text{Ext}_R^2(M, N_3) \rightarrow \text{Ext}_R^{p+1}(M, N_1) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Доказательство. i) Так как отрезок $0 \leftarrow M \leftarrow X_0 \leftarrow X_1$ проективной резольвенты модуля M является точной последовательностью, то

$$\text{Hom}_R(M, N) = \ker \text{Hom}(d_0, 1) = H^0(\text{Hom}_R(X_*, N)) = \text{Ext}_R^1(M, N).$$

ii) Если модуль M проективен, то $0 \leftarrow M \xleftarrow{1} M \leftarrow 0$ является его проективной резольвентой, и поэтому $\text{Ext}_R^p(M, N) = 0$ для $p > 0$.

iii) Поскольку модули X_i проективны, мы получаем короткую точную последовательность цепных комплексов

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(X_*, N_1) \rightarrow \text{Hom}_R(X_*, N_2) \rightarrow \text{Hom}_R(X_*, N_3) \rightarrow 0,$$

так что предложение 19.3, iii) — это порожденная ею точная когомологическая последовательность.

Изложенная конструкция допускает следующее важное обобщение. Пусть R — градуированное коммутативное кольцо с единицей, A — градуированная алгебра над R и M, N — левые градуированные A -модули. Тогда определены группы $\text{Hom}_A^q(M, N)$ гомоморфизмов A -модулей $f: M \rightarrow N$ степени q , т. е. $f(M_n) \subset N_{n+q}$, $n \in \mathbb{Z}$. Взяв резольвенту модуля M

$$0 \leftarrow M \xrightarrow{e} X_0 \xleftarrow{d_0} X_1 \xleftarrow{d_1} X_2 \leftarrow \dots,$$

в которой все X_i являются градуированными проективными A -модулями (определение проективности в категории градуированных модулей формально такое же, как в категории модулей), мы получим для каждого $q \in \mathbb{Z}$ коцепной комплекс

$$\text{Hom}_A^q(X_0, N) \rightarrow \text{Hom}_A^q(X_1, N) \rightarrow \dots$$

Тогда

$$\text{Ext}_A^{p,q}(M, N) = H^p(\text{Hom}_A^q(X_*, N)), \quad p \geq 0, \quad q \in \mathbb{Z}.$$

19.4. Определение. Если $\phi: A \otimes_R A \rightarrow A$ — умножение в R -алгебре A и V — некоторый R -модуль, то можно снабдить $A \otimes_R V$ структурой A -модуля, задавая действие A на $A \otimes_R V$ с помощью композиции отображений

$$A \otimes_R (A \otimes_R V) \cong (A \otimes_R A) \otimes_R V \xrightarrow{\phi \otimes 1} A \otimes_R V.$$

Модули вида $A \otimes_R V$ называются *расширенными* A -модулями.

Расширенные A -модули удобны по следующей причине.

19.5. Предложение. Для произвольных R -модуля V и A -модуля N существует естественный изоморфизм

$$\Phi: \text{Hom}_A^q(A \otimes_R V, N) \cong \text{Hom}_R^q(V, N), \quad q \in \mathbb{Z}.$$

Если A является плоским R -модулем, то имеет место естественный изоморфизм

$$\text{Ext}_A^{p,q}(A \otimes_R V, N) \cong \text{Ext}_R^{p,q}(V, N), \quad p \geq 0, \quad q \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Определим гомоморфизмы

$$\Phi: \text{Hom}_A^q(A \otimes_R V, N) \rightarrow \text{Hom}_R^q(V, N),$$

$$\Psi: \text{Hom}_R^q(V, N) \rightarrow \text{Hom}_A^q(A \otimes_R V, N),$$

полагая

$$\Phi(f)(v) = f(1 \otimes v), \quad f \in \text{Hom}_A^q(A \otimes_R V, N), \quad v \in V,$$

$$\Psi(g)(a \otimes v) = ag(v), \quad g \in \text{Hom}_R^q(V, N); \quad a \in A, \quad v \in V.$$

Очевидно, что эти гомоморфизмы обратны друг другу.

Существует более изысканное описание гомоморфизмов Φ и Ψ , достоинством которого является то, что оно допускает естественную

дуализацию. Пусть $\eta: R \rightarrow A$ — единица алгебры A . Тогда $\Phi(f)$ является композицией

$$V \cong R \otimes_R V \xrightarrow{\eta \otimes 1} A \otimes_R V \xrightarrow{f} N.$$

Обозначим A -действие на N через $\phi_N: A \otimes_R N \rightarrow N$. Тогда $\Psi(g)$ представляет собой композицию

$$A \otimes_R V \xrightarrow{1 \otimes g} A \otimes_R N \xrightarrow{\phi_N} N.$$

Предположим теперь, что A является плоским R -модулем, и пусть

$$0 \leftarrow V \leftarrow U_0 \leftarrow U_1 \leftarrow \dots$$

— проективная резольвента R -модуля V . Тогда

$$0 \leftarrow A \otimes_R V \leftarrow A \otimes_R U_0 \leftarrow A \otimes_R U_1 \leftarrow \dots$$

является проективной резольвентой A -модуля $A \otimes_R V$ (покажите, что A -модули $A \otimes_R U_i$ проективны!). Таким образом, можно вычислять $\text{Ext}_A^{p,q}(A \otimes_R V, N)$, используя коцепной комплекс $\text{Hom}_A^q(A \otimes_R U_i, N) \cong \text{Hom}_R^q(U_i, N)$, откуда немедленно следует изоморфизм

$$\text{Ext}_A^{p,q}(A \otimes_R V, N) \cong \text{Ext}_R^{p,q}(V, N). \quad \square$$

Мы можем теперь дуализировать все введенные выше понятия и конструкции. Рассмотрим коалгебру C над R и C -комодули K, L . Пусть

$$0 \leftarrow K \leftarrow X_0 \leftarrow X_1 \leftarrow X_2 \leftarrow \dots$$

— резольвента для K , все члены X_i которой являются проективными C -комодулями (определение проективного комодуля формально ничем не отличается от определения проективного модуля). Положим

$$\text{Ext}_C^{p,q}(K, L) = H^p(\text{Hom}_C^q(X_*, L)), \quad p \geq 0, \quad q \in \mathbb{Z}.$$

19.6. Определение. Если $\psi: C \rightarrow C \otimes_R C$ — коумножение в C и V — некоторый R -модуль, то можно снабдить $C \otimes_R V$ структурой C -комодуля, задавая действие C на $C \otimes_R V$ с помощью композиции отображений

$$C \otimes_R V \xrightarrow{\psi \otimes 1} (C \otimes_R C) \otimes_R V \cong C \otimes_R (C \otimes_R V).$$

Произвольный C -комодуль такого вида называется *расширенным C -комодулем*.

19.7. Предложение. Для любых R -модуля V и C -комодуля K существует естественный изоморфизм

$$\Phi: \text{Hom}_C^q(K, C \otimes_R V) \cong \text{Hom}_R^q(K, V), \quad q \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно, имеют место естественные изоморфизмы

$$\mathrm{Ext}_C^{p,q}(K, C \otimes_R V) \cong \mathrm{Ext}_R^{p,q}(K, V), \quad p \geq 0, \quad q \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Взаимно обратные изоморфизмы Φ и Ψ получаются дуализацией конструкции предложения 19.5. Если

$$0 \leftarrow K \leftarrow X_0 \leftarrow X_1 \leftarrow X_2 \leftarrow \dots$$

— проективная резольвента C -комодуля K , то

$$\mathrm{Ext}_C^{p,q}(K, C \otimes_R V) = H^p(\mathrm{Hom}_C^q(X_*, C \otimes_R V)) \cong H^p(\mathrm{Hom}_R^q(X_*, V)).$$

Пусть $\gamma: A \rightarrow B$ — некоторый эпиморфизм R -модулей A, B . Тогда квадрат

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_R^q(X_i, A) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R^q(X_i, B) \\ \parallel & & \parallel \\ \mathrm{Hom}_C^q(X_i, C \otimes_R A) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_C^q(X_i, C \otimes_R B) \end{array}$$

коммутативен. Так как последовательность

$$C \otimes_R A \rightarrow C \otimes_R B \rightarrow 0$$

точна и C -комодули X_i проективны над C , то отображение $\mathrm{Hom}_C^q(X_i, C \otimes_R A) \rightarrow \mathrm{Hom}_C^q(X_i, C \otimes_R B)$ является эпиморфизмом. Следовательно, отображение $\mathrm{Hom}_R^q(X_i, A) \rightarrow \mathrm{Hom}_R^q(X_i, B)$ — также эпиморфизм, и, значит, R -модули X_i проективны над R . Но тогда

$$H^p(\mathrm{Hom}_R^q(X_*, V)) \cong \mathrm{Ext}_R^{p,q}(K, V). \quad \square$$

При некоторых ограничениях на модуль K возможна иная конструкция функтора $\mathrm{Ext}_C^{p,q}(K, L)$, которая будет полезна для построения спектральной последовательности Адамса.

19.8. Предложение. Предположим, что C -комодуль K является проективным R -модулем. Тогда возможна следующая конструкция для $\mathrm{Ext}_C^{p,q}(K, L)$: если

$$0 \rightarrow L \rightarrow C \otimes_R V_0 \rightarrow C \otimes_R V_1 \rightarrow \dots$$

— точная последовательность C -комодулей (где V_i — произвольные R -модули), то

$$\mathrm{Ext}_C^{p,q}(K, L) \cong H^p(\mathrm{Hom}_C^q(K, C \otimes_R V_*)), \quad p \geq 0, \quad q \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Положим

$$Q_i = \mathrm{im}[C \otimes_R V_{i-1} \rightarrow C \otimes_R V_i] = \ker[C \otimes_R V_i \rightarrow C \otimes_R V_{i+1}].$$

Тогда получаются короткие точные последовательности

$$0 \rightarrow L \rightarrow C \otimes_R V_0 \rightarrow Q_1 \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow Q_1 \rightarrow C \otimes_R V_1 \rightarrow Q_2 \rightarrow 0,$$

$$\dots$$

Эти короткие точные последовательности определяют длинную точную последовательность

$$\dots \rightarrow \text{Ext}_C^{p-1, q}(K, C \otimes_R V_1) \rightarrow \text{Ext}_C^{p-1, q}(K, Q_{i+1}) \rightarrow \\ \rightarrow \text{Ext}_C^p(K, Q_i) \rightarrow \text{Ext}_C^p(K, C \otimes_R V_i) \rightarrow \dots$$

Так как R -модуль K проективен, то $\text{Ext}_C^{p, q}(K, C \otimes_R V_i) \cong \text{Ext}_R^{p, q}(K, V_i)$ при $p \geq 1$. Таким образом, мы получаем изоморфизм

$$\text{Ext}_C^{p, q}(K, Q_i) \cong \text{Ext}_C^{p-1, q}(K, Q_{i+1}), \quad p \geq 2.$$

В частности,

$$\text{Ext}_C^{p, q}(K, L) \cong \text{Ext}_C^{p-1, q}(K, Q_1) \cong \dots \cong \text{Ext}_C^{1, q}(K, Q_{p-1}).$$

Кроме того, мы имеем точные последовательности

$$\text{Hom}_C^q(K, C \otimes_R V_{p-1}) \rightarrow \text{Hom}_C^q(K, Q_p) \rightarrow \text{Ext}_C^{1, q}(K, Q_{p-1}) \rightarrow 0$$

и

$$0 \rightarrow \text{Hom}_C^q(K, Q_p) \rightarrow \text{Hom}_C^q(K, C \otimes_R V_p) \rightarrow \text{Hom}_C^q(K, C \otimes_R V_{p+1}).$$

Поэтому

$$\text{Ext}_C^{1, q}(K, Q_{p-1}) = \text{Hom}_C^q(K, Q_p) / \text{im } \text{Hom}_C^q(K, C \otimes_R V_{p-1}) \cong \\ \cong \frac{\ker [\text{Hom}_C^q(K, C \otimes_R V_p) \rightarrow \text{Hom}_C^q(K, C \otimes_R V_{p+1})]}{\text{im } [\text{Hom}_C^q(K, C \otimes_R V_{p-1}) \rightarrow \text{Hom}_C^q(K, C \otimes_R V_p)]} \cong \\ \cong H^p(\text{Hom}_C^q(K, C \otimes_R V_*)). \quad \square$$

Этим завершается наше алгебраическое введение. Обратимся теперь к геометрии. Мы начали эту главу с описания наиболее общей формы спектральной последовательности Адамса: ее член E_2 имеет вид $E_2^{s, t} = \text{Ext}_{E_*}^{s, t}(E_*(X), E_*(Y))$, и она сходится к $[X, Y]_*$ (при некоторых ограничениях на E). На практике эта общая форма спектральной последовательности Адамса почти никогда не используется; обычно полагают $X = S^0$ и получают спектральную последовательность, сходящуюся к $\pi_*^S(Y)$. Так что, если для начала взять $X = S^0$, то мы сможем оградить себя от многих сложных деталей, сохранив при этом все существенные идеи.

19.9. Теорема. Пусть E — такой кольцевой спектр, что $E_*(E)$ является плоским $\tilde{E}_*(S^0)$ -модулем. Для любого спектра Y существует спектральная последовательность $\{E_r^{s, t}, d_r\}$, обладающая следующими свойствами:

i) дифференциал d_r имеет вид $d_r: E_r^{s,t} \rightarrow E_r^{s+r, t+r-1}$ при всех r, s, t ;

ii) $E_2^{s,t} \cong \text{Ext}_{E_*(E)}^{s,t}(\tilde{E}_*(S^0), E_*(Y))$;

iii) $E_{r+1}^{s,t} \subset E_r^{s,t}$ для $r > s+1$, так что можно ввести $E_\infty^{s,t} = \bigcap_{r>s+1} E_r^{s,t}$.

Существуют фильтрация

$$\pi_n(Y) = [\Sigma^n S^0, Y] = F^{0,n} \supset F^{1,n+1} \supset F^{2,n+2} \supset \dots \supset F^{s,n+s} \supset \dots$$

и

iv) мономорфизм $0 \rightarrow F^{s,t}/F^{s+1,t+1} \rightarrow E_\infty^{s,t}$, $s \geq 0$.

Краевой гомоморфизм $\pi_n(Y) \rightarrow E_\infty^{0,n} \rightarrow E_2^{0,n} \cong \text{Hom}_{E_*(E)}^n(\tilde{E}_*(S^0), E_*(Y))$ совпадает с гомоморфизмом Гуревича.

19.10. Замечание. В теореме не утверждается, что данная спектральная последовательность сходится к $\pi_*(Y)$; для этого необходимо обращение в нуль следующих групп:

a) $A^{s,t} = \text{coker}[F^{s,t}/F^{s+1,t+1} \rightarrow E_\infty^{s,t}]$, $s \geq 0$;

b) $D^n = \bigcap_{s \geq 0} F^{s,n+s}$.

Если $A^{s,t} = 0$ для всех s, t , то можно определить на группе $\pi_n(Y)/D^n$ фильтрацию

$$\pi_n(Y)/D^n = \hat{F}^{0,n} \supset \hat{F}^{1,n+1} \supset \dots \supset \hat{F}^{s,n+s} \supset \dots,$$

где $\hat{F}^{s,n+s} = F^{s,n+s}/D^n$, $s \geq 0$. Тогда мы по-прежнему будем иметь

$$\hat{F}^{s,t}/\hat{F}^{s+1,t+1} \cong F^{s,t}/F^{s+1,t+1} \cong E_\infty^{s,t} \text{ для всех } s, t,$$

но в то же время $\bigcap \hat{F}^{s,t} = 0$. Таким образом, если $A^{s,t}$ обращается в нуль, то спектральная последовательность сходится к группам $\pi_*(Y)/D^*$.

Далее мы покажем, что для $E = H(\mathbb{Z}_p)$ группы $A^{s,t}$ равны нулю, а D^n представляет собой подгруппу в $\pi_n(Y)$, состоящую из всех элементов конечных и взаимно простых с p порядков. В общем случае приходится вводить дополнительные ограничения на E и Y , гарантирующие выполнение условия $A^{s,t} = 0$ для всех s, t .

Доказательство теоремы 19.9. Ясно, что $\tilde{E}_*(S^0)$ как модуль над кольцом $\tilde{E}_*(S^0)$ проективен и даже свободен. Поэтому мы можем использовать для вычисления $\text{Ext}_{\tilde{E}_*(E)}^{s,t}(\tilde{E}_*(S^0), E_*(Y))$ предложение 19.8: все, что нам нужно, — это найти резольвенту

$$0 \rightarrow E_*(Y) \rightarrow C \otimes_R V_0 \rightarrow C \otimes_R V_1 \rightarrow \dots,$$

состоящую из расширенных C -комодулей, где $R = \tilde{E}_*(S^0)$, $C = E_*(E)$. Это соображение приводит к следующей конструкции.

Пусть $Y_0 = Y$. Рассмотрим корасслоенную последовательность

$$Y_0 \xrightarrow{f_0} E \wedge Y_0 \rightarrow Y_1 \rightarrow \Sigma Y_0 \rightarrow \dots,$$

где f_0 — композиция $Y_0 \cong S^0 \wedge Y_0 \xrightarrow{\iota \wedge 1} E \wedge Y_0$. Повторим этот процесс: если пространство Y_n уже построено, то корасслоенная последовательность

$$Y_n \xrightarrow{f_n} E \wedge Y_n \rightarrow Y_{n+1} \rightarrow \Sigma Y_n \rightarrow \dots$$

определяет пространство Y_{n+1} .

Заметим, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi_*(E \wedge Y_n) & \xrightarrow{1} & \pi_*(E \wedge Y_n) \\ \parallel & \searrow f_{n*} & \uparrow (\mu \wedge 1)_* \\ \pi_*(E \wedge S^0 \wedge Y_n) & \xrightarrow{(1 \wedge \iota \wedge 1)_*} & \pi_*(E \wedge E \wedge Y_n), \end{array}$$

где μ — умножение в E , коммутативна. Следовательно,

$$E_*(Y_n) \xrightarrow{f_{n*}} E_*(E \wedge Y_n)$$

— мономорфизм. Таким образом, точная последовательность

$$\dots \rightarrow E_q(Y_n) \rightarrow E_q(E \wedge Y_n) \rightarrow E_q(Y_{n+1}) \rightarrow E_{q-1}(Y_n) \rightarrow \dots$$

расщепляется на короткие точные последовательности

$$0 \rightarrow E_q(Y_n) \rightarrow E_q(E \wedge Y_n) \rightarrow E_q(Y_{n+1}) \rightarrow 0.$$

Склеивая их вместе, мы получаем длинную точную последовательность

$$0 \rightarrow E_*(Y) \rightarrow E_*(E \wedge Y_0) \rightarrow E_*(E \wedge Y_1) \rightarrow \dots$$

Более того, согласно слабой теореме 13.75 Кюннета

$$E_*(E \wedge Y_n) \cong E_*(E) \otimes_{\tilde{E}_*(S^0)} E_*(Y_n),$$

и поэтому комодули $E_*(E \wedge Y_n)$ в действительности являются расширенными S -комодулями. Таким образом, мы получаем резольвенту, подходящую для построения $\text{Ext}_C^{s,t}$, и, значит,

$$\text{Ext}_C^{s,t}(R, E_*(Y)) = H^s(\text{Hom}_C^t(\tilde{E}_*(S^0), E_*(E \wedge Y_n))).$$

Спектр Y_n доставляет нам последовательность

$$Y = Y_0 \leftarrow \Sigma^{-1}Y_1 \leftarrow \Sigma^{-2}Y_2 \leftarrow \dots \leftarrow \Sigma^{-n}Y_n \leftarrow \dots,$$

называемую *фильтрацией Адамса* пространства Y . Ее можно превратить в фильтрацию в обычном смысле, заменяя Y бесконечным телескопом отображений. Обозначим через $Y_s/Y_{s'}$ кослой корасслоения $\Sigma^{s-s'}Y_{s'} \rightarrow Y_s$ для $s \leq s'$. В частности, мы имеем $Y_s/Y_{s+1} = E \wedge Y_s$. Теперь мы, в соответствии с общей схемой построения спектральной последовательности по фильтрации, можем построить спект-

ральную последовательность, ассоциированную с фильтрацией Адамса пространства Y .

Положим

$$Z_r^{s,t} = \text{im} [\pi_r(Y_s/Y_{s+r}) \rightarrow \pi_t(Y_s/Y_{s+1})];$$

$$B_r^{s,t} = \text{im} [\Delta: \pi_{t-r+2}(Y_{s-r+1}/Y_s) \rightarrow \pi_t(Y_s/Y_{s+1})], \quad r \leq s+1,$$

где Δ представляет собой композицию

$$\pi_{t-r+2}(Y_{s-r+1}/Y_s) \rightarrow \pi_t(Y_s) \rightarrow \pi_t(Y_s/Y_{s+1});$$

$$\bar{Z}_\infty^{s,t} = \text{im} [\pi_t(Y_s) \rightarrow \pi_t(Y_s/Y_{s+1})];$$

$$B_r^{s,t} = B_\infty^{s,t} = \text{im} [\Delta: \pi_{t-r+1}(Y/Y_s) \rightarrow \pi_t(Y_s/Y_{s+1})], \quad r > s+1;$$

$$F^{s,t} = \text{im} [\pi_t(Y_s) \rightarrow \pi_{t-s}(Y)];$$

$$A^{s,t} = \text{im} [\pi_t(Y_s/Y_{s+1}) \rightarrow \pi_t(Y_{s+1})] \cap \bigcap_{r \geq 1} \text{im} [\pi_{t+r}(Y_{s+r+1}) \rightarrow \pi_t(Y_{s+1})].$$

Тогда имеют место включения

$$0 = B_1^{s,t} \subset B_2^{s,t} \subset \dots \subset B_r^{s,t} \subset B_{r+1}^{s,t} \subset \dots$$

$$B_\infty^{s,t} \subset \bar{Z}_\infty^{s,t} \subset \dots \subset Z_{r+1}^{s,t} \subset Z_r^{s,t} \subset \dots \subset Z_1^{s,t}.$$

Например, включение $B_r^{s,t} \subset B_{r+1}^{s,t}$ следует из коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \pi_{t-r+1}(Y_{s-r}/Y_s) & \xrightarrow{\Delta} & \pi_t(Y_s/Y_{s+1}), \\ \uparrow j_* & & \uparrow \\ \pi_{t-r+2}(Y_{s-r+1}/Y_s) & \xrightarrow{\Delta} & \pi_t(Y_s/Y_{s+1}), \end{array}$$

в которой $j: Y_{s-r+1}/Y_s \rightarrow Y_{s-r}/Y_s$ индуцировано отображениями $1: Y_s \rightarrow Y_s$ и $\Sigma^{-1}Y_{s-r+1} \rightarrow Y_{s-r}$. Обозначим через $Z_\infty^{s,t}$ пересечение $Z_\infty^{s,t} = \bigcap_{r \geq 1} Z_r^{s,t}$. Тогда

$$\bar{Z}_\infty^{s,t} \subset Z_\infty^{s,t} \subset Z_r^{s,t} \text{ для всех } r.$$

Положим

$$E_r^{s,t} = Z_r^{s,t}/B_r^{s,t}, \quad E_\infty^{s,t} = Z_\infty^{s,t}/B_\infty^{s,t}.$$

Так как $B_\infty^{s,t} = B_r^{s,t}$ при $r > s+1$, то существует мономорфизм

$$E_{r+1}^{s,t} \rightarrow E_r^{s,t}, \quad r > s+1,$$

и

$$E_\infty^{s,t} = \bigcap_{r > s+1} E_r^{s,t} = \text{inv lim } E_r^{s,t}.$$

Из коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \pi_{t+1}(Y_{s+1}) & & \\
 & & \downarrow & \searrow & \\
 \pi_{t-s+1}(Y/Y_s) & \longrightarrow & \pi_t(Y_s) & \longrightarrow & \pi_{t-s}(Y) \\
 & \searrow \Delta & \downarrow & & \\
 & & \pi_t(Y_s/Y_{s+1}) & &
 \end{array}$$

вытекает, что $F^{s,t}/F^{s+1,t+1} \cong Z_\infty^{s,t}/B_\infty^{s,t}$. Таким образом, мы получаем точную последовательность

$$0 \rightarrow Z_\infty^{s,t}/B_\infty^{s,t} \rightarrow Z_\infty^{s,t}/B_\infty^{s,t} \rightarrow Z_\infty^{s,t}/Z_\infty^{s,t} \rightarrow 0,$$

которая превратится в точную последовательность

$$0 \rightarrow F^{s,t}/F^{s+1,t+1} \rightarrow E_\infty^{s,t} \rightarrow Z_\infty^{s,t}/Z_\infty^{s,t} \rightarrow 0,$$

если показать, что $Z_\infty^{s,t}/Z_\infty^{s,t} = A^{s,t}$. Для этого рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \pi_t(Y_s) & & & & \\
 & \swarrow & \downarrow & \searrow & & & \\
 \cdots \rightarrow & \pi_t(Y_s/Y_{s+r}) & \rightarrow & \pi_t(Y_s/Y_{s+r-1}) & \rightarrow \cdots \rightarrow & \pi_t(Y_s/Y_{s+2}) & \rightarrow \pi_t(Y_s/Y_{s+1}) \\
 \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
 \cdots \rightarrow & \pi_{t+r-1}(Y_{s+r}) & \rightarrow & \pi_{t+r-2}(Y_{s+r-1}) & \rightarrow \cdots \rightarrow & \pi_{t+1}(Y_{s+2}) & \rightarrow \pi_t(Y_{s+1}) \\
 & \searrow & \downarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow \\
 & & \pi_{t-1}(Y_s) & & & &
 \end{array}$$

все «вертикальные» последовательности которой точны. Из этой диаграммы извлекается точная последовательность

$$0 \rightarrow Z_\infty^{s,t} \rightarrow Z_\infty^{s,t} \rightarrow A^{s,t} \rightarrow 0,$$

т. е. $A^{s,t} = Z_\infty^{s,t}/Z_\infty^{s,t}$.

Используя рассуждения, аналогичные тем, которые применялись при доказательстве теоремы 3.20, можно показать, что в коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \pi_t(Y_s/Y_{s+r+1}) & & \\
 & & \downarrow & \searrow & \\
 \pi_{t+1}(Y_{s+1}/Y_{s+r}) & \rightarrow & \pi_t(Y_s/Y_{s+r}) & \rightarrow & \pi_t(Y_s/Y_{s+1}) \\
 & \searrow \Delta & \downarrow & & \\
 & & \pi_{t+r-1}(Y_{s+r}/Y_{s+r+1}) & &
 \end{array}$$

строка и столбец являются точными последовательностями троек. Отсюда вытекает, что

$$Z_r^{s,t}/Z_{r+1}^{s,t} \cong B_r^{s,t+r-1}/B_r^{s,t+r-1}.$$

Определим теперь дифференциал d_r как гомоморфизм в коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc}
 Z_r^{s,t}/B_r^{s,t} & \xrightarrow{\text{эп}} & Z_r^{s,t}/Z_{r+1}^{s,t} \cong B_{r+1}^{s,t+r-1}/B_r^{s,t+r-1} \xrightarrow{\text{моно}} Z_r^{s+r,t+r-1}/B_r^{s+r,t+r-1} \\
 \parallel & & \parallel \\
 E_r^{s,t} & \xrightarrow{d_r} & E_r^{s+r,t+r-1}
 \end{array}$$

Из определения немедленно следует, что

$$\ker d_r = Z_{r+1}^{s,t}/B_r^{s,t}, \quad \text{im } d_r = B_{r+1}^{s,t}/B_r^{s,t}.$$

Таким образом,

$$H^*(E_r^{s,t}, d_r) = \frac{\ker d_r}{\text{im } d_r} \cong \frac{Z_{r+1}^{s,t}}{B_{r+1}^{s,t}} = E_{r+1}^{s,t}.$$

Заметим, что $E_1^{s,t} = Z_1^{s,t} = \pi_t(Y_s/Y_{s+1}) = \pi_t(E \wedge Y_s)$, а дифференциал d_1 — не что иное, как отображение

$$\pi_t(Y_s/Y_{s+1}) \rightarrow \pi_t(Y_{s+1}) \rightarrow \pi_t(Y_{s+1}/Y_{s+2}).$$

Более того, мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_t(E \wedge Y_s) & \xrightarrow{\quad} & \pi_t(Y_{s+1}) \xrightarrow{\quad} \\
 \downarrow h & & \downarrow h \\
 \text{Hom}_C^t(\tilde{E}_*(S^0), E_*(E \wedge Y_s)) & \rightarrow & \text{Hom}_C^t(\tilde{E}_*(S^0), E_*(Y_{s+1})) \rightarrow \\
 & & \pi_t(E \wedge Y_{s+1}) \\
 & & \downarrow h \\
 & & \text{Hom}_C^t(\tilde{E}_*(S^0), E_*(E \wedge Y_{s+1})).
 \end{array}$$

Далее, для любого спектра Z гомоморфизм Гуревича

$$h: \pi_t(E \wedge Z) \rightarrow \text{Hom}_C^t(\tilde{E}_*(S^0), E_*(E \wedge Z))$$

является изоморфизмом. Это вытекает из коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_t(E \wedge Z) & \xrightarrow{\quad \cong \quad} & \text{Hom}_{\tilde{E}_*(S^0)}^t(\tilde{E}_*(S^0), E_*(Z)) \\
 \downarrow h & & \downarrow \Psi \\
 \text{Hom}_C^t(\tilde{E}_*(S^0), E_*(E \wedge Z)) & \xleftarrow[\cong]{\text{Hom}(1, m_*)} & \text{Hom}_C^t(\tilde{E}_*(S^0), E_*(E) \otimes_{\tilde{E}_*(S^0)} E_*(Z)).
 \end{array}$$

Итак, мы видим, что комплекс

$$\dots \rightarrow E_1^{s-1, t} \xrightarrow{d_1} E_1^{s, t} \xrightarrow{d_1} E_1^{s+1, t} \rightarrow \dots$$

цепно изоморфен коцепному комплексу $\{\text{Hom}_C^t(\tilde{E}_*(S^0), E_*(E \wedge Y_s))\}$, используемому при вычислении групп $\text{Ext}_C^{s, t}(\tilde{E}_*(S^0), E_*(Y))$. Следовательно,

$$E_2^{s, t} \cong \text{Ext}_C^{s, t}(\tilde{E}_*(S^0), E_*(Y)).$$

После всего сказанного утверждение о краевом гомоморфизме практически очевидно.

Докажем теперь естественность рассмотренной выше конструкции. В процессе доказательства обнаружится, что спектральная последовательность не зависит от выбора фильтрации Адамса.

Пусть $f: Y \rightarrow Y'$ — некоторое отображение. Тогда мы имеем диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} Y_0 & \xrightarrow{1 \wedge 1} & E \wedge Y_0 & \longrightarrow & Y_1 & \longrightarrow & \Sigma Y_0 \longrightarrow \dots \\ \downarrow f_0 & & \downarrow 1 \wedge f_0 & & \downarrow f_1 & & \downarrow \Sigma f_0 \\ Y'_0 & \longrightarrow & E \wedge Y'_0 & \longrightarrow & Y'_1 & \longrightarrow & \Sigma Y'_0 \longrightarrow \dots \end{array}$$

Согласно лемме 8.31 можно дополнить ее таким отображением $f_1: Y_1 \rightarrow Y'_1$, что в результате она станет гомотопически коммутативной. По индукции построим отображения $f_i: Y_i \rightarrow Y'_i$ для всех $i \geq 0$. Отображения f_i определяют морфизм спектральных последовательностей. Неверно, что f_i определены однозначно (хотя бы с точностью до гомотопии), однако различные их выборы приводят к цепно гомотопным отображениям $\pi_t(E \wedge Y_i) \rightarrow \pi_t(E \wedge Y'_i)$ и, следовательно, к одному и тому же отображению членов E_2 . А это в свою очередь означает, что два отображения спектральных последовательностей совпадают на всех членах E_r , $r \geq 2$. Кроме того, если $f=1: Y \rightarrow Y$, то мы получаем цепную гомотопическую эквивалентность членов E_1 спектральных последовательностей, построенных по двум различным фильтрациям Адамса. Следовательно, все члены E_r при $r \geq 2$ изоморфны. $\square$

Изучим теперь условия, гарантирующие сходимость спектральной последовательности Адамса.

19.11. Предложение. Если $\pi_q(S^0) \xrightarrow{1 \wedge 1} \pi_q(E)$ — изоморфизм при $q \leq 0$, эпиморфизм при $q=1$ и если, кроме того, $\pi_q(Y)=0$ при $q < N$, где N — некоторое целое число, то $A^{s,t} = D^s = 0$ для всех s, t и, значит, спектральная последовательность Адамса сходится к $\pi_*(Y)$ (см. замечание 19.10).

Замечание. Первое предположение означает, что

$$\pi_q(E) = \begin{cases} 0, & q < 0, \\ \mathbb{Z}, & q = 0, \\ \mathbb{Z}_2 \text{ или } 0, & q = 1. \end{cases}$$

Спектры $E = MU$ и $E = MSpr$ удовлетворяют этому предположению.

Доказательство. Покажем вначале индукцией по n , что $\pi_r(Y_n) = 0$ для $r < N + 2n$, замечая, что это утверждение верно при $n=0$. Пусть $\pi_r(Y_n) = 0$ для $r < N + 2n$. Тогда имеет место точная последовательность

$$\begin{aligned} \pi_{2n+N+1}(Y_n) &\xrightarrow{(1 \wedge 1)_*} \pi_{2n+N+1}(E \wedge Y_n) \rightarrow \pi_{2n+N+1}(Y_{n+1}) \rightarrow \\ &\pi_{2n+N}(Y_n) \xrightarrow{(1 \wedge 1)_*} \pi_{2n+N}(E \wedge Y_n) \rightarrow \pi_{2n+N}(Y_{n+1}) \rightarrow \pi_{2n+N-1}(Y_n) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Согласно теореме 7.55 гомоморфизм Гуревича

$$(1 \wedge 1)_*: \pi_q(Y_n) \rightarrow \pi_q(E \wedge Y_n) = E_q(Y_n)$$

является изоморфизмом при $q \leq N + 2n$ и эпиморфизмом при $q = N + 2n + 1$. Следовательно, $\pi_{2n+N+1}(Y_{n+1}) = \pi_{2n+N}(Y_{n+1}) = 0$, что завершает шаг индукции.

Таким образом, $\pi_{t+r}(Y_{s+r+1}) = 0$ при $r > t - 2s - N - 2$. Поскольку

$$A^{s,t} = \text{im} [\pi_t(Y_s/Y_{s+1}) \rightarrow \pi_t(Y_{s+1})] \cap \bigcap_{r \geq 1} \text{im} [\pi_{t+r}(Y_{s+r+1}) \rightarrow \pi_t(Y_{s+1})],$$

то $A^{s,t} = 0$ для всех s, t . Аналогично, $\pi_{n+r}(Y_r) = 0$ при $r > n - N$, и поэтому

$$D^n = \bigcap_{r \geq 0} \text{im} [\pi_{n+r}(Y_r) \rightarrow \pi_n(Y)] = 0. \quad \square$$

Рассмотрим теперь еще один важный пример, а именно, спектр $E = H(\mathbb{Z}_p)$, который не удовлетворяет условиям предложения 19.11. Покажем, что в этом случае $A^{s,t} = 0$, а группы D^* явно вычислимы.

19.12. Предложение. Если $E = H(\mathbb{Z}_p)$ и $\pi_q(Y) = 0$ при $q < N$, где N — некоторое целое число, то элемент из $\pi_n(Y)$ содержится в $D^n = \bigcap_{r \geq 0} F^{r,n+r} \subset \pi_n(Y)$ тогда и только тогда, когда он

делится на p^s для каждого $s \geq 0$. Если, кроме того, $H_*(Y)$ имеет конечный тип, то подгруппа D^* группы $\pi_*(Y)$ состоит из всех элементов конечных взаимно простых с p порядков, и $A^{s,t} = 0$ для всех s, t . Таким образом, спектральная последовательность Адамса сходится к p -примарной части ${}_p\pi_*(Y) = \pi_*(Y)/D^*$ группы $\pi_*(Y)$.

Доказательство. Ранее мы показали, что $Y_n \xrightarrow{\iota \wedge 1} E \wedge Y_n$ индуцирует мономорфизм $E_*(Y_n) \xrightarrow{(\iota \wedge 1)_*} E_*(E \wedge Y_n)$, откуда, в свою очередь, вытекает, что $E_*(\Sigma^{-1}Y_{n+1}) \rightarrow E_*(Y_n)$ — нулевое отображение для всех n .

Примем в качестве предположения индукции следующее утверждение: если $x \in \pi_n(Y)$ делится на p^{s-1} , то $x \in F^{s-1, n+s-1}$ для всех n и Y . Это утверждение тривиально для $s = 1$. Пусть теперь для некоторого Y элемент $x \in \pi_n(Y)$ делится на p^s ; скажем, $x = p^s y$, где $y \in \pi_n(Y)$. Тогда $(\iota \wedge 1)_*(py) = p(\iota \wedge 1)_*(y) \in H_n(Y; \mathbb{Z}_p)$, т. е. $(\iota \wedge 1)_*(py) = 0$. Значит, поскольку

$$\Sigma^{-1}Y_1 \xrightarrow{\iota \wedge 1} Y_0 \xrightarrow{\iota \wedge 1} E \wedge Y_0$$

является корасслоенной последовательностью, найдется элемент $z \in \pi_n(\Sigma^{-1}Y_1) = \pi_{n+1}(Y_1)$ в $i_{1*}z = py$. Таким образом, $i_{1*}(p^{s-1}z) = p^{s-1}i_{1*}(z) = p^s y = x$. Так как

$$Y_1 \leftarrow \Sigma^{-1}Y_2 \leftarrow \Sigma^{-2}Y_3 \leftarrow \dots$$

служит фильтрацией Адамса пространства Y_1 , то, применяя предположение индукции к $p^{s-1}z \in \pi_{n+1}(Y_1)$, мы заключаем, что существует $w \in \pi_{n+s}(Y_s)$ с

$$i_{2*} \circ i_{3*} \circ \dots \circ i_{s*}(w) = p^{s-1}z.$$

Следовательно, $i_{1*} \cdot i_{2*} \cdot \dots \cdot i_{s*}(w) = i_{1*}(p^{s-1}z) = x$, т. е. $x \in F^{s, n+s}$. Это завершает шаг индукции.

Обратное утверждение доказывается несколько сложнее. Предположим, что некоторый элемент $x \in \pi_n(Y)$ не делится на p^s для какого-либо s . Покажем, что тогда найдется t , при котором $x \notin F^{t, n+t}$. Пользуясь тем, что морфизмы спектров можно складывать, рассмотрим морфизм $Y \xrightarrow{p^s} Y$ — сумму p^s экземпляров морфизма 1_Y . Индуцированный этим отображением гомоморфизм гомотопических групп $\pi_*(Y) \rightarrow \pi_*(Y)$ представляет собой умножение на p^s . Пусть W — кослой морфизм $p^s: Y \rightarrow Y$. Из точности гомотопической последовательности для $Y \xrightarrow{p^s} Y \xrightarrow{i} W$ получаем, что $\pi_q(W) = 0$ при $q < N$. Кроме того, мы имеем короткую точную последовательность

$$0 \rightarrow \operatorname{coker} p^s \rightarrow \pi_*(W) \rightarrow \ker p^s \rightarrow 0.$$

Поскольку $p^s(\operatorname{coker} p^s) = p^s(\ker p^s) = 0$, то $p^{2s}\pi_*(W) = 0$.

Построим теперь одну фильтрацию пространства W . Пусть π_m — его первая ненулевая гомотопическая группа (мы знаем, что $m \geq N$). Согласно теореме 6.39, точнее, ее аналогу для спектров, гомоморфизм $\pi_m(W) \rightarrow \pi_m(W) \otimes \mathbb{Z}_p$ может быть реализован отображением $W \rightarrow \Sigma^m H(\pi_m \otimes \mathbb{Z}_p)$. Пусть W_1 — кослой этого отображения, т. е.

$$W_0 \rightarrow \Sigma^m H \rightarrow W_1 \rightarrow \Sigma W_0$$

(где $W_0 = W$) — корасслоенная последовательность. Точная гомотопическая последовательность в данном случае имеет вид

$$0 \rightarrow \pi_{m+1}(W_1) \rightarrow \pi_m(W) \rightarrow \pi_m(W) \otimes \mathbb{Z}_p,$$

откуда вытекает, что $\pi_{m+1}(W_1) \cong p\pi_m(W_0)$. Итак, $p^{2s-1}\pi_{m+1}(W_1) = 0$; кроме того, $p^{2s}\pi_r(W_1) = 0$ при $r > m+1$ и $\pi_r(W_1) = 0$ при $r < m+1$. Таким образом, мы можем повторять эту процедуру до тех пор, пока выполняются равенства $\pi_{m+2s}(W_{2s}) = 0$, $p^{2s}\pi_r(W_{2s}) = 0$ при $r > m+2s$ и $\pi_r(W_{2s}) = 0$ при $r < m+2s$. Затем вновь примемся за работу и, убив группу $\pi_{m+2s+1}(W_{2s}) = 0$, в конечном итоге найдем такое t , что $\pi_{m+t}(W_t) = 0$.

Докажем теперь существование таких отображений $f_s: Y_s \rightarrow W_s$, что $f_0 = f$ и диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^{-1} Y_{s+1} & \xrightarrow{\Sigma^{-1} f_{s+1}} & \Sigma^{-1} W_{s+1} \\ i_{s+1} \downarrow & & \downarrow i'_{s+1} \\ Y_s & \xrightarrow{f_s} & W_s \end{array}$$

гомотопически коммутативны при всех $s \geq 0$. Мы имеем кораслоенные последовательности

$$\Sigma^{-1}W_{s+1} \xrightarrow{i'_{s+1}} W_s \xrightarrow{j_s} \Sigma^k H(\pi_k(W_s) \otimes \mathbb{Z}_p),$$

$$\Sigma^{-1}Y_{s+1} \xrightarrow{i'_{s+1}} Y_s \xrightarrow{j_s \wedge 1} H(\mathbb{Z}_p) \wedge Y_s,$$

определяющие пространства W_{s+1} и Y_{s+1} соответственно. В самом начале доказательства было отмечено, что все отображения $(i_{s+1})_*: H_*(\Sigma^{-1}Y_{s+1}; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H_*(Y_s; \mathbb{Z}_p)$ являются нулевыми. Формула универсальных коэффициентов

$$H^*(Y_s; \pi_k(W_s) \otimes \mathbb{Z}_p) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(H_*(Y_s; \mathbb{Z}_p), \pi_k(W_s) \otimes \mathbb{Z}_p)$$

показывает, что также и $i_{s+1}^* = 0$ на $H^*(Y_s; \pi_k(W_s) \otimes \mathbb{Z}_p)$. Если мы рассмотрим класс

$$[j_s] \in [W_s, \Sigma^k H(\pi_k(W_s) \otimes \mathbb{Z}_p)] = H^k(W_s; \pi_k(W_s) \otimes \mathbb{Z}_p)$$

как элемент группы когомологий, то

$$[j_s \circ f_s \circ i_{s+1}] = (f_s \circ i_{s+1})^* [j_s] = i_{s+1}^* \circ f_s^* [j_s] = 0.$$

Но $[j_s \circ f_s \circ i_{s+1}]$ можно представить в виде $j_{s*} [f_s \circ i_{s+1}]$, а последовательность

$$[\Sigma^{-1}Y_{s+1}, \Sigma^{-1}W_{s+1}] \xrightarrow{(i'_{s+1})_*} [\Sigma^{-1}Y_{s+1}, W_s] \xrightarrow{j_{s*}} [\Sigma^{-1}Y_{s+1}, \Sigma^k H]$$

точна. Поэтому из равенства $j_{s*} [f_s \circ i_{s+1}] = 0$ вытекает, что

$$[f_s \circ i_{s+1}] = (i'_{s+1})_* [\Sigma^{-1}f_{s+1}]$$

для некоторого элемента $[\Sigma^{-1}f_{s+1}] \in [\Sigma^{-1}Y_{s+1}, \Sigma^{-1}W_{s+1}]$. Таким образом, мы можем построить отображения f_s по индукции для всех номеров s .

Предположим теперь, что $x \in F^{t, n+t}$ для найденного выше значения t . Тогда имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} \pi_{n+t}(Y_t) & \xrightarrow{f_{t*}} & \pi_{n+t}(W_t) & = & 0 \\ \downarrow i_* & & \downarrow i'_* & & \\ \pi_n(Y) & \xrightarrow{p^s} & \pi_n(Y) & \xrightarrow{f_*} & \pi_n(W) \end{array}$$

с точной нижней строкой. Тот факт, что $x \in F^{t, n+t}$, означает существование элемента $y \in \pi_{n+t}(Y_t)$ с $i_* y = x$. Таким образом, $f_* x = i'_* \circ f_{t*}(y) = 0$, и поскольку нижняя строка точна, то $x = p^s z$ для некоторого $z \in \pi_n(Y)$. Это противоречит исходному предположению о том, что x не делится на p^s . Следовательно, $x \notin F^{t, n+t}$.

Рассмотрим теперь

$$A^{s, t} = \text{im} [\pi_t(E \wedge Y_s) \rightarrow \pi_t(Y_{s+1})] \cap \bigcap_{r \geq 1} \text{im} [\pi_{t+r}(Y_{s+r+1}) \rightarrow \pi_t(Y_{s+1})]$$

и фильтрацию Адамса

$$Y_{s+1} \leftarrow \Sigma^{-1} Y_{s+2} \leftarrow \Sigma^{-2} Y_{s+3} \leftarrow \dots$$

пространства Y_{s+1} . Из сказанного выше следует, что каждый элемент

$$\bigcap_{r \geq 1} \text{im} [\pi_{t+r}(Y_{s+r+1}) \rightarrow \pi_t(Y_{s+1})]$$

делится на p^n для $n \geq 0$. С другой стороны, $\pi_t(E \wedge Y_s) = H_t(Y_s; \mathbb{Z}_p)$, так что любой элемент из $\text{im} [\pi_t(E \wedge Y_s) \rightarrow \pi_t(Y_{s+1})]$ имеет порядок p . Далее, если $H_*(Y)$ имеет конечный тип, то, рассуждая по индукции, получаем, что и $H_*(Y_{s+1})$ также имеет конечный тип. А тогда из $\mathcal{C}$ -теории Серра (см [70] или [72]) вытекает, что и гомотопические группы $\pi_*(Y_{s+1})$ имеют конечный тип. Но в группе конечного типа единственным элементом порядка p , делящимся на p^n для всех n , является 0. Таким образом, $A^{s,t} = 0$. Утверждение о том, что D^* является подгруппой, состоящей из всех элементов конечных порядков, взаимно простых с p , очевидно. $\square$

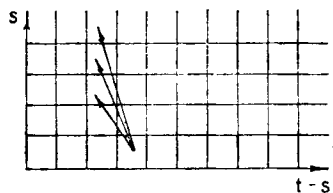


Рис. 34.

Далее мы увидим, что индексация спектральной последовательности Адамса устроена несколько иначе, чем в тех спектральных последо-

вательностях, с которыми мы встречались до сих пор. Поэтому при ее графическом изображении оказывается удобным откладывать по оси ординат параметр s , а по оси абсцисс — разность $t-s$. Тогда дифференциалы действуют так, как показано на рис. 34

Другими словами, стрелка, соответствующая дифференциалу d_r , смещается на единицу влево и поднимается на r единиц вверх. Все группы, находящиеся в данном вертикальном столбце, скажем $t-s=n$, относятся к одной и той же гомотопической группе — именно, к группе $\pi_n(Y)$.

19.13. Прежде чем переходить к конкретным примерам, необходимо исследовать поведение спектральной последовательности Адамса относительно умножений. Дело в том, что знание мультипликативной структуры часто оказывается решающим при вычислении дифференциалов d_r и описании расширений

$$0 \rightarrow F^{s+1, t+1} \rightarrow F^{s, t} \rightarrow E_{\infty}^{s, t} \rightarrow 0$$

Пусть $E_r^{s, t}(Y)$ — спектральная последовательность Адамса для Y . Если Y, Z — два спектра, то существует такое естественное сравнение

$$E_r^{s, t}(Y) \otimes E_r^{s', t'}(Z) \rightarrow E_r^{s+s', t+t'}(Y \wedge Z),$$

что дифференциал d_r вычисляется по формуле Лейбница:

$$d_r(y \wedge z) = d_r y \wedge z + (-1)^{s+t} y \wedge d_r z, \quad y \in E_r^{s, t}(Y), \quad z \in E_r^{s', t'}(Z).$$

Кроме того, существует спаривание элементов фильтрации

$$F_r^{s, t}(Y) \otimes F_r^{s', t'}(Z) \rightarrow F_r^{s+s', t+t'}(Y \wedge Z),$$

согласованное с обратным пределом спариваний

$$E_\infty^{s, t}(Y) \otimes E_\infty^{s', t'}(Z) \rightarrow E_\infty^{s+s', t+t'}(Y \wedge Z).$$

Далее, внешнее умножение $E_*(Y) \otimes E_*(Z) \rightarrow E_*(Y \wedge Z)$ задает спаривание

$$\text{Hom}_C^t(R, E_*(Y)) \otimes \text{Hom}_C^{t'}(R, E_*(Z)) \rightarrow \text{Hom}_C^{t+t'}(R, E_*(Y \wedge Z)),$$

которое, в свою очередь, индуцирует отображение

$$\text{Ext}_C^{s, t}(R, E_*(Y)) \otimes \text{Ext}_C^{s', t'}(R, E_*(Z)) \rightarrow \text{Ext}_C^{s+s', t+t'}(R, E_*(Y \wedge Z)),$$

совпадающее с определенным выше спариванием

$$E_2^{s, t}(Y) \otimes E_2^{s', t'}(Z) \rightarrow E_2^{s+s', t+t'}(Y \wedge Z)$$

19.14. Рассмотрим теперь важный пример $Y = S^0$, $E = H(\mathbb{Z}_2)$. Член E_2 соответствующей спектральной последовательности Адамса равен $\text{Ext}_{A_*}^{s, t}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)$, где через A_* обозначена алгебра, двойственная к алгебре Стиррода: $A_* = H_*(H(\mathbb{Z}_2); \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[\xi_1, \xi_2, \dots]$. На первый взгляд может показаться, что так как группа $\mathbb{Z}_2$ очень мала, то вычисление групп $\text{Ext}_{A_*}^{s, t}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)$ не составляет труда. Вспомним, однако, что для их вычисления нужна резольвента

$$0 \leftarrow \mathbb{Z}_2 \leftarrow X_0 \leftarrow X_1 \leftarrow X_2 \leftarrow \dots,$$

в которой все X_i являются свободными A_* -комодулями, — другими словами, X_i очень велики. Поэтому неудивительно, что группы $\text{Ext}_{A_*}^{s, t}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)$ вычислены лишь для небольшого числа размерностей s . В нескольких первых размерностях член E_2 выглядит следующим образом (см. [1] или [62]):

4	h_0^4							$h_0^3 h_3$	
3	h_0^3			$h_0^2 h_2 = h_1^3$				$h_0^2 h_3$	α
2	h_0^2		h_1^2	$h_0 h_2$			h_1^2	$h_0 h_3$	$h_1 h_3$
1	h_0	h_1		h_2				h_3	
0	1								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
	$t-s \rightarrow$								

В пустых квадратах стоят нулевые группы, а в остальных квадратах записаны образующие соответствующих $\mathbb{Z}_2$ -слагаемых. Для каждого $i \geq 0$ имеется образующая $h_i \in E_3^{1, 2^i}$ (соответствующая элементу $\xi_1^{2^i} \in A_{3, i}$; см. ниже предложение 19.17). Мультипликативная структура спектральной последовательности позволяет выразить различные образующие в виде произведения некоторого небольшого числа из них. Все группы, расположенные выше штриховой линии, равны нулю.

Оказывается, что в этой части спектральной последовательности все дифференциалы равны нулю. Действительно, легко видеть, что единственным элементом, на котором дифференциал d_r имеет шанс быть ненулевым, является h_1^{-1}). Предположим, что $d_r h_1 = h_0^{r+1}$ для некоторого r . Но $h_0 h_1 = 0$ и поэтому $0 = d_r (h_0 h_1) = h_0 (d_r h_1) = h_0^{r+2}$. Однако все степени элемента h_0 отличны от нуля, так что равенство $d_r h_1 = h_0^{r+1}$ невозможно.

Таким образом, в изображенной части спектральной последовательности $E_\infty^{s, t} = E_2^{s, t}$. Займемся теперь проблемой присоединенности. Рассмотрим вначале случай $t - s = 0$. Легко видеть, что образующая $h_0 \in E_3^{1, -1}$ соответствует отображению $f: S^n \rightarrow S^n$ степени 2 в π_0^S . В качестве предположения индукции будем считать доказанным, что элемент $[f]^s \in F^{s, s}$ отображается в $h_0^s \in E_\infty^{s, s}$. Мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} F^{1, 1^*} \otimes F^{s, s} & \longrightarrow & F^{s+1, s+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_\infty^{1, 1} \otimes E_\infty^{s, s} & \longrightarrow & E_\infty^{s+1, s+1}, \end{array}$$

из которой вытекает, что $[f]^{s+1}$ переходит в h_0^{s+1} . В частности, элемент $[f]^s$ никогда не обращается в нуль. Другими словами, класс $[1] \in {}_2\pi_0^S$ имеет бесконечный порядок. Гомоморфизм Гуревича $h: \pi_0^S \rightarrow \tilde{H}_0(S^0; \mathbb{Z})$ переводит $[1]$ в 1, так что класс $[1]$ не делится на 2. Следовательно, он порождает в ${}_2\pi_0^S$ слагаемое, изоморфное $\mathbb{Z}$. Предположим, что ${}_2\pi_0^S \cong \mathbb{Z} \oplus A$; тогда $F^{s, s} \cong 2^s \mathbb{Z} \oplus A_s$ для некоторой подгруппы $A_s \subset A$. Так как $F^{s, s}/F^{s+1, s+1} \cong \mathbb{Z}_2$, то $A_s = A_{s+1}$ для всех $s \geq 0$. Но $\bigcap_{s \geq 0} F^{s, s} = 0$, поэтому $A = 0$. Таким образом, группа ${}_2\pi_0^S \cong \mathbb{Z}$ и порождена классом $[1]$.

¹⁾ Равенство $d_2(h_1 h_3) = h_3 h_2$ противоречит мультипликативности, так как $d_2 h_3 = 0 = d_2 h_1$ (последнее равенство доказывается ниже). — Прим. ред.

Аналогичные (и более простые) рассуждения показывают, что башня $h_2, h_0h_2, h_0^2h_2$ для $t-s=3$ дает ${}_2\pi_3^S \cong \mathbb{Z}_8$. Эти рассуждения работают всегда, когда имеется башня вида $x, h_0x, h_0^2x, \dots$

Продолжая эти вычисления, мы найдем, что в размерностях $n \leq 7$ 2-примарная часть группы π_n^S выглядит следующим образом:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
${}_2\pi_n^S$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_8$	0	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{16}$

Заглянув в [77], где стабильные группы π_n^S вычисляются иным методом, мы найдем, что

n	0	1	2	3	4	5	6	7
π_n^S	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	0	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{240}$

(Ср. с примером 15.37.)

19.15. Упражнение. Существует еще один способ вычисления групп $\text{Ext}_C^{*,*}$.

а) R -модуль J называется *инъективным*, если для любой точной последовательности $0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B$ R -модулей и произвольного R -гомоморфизма $\rho: A \rightarrow J$ найдется такой R -гомоморфизм $\rho': B \rightarrow J$, что $\rho' \cdot \alpha = \rho$. Точно так же определяются инъективный A -модуль (A — некоторая R -алгебра) и инъективный C -комодуль (C — некоторая R -коалгебра). Показать, что для любого C -комодуля K существует мономорфизм $K \rightarrow J$ комодуля K в инъективный C -комодуль J . Вывести отсюда, что любой C -комодуль K обладает *инъективной резольвентой*

$$0 \rightarrow K \rightarrow Y_0 \xrightarrow{d^0} Y_1 \xrightarrow{d^1} Y_2 \rightarrow \dots$$

(т. е. точной последовательностью, все члены Y_i которой инъективны над C).

б) Показать, что если модуль J инъективен над C , то $\text{Ext}_C^{p,q}(K, J) = 0$ для любого C -комодуля K и $p \geq 1$.

с) Показать, что если

$$0 \rightarrow L \rightarrow Y_0 \rightarrow Y_1 \rightarrow Y_2 \rightarrow \dots$$

— инъективная резольвента C -комодуля L , то для любого C -комодуля K

$$\text{Ext}_C^{p,q}(K, L) \cong H^p(\text{Hom}_C(K, Y_*)), \quad p \geq 0, q \in \mathbb{Z}.$$

19.16. Упражнение. Показать, что результат упражнения 13.9 можно обобщить на случай градуированных C -комодулей, где C — коалгебра над градуированным кольцом R . Точнее, показать, что $\text{Ext}_C^{1,q}(M, N)$ отождествляется с группой классов эквивалентности расширений вида

$$0 \rightarrow N \xrightarrow{\alpha} Q \xrightarrow{\beta} M \rightarrow 0$$

• $\deg \alpha + \deg \beta = -q$.

19.17. Предложение. Если C — коалгебра над градуированным кольцом R и $P_q(C)$ — группа примитивных элементов степени q , то

$$\text{Ext}_C^{1,q}(R, R) \cong P_q(C)/(\eta_L - \eta_R)(R_q).$$

Доказательство. Пусть

$$0 \rightarrow R \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} R \rightarrow 0$$

— расширение, определяющее элемент из $\text{Ext}_C^{1,q}(R, R)$. Как R -модуль, M изоморфен $R \cdot x + R \cdot y$, где $x = \alpha(1) \in M_p$, $y \in M_{p+q}$ и $\beta(y) = 1$. Тогда

$$19.18. \quad \psi x = 1 \otimes x, \quad \psi y = 1 \otimes y + h \otimes x$$

для некоторого $h \in C_q$. Из равенств $(\psi \otimes 1) \cdot \psi = (1 \otimes \psi) \cdot \psi$ и $(\psi \otimes 1) \cdot \psi = 1$ следует, что элемент h должен быть примитивным. Элемент y определен неоднозначно: его можно заменить на $y + kx$ с любым $k \in R_q$. Тогда h заменяется на $h + (\eta_L - \eta_R)(k)$. Таким образом, корректно определен лишь класс вычетов $\{h\} \in P_q(C)/(\eta_L - \eta_R)(R_q)$.

С другой стороны, если имеется $h \in P_q(C)$, то можно определить $\{M_h\} \in \text{Ext}_C^{1,q}(R, R)$, полагая $M = R \cdot x + R \cdot y$, где $x \in M_0$, $y \in M_q$ и ψ задан формулами 19.18. Ясно, что $\{M_h + (\eta_L - \eta_R)(k)\} = \{M_h\}$ для любого $k \in R_q$. □

Для коалгебры A_* мы имеем $\eta_L = \eta_R$, причем $P_q(A_*) = \mathbb{Z}_2 = \{\xi_i^j\}$ при $q = 2^i$ и $P_q(A_*) = 0$ при $q \neq 2^i$. Отсюда легко следует, что группы $\text{Ext}_{A_*}^{1,*}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)$ как раз такие, как в п. 19.14.

19.19. В предложении 19.11 мы показали, что спектральная последовательность Адамса сходится при выполнении некоторых требований, включающих условие $\pi_q(E) = 0$ для $q < 0$. К сожалению, это условие не выполняется для спектров $E = K$ и $E = KO$. Тем не менее, теорема 19.9 остается справедливой и для этих спектров и, в частности, краевой гомоморфизм

$$\pi_n(Y) \rightarrow E_\infty^{0,*} \rightarrow E_2^{0,*} \cong \text{Hom}_{K_*(K)}^n(K_*(S^0), K_*(Y))$$

совпадает с гомоморфизмом Гуревича h_K . Однако для $Y = S^0$

$$\text{Hom}_{K_*(K)}^n(K_*(S^0), K_*(Y)) \text{ есть или } \mathbb{Z}, \text{ или } 0,$$

в то время как группы $\pi_n^S = \pi_n(S^0)$ конечны для всех $n > 0$. Следовательно, все элементы групп π_n^S , $n > 0$, лежат в $\ker h_K$, так что гомоморфизм h_K бесполезен при исследовании групп π_n^S . Тем не менее, мы знаем, что $\ker h_K = F^{1, n+1} \subset \pi_n(Y)$, и поэтому определен гомоморфизм

$$\ker h_K = F^{1, n+1} \rightarrow E_\infty^{1, n+1} \subset E_3^{1, n+1} \cong \text{Ext}_{K_*(K)}^{1, n+1}(\tilde{K}_*(S^0), \tilde{K}_*(S^0)) \cong \frac{P_{n+1}(K_*(K))}{(\eta_L - \eta_R) \tilde{K}_{n+1}(S^0)}.$$

Этот гомоморфизм был введен Адамсом и называется e_L -инвариантом. Существует также его вещественный аналог

$$e_R: \ker h_{KO} \rightarrow \frac{P_{n+1}(KO_*(KO))}{(\eta_L - \eta_R) (\tilde{K}_{n+1}^O(S^0))}.$$

Таким образом, представляет интерес вычисление групп $P_*(K_*(K))$ и $P_*(KO_*(KO))$.

19.20. Предложение. Если мы превратим $C = \mathbb{Q}[u, u^{-1}, v, v^{-1}]$ в градуированную коалгебру над кольцом $R = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$, полагая $t \cdot f = uf$, $f \cdot t = fv$ для $f \in C$ и $\psi u = u \otimes 1$, $\psi v = 1 \otimes v$, $\deg u = \deg v = 2$, то

$$P_n(C) = \mathbb{Q} \cdot (u^n - v^n) \quad \text{для всех } n \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Пусть

$$f = \sum a_i u^i v^{n-i} \in C_{2n}, \quad a_i \in \mathbb{Q}.$$

Тогда $\psi f = \sum a_i u^i \otimes v^{n-i}$ и, следовательно,

$$\psi f - 1 \otimes f - f \otimes 1 = \sum a_i u^i \otimes v^{n-i} - \sum a_i v^i \otimes v^{n-i} - f \otimes 1 = \sum_{i \neq 0, n} a_i p_i \otimes v^{n-i} + [a_n p_n - f] \otimes 1,$$

где $p_i = u^i - v^i$, $i \geq 1$. Это выражение обращается в нуль тогда и только тогда, когда $a_n p_n - f = 0$, т. е. когда $f = a_n (u^n - v^n)$. $\square$

19.21. Следствие. Для любого $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ группа $P_{2n}(K_*(K)) \cong \mathbb{Z}$ порождена элементом $(u^n - v^n)/m(|n|)$, где через $m(n)$, $n > 0$, обозначено такое наибольшее натуральное число, что $(x^n - 1)/m(n) \in \mathbb{Z}[1/x]$ для всех $x \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Кроме того,

$$P_0(K_*(K)) = P_{2n+1}(K_*(K)) = 0 \quad \text{для всех } n \in \mathbb{Z}.$$

19.22. Предложение.

$$\text{Ext}_{K_*(K)}^{1, q}(\tilde{K}_*(S^0), \tilde{K}_*(S^0)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_{m(|n|)}, & q = 2n, n \neq 0, \\ 0, & q = 0 \text{ или } q \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Доказательство. Очевидно, что группа $(\eta_L - \eta_R) \times (\tilde{K}_{2n}(S^0)) \cong \mathbb{Z}$ порождена элементом $(\eta_L - \eta_R)(t^{\pm}) = u^n - v^n$. $\square$

Таким образом, группы $\text{Ext}_{K_*(K)}^{1,q}(\tilde{K}_*(S^0), \tilde{K}_*(S^0))$ конечны для всех q . Это позволяет надеяться, что гомоморфизм $e_*: \pi_{2n-1}^S \rightarrow \mathbb{Z}_{m(n)}$ будет ненулевым и доставит некоторую информацию о группах π_{2n-1}^S , $n \geq 1$. В дальнейшем мы увидим, что для четных n e -инвариант действительно не равен нулю.

19.23. Лемма.

Группа $P_{4n}(KO_*(KO)) \cong \mathbb{Z}$ порождена элементом

$$\begin{cases} \frac{u^{2n} - v^{2n}}{m(2n)}, & n \text{ четно,} \\ 2 \frac{u^{2n} - v^{2n}}{m(2n)}, & n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Доказательство. Это утверждение немедленно следует из предложения 19.20 и теоремы 17.34. $\square$

19.24. Следствие.

$$\text{Ext}_{KO_*(KO)}^{1,4n}(KO_*(S^0), KO_*(S^0)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_{m(2n)}, & n \neq 0, \\ 0, & n = 0. \end{cases}$$

Доказательство. $(\eta_L - \eta_R)(y^n) = u^{4n} - v^{4n}$, $(\eta_L - \eta_R)(xy^n) = 2(u^{4n+2} - v^{4n+2})$. $\square$

Для дальнейших вычислений желательно иметь более полную информацию о целых числах $m(n)$. Оказывается, они тесно связаны с числами Бернулли.

Рассмотрим функцию $x/(e^x - 1)$. Ее разложение в степенной ряд имеет вид

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta_t \frac{x^t}{t!},$$

где $\beta_{2s+1} = 0$ для $s > 0$. Коэффициенты β_t связаны с числами Бернулли соотношением

$$\beta_{2s} = (-1)^{s-1} B_s, \quad s > 0.$$

Пусть $\hat{m}(t)$ — теоретико-числовая функция, определяемая следующим образом. Обозначим через $v_p(n)$ показатель, с которым простое число p входит в разложение числа n на простые множители:

$$n = 2^{v_2(n)} \cdot 3^{v_3(n)} \cdot 5^{v_5(n)} \cdot \dots$$

Тогда

$$\begin{aligned} v_p(\hat{m}(t)) &= \begin{cases} 0, & t \not\equiv 0 \pmod{p-1}, \\ 1 + v_p(t), & t \equiv 0 \pmod{p-1}, \end{cases} & p \text{ нечетно,} \\ v_2(\hat{m}(t)) &= \begin{cases} 1, & t \not\equiv 0 \pmod{2}, \\ 2 + v_2(t), & t \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

В частности, $\hat{m}(2t+1)=2$ для всех $t \geq 0$. В работе [3] Адамс развил необходимый теоретико-числовой аппарат и доказал следующие утверждения:

i) $\hat{m}(2t)$ является знаменателем несократимой дроби, равной $B_t/4t$;

ii) предположим, что $f(k)$ — некоторая функция, принимающая неотрицательные целые значения для всех $k \in \mathbb{Z}$, и пусть $m(f, t)$ — наибольший общий делитель чисел вида $x^{f(x)}(x^t - 1)$, $x \in \mathbb{Z}$; тогда $m(f, t)$ делит $\hat{m}(t)$ для всех t и f и для каждого t найдется такая функция f , что $m(f, t) = \hat{m}(t)$.

19.25. Предложение. $\hat{m}(t) = m(t)$.

Доказательство. По определению $m(t)$ для любого фиксированного t существует такая (неотрицательная) функция $f_t(x)$, что

$$\frac{x^{f_t(x)}(x^t - 1)}{m(t)} \in \mathbb{Z}$$

при всех $x \in \mathbb{Z}$. Таким образом, $m(t) \mid m(f_t, t)$ и, значит, $m(t) \mid \hat{m}(t)$.

С другой стороны, согласно ii) для любого фиксированного t найдется такая (неотрицательная) функция $\hat{f}_t(x)$, что

$$\frac{x^{\hat{f}_t(x)}(x^t - 1)}{\hat{m}(t)} \in \mathbb{Z}$$

при всех $x \in \mathbb{Z}$. Следовательно,

$$\frac{x^t - 1}{\hat{m}(t)} \in \mathbb{Z}[1/x] \quad \text{для } x \in \mathbb{Z} - \{0\}.$$

Поэтому $\hat{m}(t) \leq m(t)$. $\square$

Ясно, что для $q \equiv 3, 5, 6$ или $7 \pmod 8$ имеет место изоморфизм

$$\text{Ext}_{KO_*}^{1,q}(KO_*(S^0), KO_*(S^0)) \cong P_q(K\tilde{O}_*(KO))/(\eta_L - \eta_R)(K\tilde{O}_*(S^0)) = 0.$$

Кроме того, мы можем вычислить эти группы для $q \equiv 1, 2 \pmod 8$. Действительно, из теоремы 17.35 вытекает, что $K\tilde{O}_q(S^0) \otimes KO_0(KO) \rightarrow KO_q(KO)$ — изоморфизм. Поэтому отыщем те $f(u^2, v^2) \in KO_0(KO)$, для которых $au^{4n}f(u^2, v^2)$ являются примитивными элементами. Для этого воспользуемся приемом, аналогичным тому, который применялся при доказательстве предложения 19.20: если $f = \sum a_i u^{-2i} v^{2i}$, то

$$\begin{aligned} \psi f - u^{-4n} v^{4n} \otimes f - f \otimes 1 &= \sum a_i u^{-2i} v^{2i} - \sum a_i u^{-4n} v^{4n-2i} \otimes v^{2i} - f \otimes 1 = \\ &= \sum_{i \neq 0, 2n} a_i u^{-4n} (u^{4n-2i} - v^{4n-2i}) \otimes v^{2i} + [a_0(1 - u^{-4n} v^{4n}) - f] \otimes 1. \end{aligned}$$

Таким образом, если элемент $au^{4n}f$ примитивен, то

$$au^{4n}f = a_0\alpha(u^{4n} - v^{4n}).$$

19.26. Предложение. Для $q \equiv 1, 2 \pmod 8$ имеет место изоморфизм

$$\text{Ext}_{\widehat{KO}_*(KO)}^{1,q}(\widehat{KO}_*(S^0), \widehat{KO}_*(S^0)) \cong \mathbb{Z}_2.$$

Доказательство.

$$P_q(KO_*(KO)) = \mathbb{Z}_2 \left(\alpha \cdot \frac{u^{4q} - v^{4q}}{m(4q)} \right). \square$$

Покажем теперь, что гомоморфизм

$$e_r: \pi_r^S \rightarrow \text{Ext}_{\widehat{KO}_*(KO)}^{1,r+1}(\widehat{KO}_*(S^0), \widehat{KO}_*(S^0))$$

является эпиморфизмом для $r \equiv 0, 1, 3, 7 \pmod 8$. Для этого нам понадобятся некоторые сведения о J -гомоморфизме Уайтхеда. Гомоморфизм $J: \pi_r(SO(q)) \rightarrow \pi_{r+q}(S^q)$ определяется следующим образом. Представим сферу S^{r+q} в виде $S^{r+q} = \partial D^{r+q+1} = \partial(D^{r+1} \times D^q) = S^r \times D^q \cup D^{r+1} \times S^{q-1}$ с $S^r \times D^q \cap D^{r+1} \times S^{q-1} = S^r \times S^{q-1}$ и для заданного $f: S^r \rightarrow SO(q)$ определим отображение $g: S^r \times S^{q-1} \rightarrow S^{q-1}$, полагая $g(x, y) = f(x) \cdot y$, $(x, y) \in S^r \times S^{q-1}$. Продолжим g до отображения $S^r \times D^1 \rightarrow D^1 = H_+^q \subset S^q$, взяв $g(x, y) = f(x) \cdot y$ для $x \in S^r$, $y \in D^1$. Затем продолжим g до отображения $g: D^{r+1} \times S^{q-1} \cong CS^r \times S^{q-1} \rightarrow CS^{q-1} = H_-^q \subset S^q$, задавая его формулой $g([t, x], y) = [t, g(x, y)]$. В результате мы получим отображение $g: S^{q+r} \rightarrow S^q$. Положим $J[f] = [g]$. Доказательство того факта, что J есть гомоморфизм, см. в [96]. После стабилизации мы получаем стабильный J -гомоморфизм

$$J: \pi_r(SO) \rightarrow \pi_r^S.$$

Определим, кроме того, отображение $J': \pi_{r+1}(BSO) \rightarrow \pi_r^S$ требованием, чтобы диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi_{r+1}(BSO) & \xrightarrow{J'} & \pi_r^S \\ \parallel & & \uparrow \\ \pi_r(SO) & \xrightarrow{J} & \pi_r^S \end{array}$$

была коммутативной. С помощью очевидных композиций определим отображения $J'_0: \pi_{r+1}(BU) \rightarrow \pi_r^S$ и $J'_1: \pi_{r+1}(BSp) \rightarrow \pi_r^S$.

Покажем, что гомоморфизм

$$\pi_r(SO) \xrightarrow{\quad} \pi_r^S \xrightarrow{e_R} \text{Ext}_{KO_*}^{1, r+1}(KO_*(S^0), KO_*(S^0))$$

является эпиморфизмом.

19.27. Лемма а. Пусть $f': S^{r+1} \rightarrow BSO(q)$ — некоторое отображение и $\xi = f'^* \omega_q^+$ — индуцированное расслоение над S^{r+1} . Согласно лемме 12.26 пространство Тома $M(\xi)$ имеет вид $S^q \cup_{j'} e^{q+r+1}$. Можно найти такую гомотопическую эквивалентность $M(\xi) \simeq S^q \cup_{j''} e^{q+r+1}$, которая имеет степень 1 на обеих клетках.

Доказательство. Пусть $f: S^r \rightarrow SO(q)$ — произвольное отображение. Покажем, что пространство $X = S^q \cup_{j'} e^{q+r+1}$ гомотопически эквивалентно $M(\xi)$, где $\xi = f'^*(\omega_q)$, а $f': S^{r+1} \rightarrow BSO(q)$ — отображение, сопряженное с f . Выше мы описали отображение $Jf: S^{q+r} \rightarrow S^q$; гомотопический тип пространства X не изменится, если мы стянем $H^q \subset S^q$ в точку.

Расслоение на диски $D(\xi)$, ассоциированное с ξ , можно описать следующим образом. Будем рассматривать сферу S^{r+1} как диск D^{r+1} с границей S^r , стянутой в точку. Тогда $D(\xi)$ получается из $(D^{r+1} \times D^q) \cup D^q$ отождествлением $(x, y) \in S^r \times D^q$ с $f(x) \cdot y \in D^q$. Пространство Тома $M(\xi)$ может быть получено стягиванием $(D^{r+1} \times S^{q-1}) \cup S^{q-1}$ в точку. Но это есть в точности пространство X/H^q . $\square$

Опишем теперь способ вычисления $e_R[f]$ для произвольного отображения

$$f: S^{4r+q-1} \rightarrow S^q.$$

Так как $0 = h_{KO}[f] \in KO_*(S^0)$, то f пропускается через первый член Y_1 фильтрации спектрами:

$$\begin{array}{ccc} & & \Sigma^{-1} Y_1 \\ & \nearrow f' & \downarrow \\ S^{4r-1} & \xrightarrow{f} & S^0 \end{array}$$

В действительности мы имеем гомотопическую коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} S^{4r-1} & \xrightarrow{f} & S^0 & \xrightarrow{j} & S^0 \cup_f e^{4r} & \xrightarrow{k'} & S^{4r} \\ \downarrow f' & & \parallel & & \downarrow k & & \downarrow \Sigma f' \\ \Sigma^{-1} Y_1 & \longrightarrow & S^0 & \longrightarrow & Y_1/Y_0 & \longrightarrow & Y_1 \end{array}$$

для некоторого отображения $k: S^0 \cup_j e^{4r} \rightarrow Y_1/Y_0 = KO \wedge S^0 \cong KO$. Следовательно, диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \widetilde{KO}_*(S^0) & \xrightarrow{j_*} & KO_*(S^0 \cup_j e^{4r}) \xrightarrow{k'_*} \\ & & \parallel & & \downarrow k_* \\ 0 & \longrightarrow & \widetilde{KO}_*(S^0) & \longrightarrow & KO_*(KO) \longrightarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{KO}_*(S^0) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow (\Sigma f')_* & & \\ KO_*(Y_1) & \longrightarrow & KO_*(Y_1/Y_2) \end{array}$$

коммутативна. Анализ определения $e_R[f]$ показывает, что это в точности класс

$$\frac{\{\Sigma f'\} \in \text{Ext}_{KO_*(KO)}^{1,4r}(\widetilde{KO}_*(S^0), KO_*(S^0)) = \ker[\text{Hom}_{KO_*(KO)}^{4r}(\widetilde{KO}_*(S^0), KO_*(Y_1/Y_2)) \rightarrow \text{Hom}_{KO_*(KO)}^{4r}(\widetilde{KO}_*(S^0), KO_*(Y_2/Y_3))]}{\text{im}[\text{Hom}_{KO_*(KO)}^{4r}(\widetilde{KO}_*(S^0), KO_*(Y_0/Y_1)) \rightarrow \text{Hom}_{KO_*(KO)}^{4r}(\widetilde{KO}_*(S^0), KO_*(Y_1/Y_2))]}.$$

С другой стороны, последовательность

$$0 \rightarrow \widetilde{KO}_*(S^0) \xrightarrow{j_*} KO_*(S^0 \cup_j e^{4r}) \xrightarrow{k'_*} KO_*(S^0) \rightarrow 0$$

является расширением, т. е. элементом из $\text{Ext}_{KO_*(KO)}^{1,4r}(\widetilde{KO}_*(S^0), KO_*(S^0))$ (см. упражнение 19.16). Соответствие между различными определениями групп Ext показывает, что это расширение в точности отвечает классу $\{\Sigma f'_*\} = e_R[f]$.

Если выбрать образующие $x, y \in KO_*(S^0 \cup_j e^{4r})$ так, чтобы $j_*(1) = x$, $k'_*(y) = 1$, то

$$\psi(x) = 1 \otimes x, \quad \psi(y) = 1 \otimes y + h \otimes x$$

и

$$e_R[f] = \{h\} \in P_{4r}(KO_*(KO))/(\eta_L - \eta_R)(\widetilde{KO}_{4r}(S^0))$$

(по 19.17).

Обозначим пространство $S^0 \cup_j e^{4r}$ через X_f . Тогда мы имеем

$$KO^*(X_f) \cong \widetilde{KO}^*(S^0) \cdot \alpha \oplus \widetilde{KO}^*(S^0) \cdot \beta$$

для подходящих $\alpha, \beta \in KO^*(X_f)$, причем элементы α, β можно выбрать так, чтобы $\langle \alpha, x \rangle = \langle \beta, y \rangle = 1$, $\langle \alpha, y \rangle = \langle \beta, x \rangle = 0$. Поскольку $KO^*(X_f)$ является свободным $KO_*(S^0)$ -модулем, то ото-

бражения Бордмана и Гуревича превращаются в отображения

$$B: KO^*(X_f) \rightarrow KO^*(X_f) \otimes_{\tilde{KO}_*(S^0)} KO_*(KO)$$

и

$$H: KO_*(X_f) \rightarrow KO_*(KO) \otimes_{\tilde{KO}_*(S^0)} KO_*(X_f).$$

На первый взгляд может показаться, что отображение H совпадает с ψ , однако анализ определений показывает, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & & KO_*(KO) \otimes_{\tilde{KO}_*(S^0)} KO_*(Y) \\ & \nearrow H & \downarrow c \otimes 1 \\ KO_*(Y) & & \\ & \searrow \psi & \\ & & KO_*(KO) \otimes_{\tilde{KO}_*(S^0)} KO_*(Y) \end{array}$$

коммутативна для любого спектра Y . Следовательно, $H(x) = 1 \otimes x$ и $H(y) = 1 \otimes y + c(h) \otimes x$. Так как элемент h равен $a(u^{2r} - v^{2r})$ для некоторого $a \in \mathbb{Q}$ и $c(u) = v$, $c(v) = u$, то $H(y) = 1 \otimes y - h \otimes x$.

Пусть $\alpha \in KO^*(X_f)$ представляется отображением $g: X_f \rightarrow \Sigma^q KO$. По определению гомоморфизма B мы имеем

$$B(\alpha) = \alpha \otimes g_*(x) + \beta \otimes g_*(y).$$

С другой стороны, гомоморфизмы B и H двойственны друг другу (теорема 13.78), так что

$$1 = \langle \alpha, x \rangle = \kappa(B(\alpha) \otimes H(x)) = \kappa([\alpha \otimes g_*(x) + \beta \otimes g_*(y)] \otimes [1 \otimes x]) = g_*(x)$$

и

$$0 = \langle \alpha, y \rangle = \kappa(B(\alpha) \otimes H(y)) = \kappa([\alpha \otimes 1 + \beta \otimes g_*(y)] \otimes [1 \otimes y - h \otimes x]) = g_*(y) - h.$$

Таким образом,

$$e_R[f] = \{g_*(y)\} \in P_{4r}(KO_*(KO))/(\eta_L - \eta_R)(\tilde{KO}_{4r}(S^0)).$$

Рассмотрим теперь отображение $f': S^{4r} \rightarrow BSp(q)$ и вычислим $e_R J_{\mathbb{H}}^{f'}[f']$. В качестве $X_{J_{\mathbb{H}}^{f'}}$ можно взять пространство Тома $M(f'^* \xi_q)$, а элемент $\alpha \in \tilde{KO}^*(X_{J_{\mathbb{H}}^{f'}})$ можно представить классом Тома $t(f'^* \xi_q) = M(f')^*(t_q)$. Класс Тома в KO -теории представляется отображением $\mu_R: MSp \rightarrow KO$ (см. главу 17), так что элемент α представляется композицией

$$X_{J_{\mathbb{H}}^{f'}} \xrightarrow{M(f')} MSp_{t_q} \xrightarrow{t_q} \Sigma^{4q} MSp \xrightarrow{\Sigma^{4q} \mu_R} \Sigma^{4q} MO.$$

В качестве образующей $y \in KO_*(M(f'^* \xi_q))$ можно взять $\Phi_*^{-1}(i_{4r})$, где $i_{4r} \in \tilde{KO}_{4r}(S^{4r})$ — образующая.

Следовательно,

$$e_R J'_H [f'] = \{\mu_R M(f') * \Phi_*^{-1}(\iota_r)\} = \{\mu_R * \Phi_*^{-1} f'_*(\iota_r)\} = \{\mu_R * \Phi_*^{-1} h_{KO} [f']\}.$$

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

19.28. Предложение. Для любого r имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} & & \Phi_* & & \\ & & \cong & & \\ \pi_{4r}(BSp) & \xrightarrow{h_{KO}} & KO_{4r}(BSp) & \xleftarrow{\cong} & KO_{4r}(MSp) & \xrightarrow{\mu_R} & KO_{4r}(KO) \\ & \searrow J'_H & & & & \downarrow q & \\ & & \pi_{4r-1}^S & \xrightarrow{e_R} & \frac{KO_{4r}(KO)}{(\eta_L - \eta_R)(\widetilde{KO}_{4r}(S^0))}, \end{array}$$

в которой q — естественная проекция.

Если обозначить образующую группы $\pi_4(BSp)$ через z , то образующая из $\pi_{8r+4}(BSp)$ представляется в виде $y^r \cdot z$, а образующая из $\pi_{8r+8}(BSp)$ — в виде $xy^r \cdot z$. Здесь мы воспользовались спариванием $\mu_2: \pi_*(BO) \otimes \pi_*(BSp) \rightarrow \pi_*(BSp)$, которое задает на $\pi_*(BSp)$ структуру $\pi_*(BO)$ -модуля; через $x \in \pi_4(BO)$, $y \in \pi_8(BO)$ обозначены стандартные образующие.

Вычислим $h_{KO}(y^r \cdot z)$ и $h_{KO}(xy^r \cdot z)$. Для любого отображения $f: S^r \rightarrow X$ сферы S^r в клеточное пространство X имеем $h_{KO}[f] = f_*(\iota_r)$. Следовательно, для любых $a, b \in \widetilde{KO}^*(X)$

$$\langle ab, h_{KO}[f] \rangle = \langle ab, f_*(\iota_r) \rangle = \langle f^*(a) f^*(b), \iota_r \rangle = 0,$$

поскольку все произведения в $\widetilde{KO}^*(S^r)$ равны нулю. Таким образом, $h_{KO}[f]$ аннулирует все нетривиальные произведения в $\widetilde{KO}^*(X)$ и, значит, $h_{KO}[f]$ примитивен относительно коумножения

$$KO_*(X) \overset{\Delta}{*} KO_*(X \times X) \cong KO_*(X) \otimes_{KO_*(pt)} KO_*(X)$$

в предположении, что $KO_*(X)$ — плоский $KO_*(pt)$ -модуль. Далее, $Q(KO^*(BSp))$ порождается над $KO^*(pt)$ классами Понтрягина $P_1, P_2, \dots, P_k, \dots$ и поэтому $P(KO_*(BSp))$ имеет над $KO_*(pt)$ дуальный базис, состоящий из полиномов Ньютона $N_1, N_2, \dots, N_k, \dots$ (см. второе замечание за следствием 16.44).

Так как $h_{KO}(z) = Z_1 \in KO_4(BSp)$ и диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \pi_{4r}(BSp) & \xrightarrow{x^*} & \pi_{4r+4}(BSp) & \pi_{4r}(BSp) & \xrightarrow{y^*} & \pi_{4r+8}(BSp) \\ \downarrow c'_* & & \downarrow c'_* & \downarrow c'_* & & \downarrow c'_* \\ \pi_{4r}(BU) & & \pi_{4r+4}(BU) & \pi_{4r}(BU) & & \pi_{4r+8}(BU) \\ \downarrow h_K & & \downarrow h_K & \downarrow h_K & & \downarrow h_K \\ K_{4r}(BU) & \xrightarrow{2B^2} & K_{4r+4}(BU), & K_{4r}(BU) & \xrightarrow{B^4} & K_{4r+8}(BU) \end{array}$$

коммутативны, то из следствия 17.27 вытекает, что

$$h_{KO}(y^q \cdot z) = \frac{(4q+2)!}{2} Z_{2q+1} + \{\text{разложимые элементы и мономы от переменных } Z_1, Z_2, \dots, Z_{2q}\},$$

$$h_{KO}(xy^{q-1} \cdot z) = \frac{(4q)!}{2} Z_{2q} + \{\text{разложимые элементы и мономы от переменных } Z_1, Z_2, \dots, Z_{2q-1}\}.$$

Но $h_{KO}(y^q \cdot z)$ и $h_{KO}(xy^{q-1} \cdot z)$ являются $\mathbb{Z}[t^4, 2t^2, t^{-4}]$ -линейными комбинациями полиномов Ньютона N_k и $N_k = (-1)^{k-1} k Z_k \bmod \{\text{разложимые элементы}\}$. Поэтому

$$h_{KO}(y^q \cdot z) = (4q+1)! N_{2q+1} + \{\text{члены вида } a_r y^r N_{2q-2r+1} \text{ и } b_r x y^r N_{2q-2r}\},$$

$$h_{KO}(xy^{q-1} \cdot z) = -\frac{(4q-1)!}{2} N_{2q} + \{\text{члены вида } a_r y^r N_{2q-2r} \text{ и } b_r x y^r N_{2q-2r-1}\}.$$

Оба отображения Φ_* и μ_{R*} являются кольцевыми гомоморфизмами и, так же как в главе 17, мы имеем

$$\Phi_*^{-1}(Z_i) = Z'_i, \quad \mu_{R*}(Z'_i) = q'_i(u, v) = \frac{2}{(2i+2)!} (v^2 - u^2) \dots (v^2 - i^2 u^2).$$

Следовательно,

$$\mu_{R*} \Phi_*^{-1} h_{KO}(y^q \cdot z) = (4q+1)! N_{2q+1}(q'_1, \dots, q'_{2q+1}) + \{\text{члены вида } a_r u^{2r} N_{2q-r+1}, r > 0\},$$

$$\mu_{R*} \Phi_*^{-1} h_{KO}(xy^{q-1} \cdot z) = -\frac{(4q-1)!}{2} N_{2q}(q'_1, \dots, q'_{2q}) + \{\text{члены вида } a_r u^{2r} N_{2q-r}, r > 0\}.$$

Элемент $e_R J'_H(y^q \cdot z)$ имеет вид $e_R J'_H(y^q \cdot z) = \{a_{2q+1}(v^{4q+2} - u^{4q+2})\}$ для некоторого $a_{2q+1} \in \mathbb{Q}$; ясно, что a_{2q+1} должен быть коэффициентом при v^{4q+2} в полиноме $(4q+1)! N_{2q+1}(q'_1, \dots, q'_{2q+1})$. Аналогично, $e_R J'_H(xy^{q-1} \cdot z) = \{a_{2q}(v^{4q} - u^{4q})\}$, где a_{2q} — коэффициент при v^{4q} в полиноме $-\frac{(4q-1)!}{2} N_{2q}(q'_1, \dots, q'_{2q})$.

Полиномы Ньютона N_k удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$N_k - N_{k-1} q'_1 + N_{k-2} q'_2 - \dots + (-1)^{k-1} N_1 q'_k + (-1)^k k q'_k = 0$$

(см. [48]). Следовательно, мы имеем

$$\sum_{s=1}^k (-1)^{k+1} \frac{2e_s a_s}{(2s-1)!(2k-2s+2)!} + (-1)^k k \frac{2}{(2k+2)!} = 0,$$

где

$$e_s = \begin{cases} 1, & s \text{ нечетно,} \\ 2, & s \text{ четно.} \end{cases}$$

Другими словами,

$$\sum_{s=1}^k \binom{2k+2}{2s} (2se_s a_s) - k = 0.$$

Пусть $\beta'_{2s} = 2se_s a_s$, $s \geq 1$. Тогда

$$19.29. \sum_{s=1}^k \binom{2k+2}{2s} \beta'_{2s} - k = 0 \text{ для } k \geq 1.$$

Выше мы определили числа β_s как коэффициенты разложения

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{s=0}^{\infty} \beta_s \frac{x^s}{s!}.$$

Сравнивая коэффициенты при x^{k+1} , $k \geq 1$, в разложении

$$x = \frac{x}{e^x - 1} (e^x - 1) = \left(\sum_{s=0}^{\infty} \beta_s \frac{x^s}{s!} \right) \left(\sum_{t=1}^{\infty} \frac{x^t}{t!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^k \binom{k+1}{s} \beta_s \right) \frac{x^{k+1}}{(k+1)!},$$

мы видим, что β_s удовлетворяют соотношению

$$\sum_{s=0}^k \binom{k+1}{s} \beta_s = 0, \quad k \geq 1.$$

Без труда вычисляются первые два коэффициента: $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = -1/2$. Легко видеть, что

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1} - 1 + \frac{x}{2}$$

— четная функция, поэтому $\beta_{2r+1} = 0$ для $r \geq 1$. Следовательно, β_s удовлетворяют соотношению

$$\sum_{s=1}^k \binom{2k+2}{2s} \beta_{2s} - k = 0.$$

Значит, единственным решением уравнения 19.29 является

$$a_s = \frac{\beta'_{2s}}{2se_s} = \frac{\beta_{2s}}{2se_s} = \frac{(-1)^{s-1} B_s}{2se_s}, \quad s \geq 1.$$

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

19.30. Предложение.

$$1) \quad \mathcal{B}_R J'_H(y^q \cdot z) = \left\{ \frac{B_{2q+1}}{4q+2} (v^{4q+2} - u^{4q+2}) \right\} = \left\{ \frac{2z}{m(4q+2)} (v^{4q+2} - u^{4q+2}) \right\}$$

для некоторого $z \in \mathbb{Z}$, взаимно простого с $m(4q+2)$;

$$\text{ii) } e_{\mathbb{R}} J'_{\mathbb{H}}(xy^{q-1} \cdot z) = \left\{ -\frac{B_{2q}}{8q} (v^{4q} - u^{4q}) \right\} = \left\{ \frac{z}{m(4q)} (v^{4q} - u^{4q}) \right\} \text{ для не-}$$

которого $z \in \mathbb{Z}$, взаимно простого с $m(4q)$.

С учетом леммы 19.23 мы получаем следующее утверждение.

19.31. Теорема. Гомоморфизм

$$\pi_{4q-1}(SO) \xrightarrow{J} \pi_{4q-1}^S \xrightarrow{e_{\mathbb{R}}} \frac{P_{4q}(KO_*(KO))}{(\eta_L - \eta_R)(\widetilde{KO}_{4q}(S^0))} \cong \mathbb{Z}_{m(2q)}$$

является эпиморфизмом для всех $q \geq 1$.

19.32. Следствие. Гомоморфизм

$$\pi_q(SO) \xrightarrow{J} \pi_q^S \xrightarrow{e_{\mathbb{R}}} \mathbb{Z}_2$$

является изоморфизмом для всех $q \equiv 0, 1 \pmod{8}$, $q > 1$.

Доказательство. Если z — образующая группы $\pi_{8n-1}(SO)$, то $e_{\mathbb{R}} J(z)$ является образующей группы $\text{Ext}_{KO_*(KO)}^{1, 8n}(\widetilde{KO}_*(S^0), \widetilde{KO}_*(S^0)) \cong \mathbb{Z}_{m(4n)}$. Пусть $\eta \in \pi_1^S$ — ненулевой элемент; обозначим через α его образ $h_{KO}(\eta) \in \widetilde{KO}_1(S^0)$. Используя мультипликативную структуру спектральной последовательности Адамса, без труда получаем, что элемент $e_{\mathbb{R}}(xy)$ определен тогда и только тогда, когда определен элемент $e_{\mathbb{R}}(x)$ и $e_{\mathbb{R}}(xy) = e_{\mathbb{R}}(x)h_{KO}(y)$ для всех $x, y \in \pi_*^S$.

Определим отображение $\pi_q(SO) \times \pi_{q+s}(S^q) \rightarrow \pi_{q+s}(SO)$ посредством очевидной композиции. Легко видеть, что $J[f \cdot g] = J[f] \cdot [g]$, где $\cdot$ обозначает умножение в группе π_*^S . Таким образом,

$$e_{\mathbb{R}} J(z \cdot \eta) = e_{\mathbb{R}} J(z) \cdot h_{KO}(\eta) = e_{\mathbb{R}} J(z) \cdot \alpha \neq 0 \in \text{Ext}_{KO_*(KO)}^{1, 8n+1}(\widetilde{KO}_*(S^0), \widetilde{KO}_*(S^0)).$$

Аналогично, $e_{\mathbb{R}} J(z \cdot \eta^2) \neq 0$. $\square$

В работе [3] Адамс показал, что для образующей $g \in \pi_{4n-1}(SO)$ и для каждого $k \in \mathbb{Z}$ найдется такое положительное целое число $f(k)$, что

$$2kf^{(k)}(k^{2n} - 1)g \in \ker J.$$

Так как $m(f, 2n)$ определялось как наибольший общий делитель чисел вида $kf^{(k)}(k^{2n} - 1)$, то $2m(f, 2n)g \in \ker J$. В частности, порядок группы $\text{im } J$ делит $2m(f, 2n)$. Но $m(f, 2n) \mid m(2n)$, поэтому $o(\text{im } J) \mid 2m(2n)$.

Адамс показал, что в действительности $o(\text{im } J) \mid m(2n)$, если $4n - 1 \equiv 3 \pmod{8}$ и предположил, что $o(\text{im } J) \mid m(2n)$, когда $4n - 1 \equiv 7 \pmod{8}$. Эта гипотеза была доказана Квилленом в работе [39]¹⁾. Объединяя эти результаты с теоремой 19.31, мы

¹⁾ См. также Сулливан [8*], Адамс [1*]. — Прим. ред

получим, что

$$\operatorname{im} [J: \pi_{4n-1}(SO) \rightarrow \pi_{4n-1}^S] \cong \mathbb{Z}_{m(2n)}.$$

Кроме того, поскольку диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & \pi_{4n-1}^S & \\ \cup & \searrow e_R & \\ \operatorname{im} J & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{Z}_{m(2n)} \end{array}$$

коммутативна, мы видим, что $\operatorname{im} J$ выделяется в π_{4n-1}^S прямым слагаемым для всех $n \geq 1$. Таким образом, для всех $n \equiv 0, 1, 3, 7 \pmod 8$ нам удалось выделить нетривиальное слагаемое в стабильных гомотопических группах сфер π_n^S .

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Исследованию общей формы спектральной последовательности Адамса, а также более детальному обсуждению вопросов сходимости посвящена книга [8]. В следующей главе мы займемся основным применением спектральной последовательности Адамса, а именно, вычислением групп кобордизмов. Читатель, интересующийся вычислением стабильных гомотопических групп сфер, найдет много интересного материала в лекциях Адамса [6].

В работе [3] Адамс ввел в рассмотрение некоторые группы, обозначенные им через Ext . Предлагаем читателю в качестве весьма полезного упражнения показать, что эти группы Ext изоморфны нашим $\operatorname{Ext}_{K_*}^*(K) (-, -)$ и что определенный Адамсом инвариант e_i совпадает на стабильных группах π_*^S с инвариантом, рассмотренным в этой главе. На самом деле, Адамс определил свой инвариант e_i для нестабильных групп, что позволило ему изучить ряд нестабильных явлений (заметим, что наш инвариант e_i стабилен по своей сути). В заключение добавим, что работа [3] содержит и много других интересных применений e -инварианта к гомотопическим вычислениям.

ССЫЛКИ НА ЛИТЕРАТУРУ

1. Адамс [1], [3], [4], [8].
2. Квиллен [39].
3. Люевичус [48].
4. Мошер, Тангора [62].
5. Хьюзмоллер [96].

В главе 12 мы уже упоминали о структуре различных групп бордизмов $\Omega_*^G \cong \widetilde{MG}_*(S^0) = \pi_*(MG)$, — правда, без каких бы то ни было доказательств. Оказывается, что для вычисления групп $\pi_*(MG)$ очень удобна спектральная последовательность Адамса. Это связано с тем обстоятельством, что для $G = O, U, SO$ и SU гомологии $H_*(MG; \mathbb{Z}_p)$ имеют сравнительно простую структуру A_* -комодулей. В настоящей главе с помощью спектральной последовательности Адамса мы вычислим группы Ω^O, Ω^U и Ω^{SO} . Кроме того, мы докажем теорему Стонга — Хаттори, утверждающую, что гомоморфизм $h: \pi_*(MU) \rightarrow P(K_*(MU))$ является изоморфизмом.

В главе 16 мы вычислили кольца Понтрягина $H_*(MO; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[a_1, a_2, \dots]$, $H_*(MU; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[b_1, b_2, \dots]$, $H_*(MSp; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[q_1, q_2, \dots]$. Чтобы вычислить спектральную последовательность Адамса, скажем, для спектра $E = H(\mathbb{Z}_2)$, нам необходимо знать дополнительно комодульную структуру этих колец над коалгеброй $A_* = A(H(\mathbb{Z}_2))_*$.

Пусть $M = H_*(MO; \mathbb{Z}_2)$; мы хотим найти действие $\psi: M \rightarrow A_* \otimes_{\mathbb{Z}_2} M$. В дальнейшем мы покажем, что существует изоморфизм A_* -комодулей

$$f: M \rightarrow A_* \otimes_{\mathbb{Z}_2} H,$$

где

$$H = \mathbb{Z}_2[u_2, u_4, u_8, \dots]$$

— алгебра полиномов над $\mathbb{Z}_2$ с образующими $u_k \in H_k$ для всех k , не равных $2^s - 1$. В действительности, мы докажем даже, что f — изоморфизм алгебр.

20.1. Определение. Пусть C — алгебра Хопфа и L — некоторый C -комодуль с действием $\psi: L \rightarrow C \otimes L$. Комодуль L называется *алгеброй над C* , если он обладает ассоциативным умножением $\mu: L \otimes L \rightarrow L$, согласованным со структурой комодуля, т. е. если коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} L \otimes L & \xrightarrow{\mu} & L \\ \downarrow \psi \otimes \psi & & \downarrow \psi \\ C \otimes L \otimes C \otimes L & \xrightarrow{1 \otimes \tau \otimes 1} C \otimes C \otimes L \otimes L \xrightarrow{\phi \otimes \mu} & C \otimes L \end{array}$$

в которой ϕ — это умножение в C .

20.2. Примеры. i) $H_*(MO; \mathbb{Z}_2)$, $H_*(MU; \mathbb{Z}_2)$ и т. д. являются алгебрами над A_* , поскольку умножения в них определяются отображениями спектров, A_* -кодействие естественно и удовлетворяет условию 17.8, vii).

ii) Если B — некоторая алгебра над $\mathbb{Z}_2$ с умножением $\phi_B: B \otimes B \rightarrow B$, то $A_* \otimes B$ представляет собой алгебру над A_* с умножением

$$(A_* \otimes B) \otimes (A_* \otimes B) \xrightarrow{1 \otimes T \otimes 1} A_* \otimes A_* \otimes B \otimes B \xrightarrow{\phi \otimes \phi_B} A_* \otimes B.$$

В частности, $A_* \otimes H_*(MO; \mathbb{Z}_2)$, $A_* \otimes H_*(MU; \mathbb{Z}_2)$ и т. д. являются алгебрами над A_* .

Замечание. Всякий раз, когда мы работаем с модулями, алгебрами и т. п. над $\mathbb{Z}_p$, — а именно такая ситуация и будет встречаться в настоящей главе, — символ $\otimes$ будет означать $\otimes_{\mathbb{Z}_p}$.

В предыдущей главе мы установили изоморфизм $\text{Hom}'_C(K, C \otimes_R V) \cong \text{Hom}'_R(K, V)$; напомним, что он устроен следующим образом. Если $g: K \rightarrow V$ — некоторый R -гомоморфизм, то ему соответствует C -гомоморфизм $\bar{g}: K \rightarrow C \otimes_R V$, определяемый как композиция

$$K \xrightarrow{\psi_K} C \otimes_R K \xrightarrow{1 \otimes g} C \otimes_R V.$$

20.3. Лемма. Если K — алгебра над C , V — алгебра над R и $g: K \rightarrow V$ — некоторый гомоморфизм R -алгебр, то $\bar{g}$ является гомоморфизмом C -алгебр.

Доказательство. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} K \otimes K & \xrightarrow{\phi_K} & & & K \\ \downarrow \psi_K \otimes \psi_K & & 1 & & \downarrow \psi_K \\ C \otimes K \otimes C \otimes K & \xrightarrow{1 \otimes T \otimes 1} & C \otimes C \otimes K \otimes K & \xrightarrow{\phi_C \otimes \phi_K} & C \otimes K \\ \downarrow 1 \otimes g \otimes 1 \otimes g & & \downarrow 1 \otimes 1 \otimes g \otimes g & & \downarrow 1 \otimes g \\ C \otimes V \otimes C \otimes V & \xrightarrow{1 \otimes T \otimes 1} & C \otimes C \otimes V \otimes V & \xrightarrow{\phi_C \otimes \phi_V} & C \otimes V. \end{array}$$

Квадрат 1 этой диаграммы коммутативен потому, что K является алгеброй над C , квадрат 3 коммутативен потому, что g — морфизм алгебр над R ; коммутативность квадрата 2 очевидна. Из коммутативности данной диаграммы следует, что $\bar{g} = (1 \otimes g) \circ \psi_K$ является морфизмом алгебр над C . $\square$

Так как $\psi_M: M \rightarrow A_* \otimes M$ согласовано с умножением на M , достаточно вычислить $\psi_M(a_k)$ для каждого k . В силу естественности ψ_M для этого достаточно найти $\psi_{R^p \otimes}(x_{k+1})$ для каждого k .

Вспомним теперь, что существует отображение $\alpha: \mathbb{R}P^\infty \simeq H(\mathbb{Z}_2, 1) \rightarrow \Sigma^{-1}H(\mathbb{Z}_2)$, переводящее x_{2^k} в $\xi_k \in A_{2^k-1}$ и $\psi\xi_k = \sum_{s=0}^k \xi_{k-s}^{2^s} \otimes \xi_s$ в $A_* \otimes A_*$. Следовательно, $\psi x_{2^k} = \sum_{s=0}^k \xi_{k-s}^{2^s} \otimes x_{2^s} \bmod (A_* \otimes (\text{разложимые элементы}))$. В действительности, можно вычислить ψx_k вообще для всех k .

20.4. Лемма. $\psi x_k = \sum_{i+j=k} (X^j)_i \otimes x_j$, $k \geq 0$, где $X = 1 + \xi_1 + \xi_2 + \dots$.

Доказательство. Доказательство этой леммы аналогично доказательству теоремы 18.20. Напомним, прежде всего, формулу 17.11:

$$\langle \theta y, u \rangle = \sum_i \langle \theta, e_i \langle y, u_i \rangle \rangle \text{ для } \theta \in A^*, y \in H^*(X; \mathbb{Z}_2)$$

и

$$u \in H_*(X; \mathbb{Z}_2) \text{ с } \psi u = \sum_i e_i \otimes u_i.$$

Применяя эту формулу к $X = \mathbb{R}P^\infty$, $y = x^i$, $u = x_k$, получим

$$\langle \theta x^i, x_k \rangle = \sum_i \langle \theta, e_j \langle x^i, x_j \rangle \rangle = \langle \theta, e_i \rangle,$$

где $\psi x_k = \sum e_j \otimes x_j$. Вычислим теперь θx^i . Пусть $\Delta^i: \mathbb{R}P^\infty \rightarrow \mathbb{R}P^\infty \times \dots \times \mathbb{R}P^\infty$ — отображение, задаваемое формулой $\Delta^i(z) = (z, \dots, z)$. Обозначим через u_j элемент $\pi_j^* x \in H^1(\mathbb{R}P^\infty \times \dots \times \mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2)$, где $\pi_j: \mathbb{R}P^\infty \times \dots \times \mathbb{R}P^\infty \rightarrow \mathbb{R}P^\infty$ — проекция на j -й множитель. Тогда $x^i = \Delta^{i*}(u_1 u_2 \dots u_i)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \theta x^i &= \theta \Delta^{i*}(u_1 u_2 \dots u_i) = \Delta^{i*} \theta(u_1 u_2 \dots u_i) = \\ &= \Delta^{i*} \left(\sum_{\alpha} \langle \theta, \xi_{\alpha} \rangle u_1^{2^{\alpha_1}} u_2^{2^{\alpha_2}} \dots u_i^{2^{\alpha_i}} \right) = \quad (\text{по 18.18}) \\ &= \sum_{\alpha} \langle \theta, \xi_{\alpha} \rangle x^{2^{\alpha_1} + 2^{\alpha_2} + \dots + 2^{\alpha_i}} = \sum_{j \geq i} \langle \theta, (X^i)_{j-i} \rangle x^j. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \langle \theta, e_i \rangle &= \langle \theta x^i, x_k \rangle = \sum_{j \geq i} \langle \theta, (X^i)_{j-i} \rangle \langle x^j, x_k \rangle = \\ &= \langle \theta, (X^i)_{k-i} \rangle, \quad \theta \in A^*. \end{aligned}$$

Другими словами, $e_i = X_{k-i}^i$ для всех i . $\square$

20.5. Следствие. Для всех $k \geq 0$

$$\psi a_k = \sum_{i+j=k} (X^{j+1})_i \otimes a_j.$$

Определим теперь гомоморфизм алгебр $g: M \rightarrow H$ формулой

$$g(a_k) = \begin{cases} u_k, & \text{если } k \neq 2^t - 1 \text{ ни для какого } t > 0, \\ 0, & \text{если } k = 2^t - 1 \text{ для некоторого } t > 0. \end{cases}$$

Положим $f = g: M \rightarrow A_* \otimes H$; в силу леммы 20.3 f является гомоморфизмом алгебр над A_* .

Пусть $A_*^t \subset A_*$ — подалгебра, порожденная элементами $1, \xi_1, \dots, \xi_t$ и $H^{(m)} \subset H$ — подалгебра в H , порожденная $1, g(a_1), g(a_2), \dots, g(a_m)$.

20.6. Лемма. i) $f(a_{2^t-1}) \equiv \xi_t \otimes 1 \pmod{\bar{A}_*^{t-1} \otimes H^{(2^t-2)}}$,

ii) $f(a_k) \equiv 1 \otimes u_k \pmod{\bar{A}_*^{t-1} \otimes H^{(k-1)}}$,

если $2^{t-1} - 1 < k < 2^t - 1$ ($\bar{A}_* = \ker(\varepsilon: A_* \rightarrow \mathbb{Z}_2) = \{\text{элементы степени } > 0\}$).

Доказательство.

$$f(a_{2^t-1}) = (1 \otimes g) \psi(a_{2^t-1}) \equiv (1 \otimes g)(\xi_t \otimes 1 + 1 \otimes a_{2^t-1}) \equiv \xi_t \otimes 1 \pmod{\bar{A}_*^{t-1} \otimes H^{(2^t-2)}}.$$

Для любого k мы имеем $\psi(a_k) \equiv 1 \otimes a_k \pmod{\bar{A}_*^{t-1} \otimes M^{(k-1)}}$, где $M^{(k-1)}$ — подалгебра, порожденная элементами $1, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$, $2^{t-1} \leq k < 2^t - 1$. Таким образом, если $k \neq 2^t - 1$, мы имеем

$$f(a_k) = (1 \otimes g) \psi(a_k) \equiv 1 \otimes g(a_k) \pmod{\bar{A}_*^{t-1} \otimes H^{(k-1)}} \equiv 1 \otimes u_k \pmod{\bar{A}_*^{t-1} \otimes H^{(k-1)}}. \square$$

20.7. Теорема. Гомоморфизм

$$f: M \rightarrow A_* \otimes H$$

является изоморфизмом.

Доказательство. Нетрудно проверить, что M_n и $(A_* \otimes H)_n$ для любого n имеют одинаковую размерность как векторные пространства над $\mathbb{Z}_2$. Следовательно, достаточно доказать, что f — эпиморфизм. Применяя двойную индукцию по t и m , покажем, что для любых t, m $\text{im } f$ содержит $A_*^t \otimes H^{(m)}$.

Пусть $A_*^{t-1} \otimes H^{(2^t-2)} \subset \text{im } f$. Тогда из следствия 20.6, i) вытекает, что $\xi_t \otimes 1 \in \text{im } f$ и, значит, что $A_*^t \otimes H^{(0)}$ также лежит в $\text{im } f$. Предположим теперь, что мы уже доказали включение $A_*^t \otimes H^{(m-1)} \subset \text{im } f$ для некоторого m , удовлетворяющего неравенствам $1 \leq m < 2^{t+1} - 1$. Если $m = 2^s - 1$ для некоторого s ,

$0 < s \leq t$, то $H^{(m)} = H^{(m-1)}$. С другой стороны, согласно 20.6, ii) мы имеем $1 \otimes u_m \in \text{im } f$. Так как f — гомоморфизм A_* -алгебр, то отсюда следует, что $A_*^t \otimes H^{(m)} \subset \text{im } f$. Таким образом, по индукции мы получим $A_*^t \otimes H^{(2^{t+1}-2)} \subset \text{im } f$. Это завершает шаг индукции. $\square$

Следовательно, $H_*(MO; \mathbb{Z}_2) \cong A_* \otimes H$, что является наилучшим из возможных результатов, ибо согласно предложению 19.7 мы имеем теперь

$$E_2^{s,t} = \text{Ext}_{A_*}^{s,t}(\mathbb{Z}_2, A_* \otimes H) \cong \text{Ext}_{\mathbb{Z}_2}^{s,t}(\mathbb{Z}_2, H) = \begin{cases} \text{Hom}_{\mathbb{Z}_2}^t(\mathbb{Z}_2, H), & s=0 \\ 0, & s>0 \end{cases} = \begin{cases} H_t, & s=0 \\ 0, & s>0. \end{cases}$$

Значит, спектральная последовательность вырождается, и мы получаем следующую теорему.

20.8. Теорема. *Гомоморфизм Гуресича*

$$h: {}_2\pi_*(MO) \rightarrow P(H_*(MO; \mathbb{Z}_2)) \cong P(A_* \otimes H) \cong H$$

является изоморфизмом и, следовательно,

$${}_2\pi_*(MO) \cong \mathbb{Z}_2[u_2, u_4, u_5, \dots].$$

Согласно примерам 12.24 каждый ненулевой элемент из Ω_*^0 имеет порядок 2, поэтому $\pi_*(MO) = {}_2\pi_*(MO)$. Таким образом, мы вычислили кольцо неориентированных бордизмов Ω_*^0 :

$$\Omega_*^0 \cong \mathbb{Z}_2[N_2, N_4, N_5, \dots],$$

$N_k \in \Omega_k^0$ для любых $k \neq 2^l - 1$ при всех $l > 0$.

Более того, мы видим, что в качестве полиномиальной образующей $N_k \in \Omega_k^0$ можно выбрать любой класс бордизмов N_k , для которого

$$f(h(N_k)) = 1 \otimes u_k,$$

т. е. любой такой класс N_k , что $h(N_k) \equiv a_k \pmod{M^{(k-1)}}$. В терминах характеристических чисел это означает, что в качестве полиномиальной образующей может быть взят любой класс N_k , для которого

$$s_{(0,0,\dots,1)}(N_k) = 1.$$

Рассмотрим теперь спектры MU и MSp . Пусть $L = H_*(MU; \mathbb{Z}_2)$, $K = H_*(MSp; \mathbb{Z}_2)$.

20.9. Предложение. Пусть $\alpha: A_* \rightarrow A_*$ — гомоморфизм алгебр, задаваемый формулой $\alpha(x) = x^2$, $x \in A_*$. Тогда существуют такие изоморфизмы $f: M \rightarrow L$, $g: L \rightarrow K$ (неградуированных) алгебр

над $\mathbb{Z}_2$, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{\psi_M} & A_* \otimes M \\
 f \downarrow & & \downarrow \alpha \otimes f \\
 L & \xrightarrow{\psi_L} & A_* \otimes L \\
 g \downarrow & & \downarrow \alpha \otimes g \\
 K & \xrightarrow{\psi_K} & A_* \otimes K
 \end{array}$$

коммутативна.

Доказательство. Для любого комплексного расслоения ξ обозначим через $r\xi$ его овеществление, и пусть $c: \mathbb{R}P^\infty \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$ — отображение, задающее расслоение $\omega \otimes \mathbb{C}$, где ω — вещественное расслоение Хопфа. Если η — комплексное расслоение Хопфа, то

$$c^*(\omega_2 r\eta) = \omega_2(c^* r\eta) = \omega_2(rc^*\eta) = \omega_2(\omega \oplus \omega) = x^2.$$

В частности, $\omega_2 r\eta \neq 0$, так что мы должны иметь $\omega_2 r\eta = y \in H^2(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}_2)$. Более того, $c^*(y) = x^2$, и, следовательно,

$$c_*(x_k) = \begin{cases} y_i, & k = 2i, \\ 0, & k \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Согласно лемме 20.4

$$\psi_{\mathbb{R}P^\infty}(x_k) = \sum_{i+j=k} (X^j)_i \otimes x_j.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
 \psi_{\mathbb{C}P^\infty}(y_k) &= \psi_{\mathbb{C}P^\infty c_*}(x_{2k}) = \\
 (1 \otimes c_*) \psi_{\mathbb{R}P^\infty}(x_{2k}) &= (1 \otimes c_*) \left(\sum_{i+j=2k} (X^j)_i \otimes x_j \right) = \\
 \sum_{i+j=2k} (X^{2j})_i \otimes y_j &= \sum_{i+j=k} \alpha(X^j)_i \otimes y_j.
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\psi_{MU}(b_k) = \sum_{i+j=k} \alpha(X^{i+1})_i \otimes b_j \quad \text{для } k \geq 1.$$

Следовательно, верхний квадрат диаграммы 20.9 станет коммутативным, если определить f формулой $f(a_k) = b_k$ для $k \geq 1$ и потребовать, чтобы f был гомоморфизмом алгебр. Аналогично, нижний квадрат диаграммы будет коммутативным, если задать g формулой $g(b_k) = q_k$, $k \geq 1$. $\square$

Пусть $H' = \mathbb{Z}_2[v_2, v_4, v_5, \dots]$ с $v_k \in H'_{2k}$ для любых $k \neq 2^t - 1$ и всех $t > 0$. Аналогично, пусть $H'' = \mathbb{Z}_2[\omega_2, \omega_4, \omega_5, \dots]$ с $\omega_k \in H''_{2k}$,

$k \neq 2^t - 1$ при всех $t > 0$ (эти элементы ω_k не следует путать с классами Штифеля — Уитни).

20.10. Теорема. *Существуют изоморфизмы градуированных алгебр над A_**

$$\kappa': H_*(MU; \mathbb{Z}_2) \rightarrow \alpha A_* \otimes H',$$

$$\kappa'': H_*(MSp; \mathbb{Z}_2) \rightarrow \alpha^2 A_* \otimes H''.$$

Доказательство. Мы имеем диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
 A_* \otimes H & \xrightarrow{\psi \otimes 1} & A_* \otimes A_* \otimes H & & \\
 \downarrow \alpha \otimes f' & \swarrow \kappa & \downarrow \psi_M & \searrow 1 \otimes \kappa & \downarrow \alpha \otimes \alpha \otimes f' \\
 & M & A_* \otimes M & & \\
 & \downarrow f & \downarrow \alpha \otimes f & & \\
 & L & A_* \otimes L & & \\
 \downarrow \alpha \otimes f' & \swarrow \kappa' & \downarrow \psi_L & \searrow 1 \otimes \kappa' & \downarrow \alpha \otimes \alpha \otimes f' \\
 A_* \otimes H' & \xrightarrow{\psi \otimes 1} & A_* \otimes A_* \otimes H' & &
 \end{array}$$

в которой $f': H \rightarrow H'$ — гомоморфизм алгебр, заданный формулой $f'(u_i) = v_i$, $i \geq 2$, $\kappa: M \rightarrow A_* \otimes H$ — изоморфизм из теоремы 20.7, а κ' определен так, чтобы сделать квадрат 2 коммутативным. Тогда квадрат 4 также коммутативен. Квадрат 1 коммутативен по построению f , а квадрат 3 — по построению κ . Внешний квадрат коммутативен, поскольку α является гомоморфизмом коалгебр (почему?). Следовательно, коммутативен квадрат 5; другими словами, κ' является гомоморфизмом комодулей. Без труда проверяется, что κ' сохраняет градуировку. Аналогичным образом строится изоморфизм κ'' . $\square$

Если L — некоторый C -комодуль и V — некоторый R -модуль, то $L \otimes_R V$ также является C -комодулем относительно действия

$$L \otimes_R V \xrightarrow{\psi_L \otimes 1} (C \otimes_R L) \otimes_R V \cong C \otimes_R (L \otimes_R V).$$

20.11. Лемма. *Пусть R — поле, V — градуированное векторное пространство над R , C — коалгебра над R и L — некоторый C -комодуль. Тогда существует изоморфизм (вообще говоря, не естественный)*

$$\text{Ext}_C^{**}(R, L \otimes_R V) \cong \text{Ext}_C^{**}(R, L) \otimes_R V.$$

Доказательство. Выберем в пространстве V однородный R -базис, т. е. такой базис $\{v_\alpha\}$, что каждый v_α лежит в $V_{i(\alpha)}$ для некоторого номера $i(\alpha)$. Затем определим отображение

$$\Phi: \text{Hom}_C^*(R, L \otimes_R V) \rightarrow \text{Hom}_C^*(R, L) \otimes_R V,$$

полагая $\Phi(\phi) = \sum_{\alpha} \phi_{\alpha} \otimes v_{\alpha}$ для каждого $\phi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}^*(R, L \otimes_R V)$,

где $\phi(1) = \sum_{\alpha} \phi_{\alpha}(1) \otimes v_{\alpha}$ (R -гомоморфизм ϕ_{α} однозначно определен своим значением $\phi_{\alpha}(1)$). Так как $\text{Hom}_{\mathcal{C}}^*(R, -) = P(-)$, то очевидно, что Φ — изоморфизм.

Пусть теперь

$$0 \rightarrow L \rightarrow Y_0 \rightarrow Y_1 \rightarrow Y_2 \rightarrow \dots$$

— инъективная резольвента для L над коалгеброй C (см. предложение 19.15). Тогда каждый комодуль $Y_i \otimes_R V$ также инъективен (почему?) и, значит,

$$0 \rightarrow L \otimes_R V \rightarrow Y_0 \otimes_R V \rightarrow Y_1 \otimes_R V \rightarrow \dots$$

является инъективной резольventой C -комодуля $L \otimes_R V$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{**}(R, L \otimes_R V) &\cong H^*(\text{Hom}_{\mathcal{C}}^*(R, Y_* \otimes_R V)) \cong \\ &H^*(\text{Hom}_{\mathcal{C}}^*(R, Y_*) \otimes_R V). \end{aligned}$$

Согласно теореме Кюннета мы имеем

$$H^*(\text{Hom}_{\mathcal{C}}^*(R, Y_*) \otimes_R V) \cong H^*(\text{Hom}_{\mathcal{C}}^*(R, Y_*)) \otimes_R V,$$

где V рассматривается как коцепной комплекс с нулевыми дифференциалами. Поэтому

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{**}(R, L \otimes_R V) &\cong H^*(\text{Hom}_{\mathcal{C}}^*(R, Y_*)) \otimes_R V \cong \\ &\text{Ext}_{\mathcal{C}}^{**}(R, L) \otimes_R V. \quad \square \end{aligned}$$

Таким образом, члены E_2 спектральных последовательностей Адамса для MU и MSp изоморфны соответственно

$$E_2^{**} \cong \text{Ext}_{A_*}^{**}(\mathbb{Z}_2, \alpha A_*) \otimes H'$$

и

$$E_2^{**} \cong \text{Ext}_{A_*}^{**}(\mathbb{Z}_2, \alpha^2 A_*) \otimes H''.$$

Следовательно, мы приходим к задаче вычисления групп $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^{**}(K, D)$ для некоторой подалгебры $D \subset C$. Разумеется, это потребует более развитой гомологической алгебры.

20.12. Пусть A — некоторая алгебра над R , M — правый A -модуль и N — левый A -модуль. Построим тензорное произведение $M \otimes_A N$, взяв $M \otimes_R N$ и введя дополнительные соотношения

$$m \otimes an = ma \otimes n \quad \text{для всех } m \in M, n \in N, a \in A.$$

Другими словами, мы имеем точную последовательность

$$M \otimes_R A \otimes_R N \xrightarrow{\phi_M \otimes 1 - 1 \otimes \phi_N} M \otimes_R N \rightarrow M \otimes_A N \rightarrow 0,$$

в которой ϕ_M и ϕ_N — отображения, задающие действие алгебры A на модулях M и N . Дуализируя это определение, мы получим

котензорное произведение $K \square_C L$ правого C -комодуля K и левого C -комодуля L , где C — коалгебра над R . Более подробно, $K \square_C L$ определяется с помощью точной последовательности

$$0 \rightarrow K \square_C L \rightarrow K \otimes_R L \xrightarrow{\psi_K \otimes 1 - 1 \otimes \psi_L} K \otimes_F C \otimes_R L,$$

в которой ψ_K и ψ_L — отображения, задающие C -кодействия на K и L . Без труда проверяется, что $\square_C$ — ковариантный функтор по обоим переменным. Если R — поле, легко доказываются соотношения ассоциативности типа

$$M \otimes_R (N \square_C Q) \cong (M \otimes_R N) \square_C Q.$$

Пусть E — связная коалгебра (т. е. $E_0 = R$) над полем R с коммутативным коумножением и $F \subset E$ — подкоалгебра (наиболее интересный для нас пример — это $A \cdot (\alpha(\bar{A})) \subset A$). Пусть, далее, $B = E/\bar{F}$, где через $\bar{F}$, как обычно, обозначаются элементы положительных степеней из F . Для алгебры Хопфа E и ее подалгебры F с $E\bar{F} = \bar{F}E$ обозначим через $E//F$ алгебру $E/E\bar{F}$.

20.13. Упражнение. Коумножение $\psi_E: E \rightarrow E \otimes_R E$ индуцирует гомоморфизм $\psi_B: B \rightarrow B \otimes_R B$. Показать, что B является коалгеброй с коумножением ψ_B и что гомоморфизм

$$E \xrightarrow{\psi_E} E \otimes_R E \xrightarrow{1 \otimes p} E \otimes_R B,$$

где $p: E \rightarrow B$ — проекция, является кодействием, превращающим E в правый комодуль над B . В дальнейшем мы будем обозначать композицию $(1 \otimes p) \cdot \psi_E$ через ψ_E^B .

20.14. Упражнение. Пусть $\sigma_l: E \rightarrow E \otimes_R B$ — гомоморфизм задаваемый формулой $\sigma_l(e) = e \otimes 1$ для всех $e \in E$. Показать, что F является ядром гомоморфизма

$$E \xrightarrow{\psi_E^B - \sigma_l} E \otimes_R B$$

20.15. Предложение. Существует естественный изоморфизм E -комодулей

$$\phi: E \square_B R \rightarrow F.$$

Доказательство. Кодействие ψ_R^B на B -комодуле R задается формулой $\psi_R^B(r) = r \cdot 1 \otimes 1$ для всех $r \in R$. Имеет место коммутативная диаграмма с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & E \square_B R & \longrightarrow & E \otimes_R R & \xrightarrow{\psi_E^B \otimes 1 - 1 \otimes \psi_R^B} & E \otimes_R B \otimes_R R \\ & & \downarrow \phi & & \parallel & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & F & \longrightarrow & E & \xrightarrow{\psi_E^B - \sigma_l} & E \otimes_R B. \end{array}$$

Эта диаграмма определяет отображение ϕ . Покажем, что ϕ — гомоморфизм E -комодулей. С этой целью рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
 E \otimes_R E \square_B R & \xrightarrow{\quad} & E \otimes_R E \otimes_R R & & \\
 \downarrow \psi_E \square 1 & \nearrow 4. & & \searrow \psi_E \otimes 1 & \\
 & E \square_B R & \xrightarrow{\quad} & E \otimes_R R & \\
 1 \otimes \phi \downarrow & \downarrow \phi & 1 & \parallel & 3 \\
 & F & \xrightarrow[i]{2} & E & \\
 \psi_F \nearrow & & & \searrow \psi_E & \\
 E \otimes_R F & \xrightarrow{1 \otimes i} & E \otimes_R E & &
 \end{array}$$

Квадрат 1 этой диаграммы коммутативен по определению отображения ϕ , квадрат 2 коммутативен потому, что F является подколгеброй E , квадрат 3 коммутативен, поскольку ψ_E — гомоморфизм R -модулей, квадрат 4 коммутативен по определению отображения $\psi_E \square 1$ и, наконец, внешний квадрат коммутативен, так как коммутативен квадрат 1. Следовательно, квадрат 5 также коммутативен, т. е. ϕ — гомоморфизм E -комодулей. $\square$

20.16. Предложение. Если E , F и B такие же, как выше, то для любого левого E -комодуля L и левого B -комодуля M существует естественный изоморфизм

$$\text{Hom}_E^t(L, E \square_B M) \cong \text{Hom}_B^t(L, M).$$

Следовательно, существует изоморфизм

$$\text{Ext}_E^{s,t}(L, E \square_B M) \cong \text{Ext}_B^{s,t}(L, M), \quad s \geq 0, t \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Это предложение обобщает наш прежний результат

$$\text{Ext}_E^{s,t}(L, E \otimes_R M) \cong \text{Ext}_R^{s,t}(L; M);$$

достаточно положить в предложении 20.16 $F = E$. На самом деле, мы имеем диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & \text{Hom}_E^t(L, E \square_B M) & \rightarrow & \text{Hom}_E^t(L, E \otimes_R M) & \rightarrow & \text{Hom}_E^t(L, E \otimes_R B \otimes_R M) \\
 & & & & \Phi \uparrow \Psi & & \\
 & & & & 0 & \rightarrow & \text{Hom}_B^t(L, M) \rightarrow \text{Hom}_R^t(L, M) .
 \end{array}$$

Верхняя строка в этой диаграмме получается применением функтора $\text{Hom}_E^t(L, -)$ к точной последовательности, определяющей $E \square_B M$. Поэтому все, что нам нужно сделать, это проверить

включения

$$\Phi(\text{Hom}_E^t(L, E \square_B M)) \subset \text{Hom}_B^t(L, M),$$

$$\Psi(\text{Hom}_B^t(L, M)) \subset \text{Hom}_E^t(L, E \square_B M).$$

а) Пусть $g: L \rightarrow M$ — некоторый B -морфизм; тогда $\Psi(g)$ представляет собой композицию

$$L \xrightarrow{\psi_L^E} E \otimes_R L \xrightarrow{1 \otimes g} E \otimes_R M.$$

Мы покажем, что $(\psi_E^B \otimes 1 - 1 \otimes \psi_M^B) \cdot \Psi(g) = 0$, откуда будет следовать, что $\Psi(g) \in \text{Hom}_E^t(L, E \square_B M)$.

$$(\psi_E^B \otimes 1) \cdot (1 \otimes g) \cdot (\psi_L^E) = (1 \otimes 1 \otimes g) \cdot (\psi_E^B \otimes 1) \cdot \psi_L^E =$$

$$(1 \otimes 1 \otimes g) \cdot (1 \otimes \rho \otimes 1) \cdot (\psi_E^E \otimes 1) \cdot \psi_L^E = (\text{по определению } \psi_E^B)$$

$$(1 \otimes 1 \otimes g) \cdot (1 \otimes \rho \otimes 1) \cdot (1 \otimes \psi_L^E) \cdot \psi_L^E =$$

$$(1 \otimes 1 \otimes g) \cdot (1 \otimes \psi_L^B) \cdot \psi_L^E = (\text{по определению } \psi_L^B)$$

$$(1 \otimes \psi_M^B) \cdot (1 \otimes g) \cdot \psi_L^E.$$

б) Предположим теперь, что $f: L \rightarrow E \otimes_R M$ — некоторый E -морфизм; тогда $\Phi(f)$ является композицией

$$L \xrightarrow{1} E \otimes_R M \xrightarrow{\varepsilon \otimes 1} R \otimes_R M \cong M.$$

Покажем, что если $f \in \text{Hom}_E^t(L, E \square_B M)$, т. е. $(\psi_E^B \otimes 1) \cdot f = (1 \otimes \psi_M^B) \cdot f$, то $\Phi(f) \in \text{Hom}_B^t(L, M)$, т. е.

$$\psi_M^B \cdot \Phi(f) = [1 \otimes \Phi(f)] \cdot \psi_L^B.$$

$$[1 \otimes \Phi(f)] \cdot \psi_L^B = (1 \otimes \kappa) \cdot (1 \otimes \varepsilon \otimes 1) \cdot (1 \otimes f) \cdot (\rho \otimes 1) \cdot \psi_L^E =$$

$$(1 \otimes \kappa) \cdot (1 \otimes \varepsilon \otimes 1) \cdot (\rho \otimes 1 \otimes 1) \cdot (1 \otimes f) \cdot \psi_L^E =$$

$$(1 \otimes \kappa) \cdot (1 \otimes \varepsilon \otimes 1) \cdot (\rho \otimes 1 \otimes 1) \cdot (\psi_E^E \otimes 1) \cdot f =$$

$$(\rho \otimes 1) \cdot (1 \otimes \kappa) \cdot (1 \otimes \varepsilon \otimes 1) \cdot (\psi_E^E \otimes 1) \cdot f =$$

$$(\rho \otimes 1) \cdot \kappa \cdot (\varepsilon \otimes 1 \otimes 1) \cdot (\psi_E^E \otimes 1) \cdot f =$$

$$\kappa \cdot (\varepsilon \otimes 1 \otimes 1) \cdot (1 \otimes \rho \otimes 1) \cdot (\psi_E^E \otimes 1) \cdot f =$$

$$\kappa \cdot (\varepsilon \otimes 1 \otimes 1) \cdot (\psi_E^B \otimes 1) \cdot f =$$

$$\kappa \cdot (\varepsilon \otimes 1 \otimes 1) \cdot (1 \otimes \psi_M^B) \cdot f = (\text{по предположению об } f)$$

$$\psi_M^B \cdot \kappa \cdot (\varepsilon \otimes 1) \cdot f = \psi_M^B \cdot \Phi(f).$$

В этом месте нам придется сослаться без доказательства на теорему Милнора — Мура [61]: при сделанных выше предположениях на E , F и B существует изоморфизм правых B -комодулей $E \cong F \otimes_R B$. Так как R — поле (и, следовательно, F — векторное пространство над R), то E является свободным B -комодулем.

Поэтому функтор $E \square_B$ точен. Если читатель усвоил изложенные здесь факты о комодулях и котензорных произведениях, то он без труда разберется в доказательстве этой теоремы.

Выберем теперь проективную резольвенту

$$0 \leftarrow L \leftarrow X_0 \leftarrow X_1 \leftarrow \dots$$

комодуля L над E . Тогда X_i будут также и проективными B -комодулями. Действительно, если задана диаграмма B -комодулей

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ & \downarrow \pi & \\ C & \xrightarrow{\gamma} D & \longrightarrow 0 \end{array}$$

и X проективен над E , то имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_B^*(X, C) & \longrightarrow & \text{Hom}_B^*(X, D) \\ \parallel & & \parallel \end{array}$$

$$\text{Hom}_E^*(X, E \square_B C) \rightarrow \text{Hom}_E^*(X, E \square_B D).$$

Нижняя стрелка в этой диаграмме является эпиморфизмом, следовательно, $\text{Hom}_B^*(X, C) \rightarrow \text{Hom}_B^*(X, D)$ также эпиморфизм. Таким образом,

$$\begin{aligned} \text{Ext}_E^{s,t}(L, E \square_B M) &= H^s(\text{Hom}_E^t(X_*, E \square_B M)) \cong \\ &= H^s(\text{Hom}_B^t(X_*, M)) = \text{Ext}_B^{s,t}(L, M), \quad s \geq 0, t \in \mathbb{Z}. \quad \square \end{aligned}$$

20.17. Следствие. Для любого E -комодуля L имеет место изоморфизм

$$\text{Ext}_E^{s,t}(L, F) \cong \text{Ext}_B^{s,t}(L, R).$$

Поэтому в спектральных последовательностях Адамса для MU и MSp мы имеем, соответственно,

$$E_2^{**} \cong \text{Ext}_{B_1}^{**}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \otimes H',$$

и

$$E_2^{**} \cong \text{Ext}_{B_2}^{**}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \otimes H'',$$

где $B_1 = A_* / A_* \cdot \overline{\alpha(A_*)}$, $B_2 = A_* / A_* \cdot \overline{\alpha^2(A_*)}$.

Алгебру B_1 легко описать: все квадраты x^2 в B_1 равны нулю и, значит,

$$B_1 = E(\xi_1, \xi_2, \dots)$$

— внешняя алгебра над $\mathbb{Z}_2$ с образующими $\xi_i \in (B_1)_{2^i-1}$, $i \geq 1$.

Алгебра B_2 устроена более сложно. Отметим, что

$$\psi_{B_1}(\xi_i) = \xi_i \otimes 1 + 1 \otimes \xi_i.$$

Кроме того, нетрудно выписать резольвенту для $\mathbb{Z}_2$, составленную из расширенных комодулей над B_1 . Рассмотрим для начала внешнюю алгебру $E(x)$ с одной образующей x , и пусть $\psi x = x \otimes 1 + 1 \otimes x$. Возьмем $Y_* = E(x) \otimes \mathbb{Z}_2[y]$ с $Y_s = E(x) \otimes y^s$, $\deg y = \deg x$ и дифференциалом $\delta: Y_s \rightarrow Y_{s+1}$, задаваемым теми требованиями, чтобы он был дифференцированием и чтобы $\delta x = y$, $\delta y = 0$. Тогда $\delta y^s = 0$, $\delta x y^s = y^{s+1}$ для всех $s \geq 1$, так что комплекс (Y_*, δ) ацикличен. Легко проверяется, что δ — гомоморфизм $E(x)$ -комодулей. Если теперь $E(\xi_1, \xi_2, \dots)$ — произвольная внешняя алгебра с конечным числом образующих ξ_i данной степени, то в качестве резольвенты $\mathbb{Z}_2$ над $E(\xi_1, \xi_2, \dots)$ возьмем тензорное произведение построенных выше резольвент для каждой $E(\xi_i)$ (ясно, что $E(\xi_1, \xi_2, \dots) \cong E(\xi_1) \otimes E(\xi_2) \otimes \dots$). Таким образом, мы получаем комплекс

$$Y_* = E(\xi_1, \xi_2, \dots) \otimes \mathbb{Z}_2[y_1, y_2, \dots],$$

где $\deg y_i = \deg \xi_i$, а дифференциал δ определяется равенствами $\delta \xi_i = y_i$, $\delta y_i = 0$ и требованием, чтобы он был дифференцированием. Тогда Y_n представляет собой $E(\xi_1, \xi_2, \dots)$ -комодуль, порожденный мономами $y^\alpha = y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \dots y_r^{\alpha_r}$ с $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r = n$. Из теоремы Кюннета следует, что комплекс Y_* ацикличен.

Итак, если $B_1 = E(\xi_1, \xi_2, \dots)$, то

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{B_1}^*(\mathbb{Z}_2, Y_*) &= \text{Hom}_{B_1}^*(\mathbb{Z}_2, B_1 \otimes \mathbb{Z}_2[y_1, y_2, \dots]) \cong \\ &\text{Hom}_{\mathbb{Z}_2}^*(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2[y_1, y_2, \dots]) \cong \mathbb{Z}_2[y_1, y_2, \dots]. \end{aligned}$$

При этом изоморфизме дифференциал $\text{Hom}(1, \delta)$ превращается в нуль. Поэтому

$$\text{Ext}_{B_1}^{**}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[q_0, q_1, \dots], \quad q_k \in \text{Ext}_{B_1}^{1, 2^{k+1}-1}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2),$$

где $q_k = y_{k+1}$ для всех $k \geq 0$.

20.18. Упражнение. Проверить, что умножение на $q_0 \in \text{Ext}_{B_1}^{1,1}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)$ совпадает с умножением на элемент h_0 из спектральной последовательности Адамса для $\pi_*^\mathbb{Z}_2$.

Объединяя теорему 20.10, лемму 20.11, следствие 20.17 и сделанные выше вычисления, мы найдем, что в спектральной последовательности Адамса для MU имеет место изоморфизм

$$E_*^{**} \cong \mathbb{Z}_2[q_0, q_1, \dots] \otimes H' = \mathbb{Z}_2[q_0] \otimes \mathbb{Z}_2[m_1, m_2, \dots],$$

где

$$m_k = \begin{cases} v_k \in E_*^{0, 2^k}, & \text{если } k \neq 2^t - 1 \text{ ни для какого } t, \\ q_t \in E_*^{1, 2^{k+1}}, & \text{если } k = 2^t - 1 \end{cases}$$

В частности, если разность $t-s$ нечетна, то $E_*^{s,t} = 0$. Следовательно, поскольку дифференциалы d_r уменьшают разность $t-s$ на единицу, то все они равны нулю. Таким образом, член E_∞

имеет вид:

	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	
4	q_0^4		$q_0^3 m_1$		$q_0^2 m_1^2$	$q_0^4 m_2$	...
3	q_0^3		$q_0^2 m_1$		$q_0 m_1^2$	$q_0^3 m_2$	...
2	q_0^2		$q_0 m_1$		m_1^2	$q_0^2 m_2$	...
1	q_0		m_1		$q_0 m_2$		...
0	1				m_2		...
	0	1	2	3	4		
	$t - s \rightarrow$						

Каждая колонка m^α , $q_0 m^\alpha$, $q_0^2 m^\alpha$, ..., где m — моном от переменных m_k , определяет в ${}_{2\pi_*}(MU)$ слагаемое, изоморфное $\mathbb{Z}$.

20.19. Теорема. *Существует изоморфизм групп*

$${}_{2\pi_*}(MU) \cong \mathbb{Z}[m_1, m_2, \dots] \quad (\deg m_k = 2k).$$

При этом гомоморфизм Гуревича ${}_{2\pi_*}(MU) \rightarrow PH_*(MU; \mathbb{Z}_2) \cong H_*$ является эпиморфизмом. В частности, группа $\pi_*(MU)$ не имеет 2-кручения.

20.20. Упражнение. Показать, что замкнутое многообразие M^{2n} неориентируемо бордантно U -многообразию тогда и только тогда, когда оно неориентируемо бордантно $V^n \times V^n$ для некоторого замкнутого многообразия V^n .

[Указание. Вычислить $\text{im}[H_*(MU; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_*(MO; \mathbb{Z}_2)]$.]

Покажем теперь, что группы $\pi_*(MU)$ не имеют p -кручения ни для какого нечетного простого p . Чтобы доказать этот факт, необходимо исследовать спектральную последовательность Адамса $\text{mod } p$ для MU . Как мы сейчас увидим, вычисления $\text{mod } p$ для MU замечательно похожи на вычисления $\text{mod } 2$ для MO . Организуем их так, чтобы подчеркнуть это сходство.

Напомним, что $\tilde{H}_*(\mathbb{CP}^\infty; \mathbb{Z}_p)$ является векторным пространством над $\mathbb{Z}_p$ с базисом $y_1, y_2, \dots$ и что $H_*(MU; \mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p[b_1, b_2, \dots]$, где $f: \mathbb{CP}^\infty \rightarrow \Sigma^2 MU$ переводит y_{i+1} в b_i , $i \geq 0$.

20.21. Предложение. Пусть $A_* = H_*(H(\mathbb{Z}_p); \mathbb{Z}_p)$ и $X = 1 + \xi_1 + \xi_2 + \dots$. Тогда для любого $\alpha \in A^*$ $\alpha y = \sum_i \langle \alpha, \xi_i \rangle y^{p^i}$. Следовательно,

$$\psi y_k = \sum_{i+j=k} (X^j)_{2i} \otimes y_j, \quad k \geq 0.$$

Доказательство. Напомним, прежде всего, что

$$A_* \cong E(\tau_0, \tau_1, \dots) \otimes \mathbb{Z}_p[\xi_1, \xi_2, \dots].$$

Двойственным к τ_i является допустимый моном

$$p^{p^i-1} p^{p^{i-2}} \dots p^p p^1 \beta,$$

а двойственным к ξ_i — допустимый моном

$$p^{p^i-1} p^{p^{i-2}} \dots p^1.$$

Так как $H^{2k+1}(\mathbb{CP}^\infty; \mathbb{Z}_p) = 0$ для всех k , то любой допустимый моном, содержащий β , должен быть тривиальной операцией на $H^*(\mathbb{CP}^\infty; \mathbb{Z}_p)$. Так как $y \in H^2(\mathbb{CP}^\infty; \mathbb{Z}_p)$, то любой моном, имеющий избыток, больший единицы, будет аннулировать y . Следовательно,

$$p^I y = \begin{cases} y^{p^s}, & I = (0, p^{s-1}, 0, p^{s-2}, 0, \dots, p, 0, 1, 0), \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Это равенство можно записать следующим образом:

$$p^I y = \sum_i \langle p^I, \xi_i \rangle y^{p^i}$$

для всех допустимых мономов p^I . Но p^I образуют $\mathbb{Z}_p$ -базис для A^* . Значит, для любого $\alpha \in A^*$

$$\alpha y = \sum_i \langle \alpha, \xi_i \rangle y^{p^i}.$$

Аналогично тому, как мы вычислили αx^k для всех α в алгебре Стиррода mod 2, находим

$$\alpha y^k = \sum_i \langle \alpha, (X^k)_{2(k-i)} \rangle y^i.$$

Следовательно, из равенства $\langle \alpha z, u \rangle = \sum_i \langle \alpha, e_j \langle z, u_j \rangle \rangle$ вытекает формула предложения 20.21. $\square$

20.22. Следствие.

$$\psi b_k = \sum_{i+j=k} (X^{j+1})_{2i} \otimes b_j, \quad k \geq 0.$$

Пусть теперь $H' = \mathbb{Z}_p[v_1, v_2, \dots]$ с $v_k \in H'_{2k}$ для всех k , не равных $p^t - 1$. Определим $g: H_*(MU; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H'$, полагая

$$g(b_k) = \begin{cases} v_k, & \text{если } k \neq p^t - 1 \text{ ни для какого } t > 0, \\ 0, & \text{если } k = p^t - 1 \text{ для некоторого } t > 0. \end{cases}$$

Тогда g индуцирует гомоморфизм $f: H_*(MU; \mathbb{Z}_p) \rightarrow C \otimes H'$ алгебр над A_* , где $C \subseteq A_*$ — подалгебра Хопфа $\mathbb{Z}_p[\xi_1, \xi_2, \dots]$.

20.23. Теорема. Гомоморфизм $f: H_*(MU; \mathbb{Z}_p) \rightarrow C \otimes H'$ является изоморфизмом комодулей над A_* .

Доказательство фактически совпадает с доказательством теоремы 20.7.

20.24. Следствие. В спектральной последовательности Адамса $\text{mod } p$ для MU имеют место изоморфизмы

$$E_1^{**} \cong \text{Ext}_{A_*}^{**}(\mathbb{Z}_p, C \otimes H') \cong \text{Ext}_{A_*}^{**}(\mathbb{Z}_p, C) \otimes H' \cong \text{Ext}_B^{**}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p) \otimes H',$$

где $B = A_*/A_* \cdot \bar{C} \cong E(\tau_0, \tau_1, \dots)$, $\psi_B(\tau_i) = \tau_i \otimes 1 + 1 \otimes \tau_i$.

Здесь мы снова использовали утверждения 20.11 и 20.17.

Резольвента модуля $\mathbb{Z}_p$ над внешней алгеброй $E(\tau_0, \tau_1, \dots)$ строится точно так же, как резольвента модуля $\mathbb{Z}_2$ над $E(\xi_1, \xi_2, \dots)$; надо лишь везде заменить $\mathbb{Z}_2$ на $\mathbb{Z}_p$.

Следовательно, мы получаем

$$\text{Ext}_B^{**}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p[q_0, q_1, \dots], \quad q_k \in \text{Ext}_B^{1, 2p^k-1}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p).$$

Таким образом, член E_2 спектральной последовательности Адамса $\text{mod } p$ имеет вид

$$E_2^{**} \cong \mathbb{Z}_p[q_0, q_1, \dots] \otimes H' \cong \mathbb{Z}_p[q_0] \otimes \mathbb{Z}_p[m_1, m_2, \dots],$$

где

$$m_k = \begin{cases} v_k \in E_2^{0, 2k}, & \text{если } k \neq p^t - 1 \text{ ни для какого } t > 0, \\ q_t \in E_2^{1, 2k+1}, & \text{если } k = p^t - 1 \text{ для некоторого } t > 0. \end{cases}$$

Как и прежде, если разность $t-s$ нечетна, то $E_1^{\frac{1}{2}, t} = 0$; значит, все дифференциалы $d_r = 0$. Умножение на q_0 в E_∞^{**} соответствует умножению на p в $\pi_*(MU)$, поэтому мы получаем следующую теорему.

20.25. Теорема. Имеет место изоморфизм групп

$${}_p\pi_*(MU) \cong \mathbb{Z}[m_1, m_2, \dots].$$

При этом гомоморфизм Гуревича

$$h: {}_p\pi_t(MU) \rightarrow PH_t(MU; \mathbb{Z}_p) \cong H^t$$

является эпиморфизмом. В частности, группа $\pi_*(MU)$ не имеет p -кручения ни для какого нечетного простого p и, следовательно, вообще не содержит элементов конечного порядка.

20.26. Следствие. Гомоморфизм

$$h: \pi_*(MU) \rightarrow H_*(MU; \mathbb{Z})$$

является мономорфизмом.

Доказательство. Соответствие

$$(h \otimes 1): \pi_*^S(-) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow H_*(-; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}$$

является естественным преобразованием теорий гомологий и изоморфизмом для $X = S^0$. Следовательно, $h \otimes 1$ — естественная экви-

валентность. Так как группа $\pi_*(MU)$ не имеет элементов конечного порядка, то в коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} \pi_*(MU) & \longrightarrow & \pi_*(MU) \otimes \mathbb{Q} \\ h \downarrow & & \cong \downarrow h \otimes 1 \\ H_*(MU; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H_*(MU; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q} \end{array}$$

$\pi_*(MU) \rightarrow \pi_*(MU) \otimes \mathbb{Q}$ — мономорфизм, откуда и вытекает требуемое утверждение. $\square$

20.27. Теорема. Существует изоморфизм колец

$$\pi_*(MU) \cong \mathbb{Z}[M_1, M_2, \dots], \quad M_i \in \pi_{2i}(MU).$$

При этом можно так выбрать полиномиальные образующие M_i , чтобы

$$h(M_i) = \begin{cases} b_i \bmod \{\text{разложимые элементы}\}, & \text{если } i \neq p^t - 1 \text{ ни для} \\ & \text{какого простого } p; \\ p^{f(i)} b_i \bmod \{\text{разложимые элементы}\}, & \text{если } i = p^t - 1 \\ & \text{для некоторого простого } p \text{ и некоторого } t > 0, \end{cases}$$

где $f(i) \in \mathbb{N}$ и f — такая функция, что $f(i) = 0$, если i не является степенью простого числа p .

Доказательство. Покажем, прежде всего, что $\pi_*(MU) \otimes \mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}_p[P_1, P_2, \dots]$ с $P_i \in \pi_{2i}(MU)$ для каждого простого p . С этой целью выберем в качестве P_i элементы гомотопических групп $\pi_{2i}(MU)$, соответствующие $m_i \in E_{\infty}^{**}$. Нетрудно видеть, что мономы $P^\alpha = P_1^{\alpha_1} \dots P_r^{\alpha_r}$ от переменных P_i линейно независимы. Проверим теперь, что указанные мономы порождают $\pi_*(MU) \otimes \mathbb{Z}_p$. Для этого нам понадобится следующая лемма.

20.28. Лемма. Предположим, что группа $\pi_*(Y)$ имеет конечный тип. Пусть $q \in \mathbb{Z}$, p — простое число, $s > 0$. Если $G \subset \pi_q(Y)$ — подгруппа элементов, делящихся на p^s , то существует такой номер t , что $F^{t, q+t} \subset G$.

Доказательство. Так как группа $\pi_q(Y)$ конечно порождена и каждый элемент $x \in \pi_q(Y)/G$ удовлетворяет условию $p^s \cdot x = 0$, то группа $\pi_q(Y)/G$ конечна. Последовательность подгрупп

$$\frac{\pi_q(Y)}{G} = \frac{F^{0, q} + G}{G} \supset \frac{F^{1, q+1} + G}{G} \supset \dots \supset \frac{F^{t, q+t} + G}{G} \supset \dots$$

¹⁾ Можно показать, что для $i = p^t - 1$ равенство $h(M_i) = b_i \bmod \{\text{разложимые элементы}\}$ невозможно. — Прим. ред.

является фильтрацией для $\pi_q(Y)/G$, поэтому из предложения 19.12 вытекает, что

$$\bigcap_{t \geq 0} \frac{F^{t, q+t} + G}{G} = \frac{\bigcap_{t \geq 0} F^{t, q+t} + G}{G} = 0.$$

Значит, для некоторого номера t имеет место равенство $\frac{F^{t, q+t} + G}{G} = 0$, т. е. $F^{t, q+t} \subset G$. $\square$

Теперь мы в состоянии доказать, что мономы P^α порождают $\pi_*(MU) \otimes \mathbb{Z}_p$. Если положить в лемме 20.28 $Y = MU$ и $s = 1$, то найдется такой номер t , что $F^{t, q+t} \otimes \mathbb{Z}_p = 0$. Используя обратную индукцию по s , начиная со значения $s = t$, покажем, что мономы P^α степени q и фильтрации, не меньшей чем s , порождают $F^{s, q+s} \otimes \mathbb{Z}_p$. Пусть

$$m^{\alpha_1}, m^{\alpha_2}, \dots, m^{\alpha_r}$$

— мономы от переменных m_i в $E_\infty^{s-1, q+s-1}$. Так как проекция $F^{s-1, q+s-1} \rightarrow E_\infty^{s-1, s+q-1}$ переводит элементы P^{α_i} в m^{α_i} , $1 \leq i \leq r$, то любой $x \in F^{s-1, q+s-1} \otimes \mathbb{Z}_p$ может быть записан в виде

$$x = \sum_{i=1}^r n_{\alpha_i} P^{\alpha_i} \bmod F^{s, q+s} \otimes \mathbb{Z}_p.$$

Но по предположению индукции каждый элемент из $F^{s, q+s} \otimes \mathbb{Z}_p$ является линейной комбинацией мономов P^α .

Первая часть теоремы 20.27 вытекает из следующей леммы.

20.29. Лемма. Пусть R — такое коммутативное градуированное кольцо конечного типа, что $R \otimes \mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}_p[P_1, P_2, \dots]$, $P_i = P_i(p) \in R_{2i}$ для каждого $i \geq 1$ и любого простого числа p . Тогда $R \cong \mathbb{Z}[M_1, M_2, \dots]$ для некоторых $M_i \in R_{2i}$, $i \geq 1$.

Доказательство. Для неразложимых факторколец мы имеем $Q_{2i}(R) \otimes \mathbb{Z}_p \cong Q_{2i}(R \otimes \mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p$ (с образующей P_i) для $i \geq 1$ и всех простых p . Следовательно, $Q_{2i}(R) \cong \mathbb{Z}$. Аналогично, $Q_{2i+1}(R) = 0$, $i \geq 0$. Пусть $M_i \in R_{2i}$ — такой элемент, класс которого порождает $Q_{2i}(R)$. Положим $R' = \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots]$ с $\deg x_i = 2i$ и определим $f: R' \rightarrow R$ как гомоморфизм колец, удовлетворяющий для всех $i \geq 1$ равенствам $f(x_i) = M_i$. Тогда гомоморфизм

$$f \otimes 1: R' \otimes \mathbb{Z}_p \rightarrow R \otimes \mathbb{Z}_p$$

обладает тем свойством, что $f(x_i) \otimes 1 = P_i \otimes \alpha_i \bmod \{\text{разложимые элементы}\}$ для некоторого $\alpha_i \neq 0 \in \mathbb{Z}_p$. Следовательно, $f \otimes 1$ — изоморфизм для всех простых p .

Предположим, что $f(r') = 0$ для некоторого $r' \in R'$. Тогда $(f \otimes 1)(r' \otimes 1) = 0$ и, значит, $r' \otimes 1 = 0 \in R' \otimes \mathbb{Z}_p$ для всех простых p . Отсюда вытекает, что $p|r'$ для любого p . Следовательно,

$r' = 0$, т. е. f — мономорфизм. С другой стороны, если $f(r')$ делится на некоторое простое число p , то $f(r') \otimes 1 = 0 \in R \otimes \mathbb{Z}_p$, и поэтому $r' \otimes 1 = 0 \in R' \otimes \mathbb{Z}_p$, т. е. r' также делится на p . Так как R_{2q} и R'_{2q} — свободные абелевы группы одинакового ранга, это означает, что f — изоморфизм. $\square$

Вторая часть теоремы 20.27 без труда следует из нашего выбора элементов M_i .

Замечание. Милнор показал, что $f(i) = 1$ для всех таких i , что $i+1$ — степень простого числа.

Для того чтобы изучить $\text{im } h$ более подробно, нам потребуется K -теория; дело в том, что алгебра $H_*(H(\mathbb{Z}); \mathbb{Z})$ не дает нужной информации о $P(H_*(MU; \mathbb{Z}))$. В то же время для гомоморфизма Гуревича в K -теории $h: \pi_*(MU) \rightarrow K_*(MU)$ справедливо равенство $\text{im } h = P(K_*(MU))$.

20.30. Определение. Для любой абелевой группы G имеет место гомоморфизм $i_G: G \rightarrow G \otimes \mathbb{Q}$, задаваемый формулой $i_G(g) = g \otimes 1$. Элемент $y \in G \otimes \mathbb{Q}$ называется *целым*, если $y = i_G(g)$ для некоторого $g \in G$. Говорят, что гомоморфизм $\theta: G \rightarrow G'$ *сохраняет целые элементы*, если любой $y \in G \otimes \mathbb{Q}$ является целым тогда и только тогда, когда $(\theta \otimes 1)(y)$ целый.

Замечание. i) Если элемент y целый, то очевидно, что $(\theta \otimes 1)(y)$ также целый.

ii) Гомоморфизм θ сохраняет целые элементы тогда и только тогда, когда из равенства $\theta(g) = ng'$ для некоторых $g \in G$, $g' \in G$, $n \in \mathbb{Z}$ следует, что $g = nh$, $h \in G$.

20.31. Упражнение. Показать, что если $\{\theta_n\}: \{G_n\} \rightarrow \{G'_n\}$ — морфизм прямых систем и каждый гомоморфизм θ_n сохраняет целые элементы, то таким же является и предельный гомоморфизм $\text{dir lim } \theta_n$.

Гомоморфизм Гуревича $h: \pi_*^S(X) \rightarrow K_*(X)$ индуцирован единицей $\iota: S^0 \rightarrow K$ спектра K . Предположим, что ι представляется отображениями $\{i_{2n}: S^{2n} \rightarrow BU\}$ (напомним, что $K_{2n} = BU$). Заметим, что $K_{2q}(MU) = \pi_{2q}(K \wedge MU) \cong \pi_{2q}(MU \wedge K) = MU_{2q}(K) \cong \text{dir lim } \tilde{MU}_{2q+2n}(BU)$. Следовательно, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} \text{dir lim}_n \tilde{MU}_{2q+2n}(S^{2n}) & \cong & \tilde{MU}_{2q}(S^0) & \cong & \pi_{2q}(MU) \\ \text{dir lim}_n (i_{2n})_* \downarrow & & \downarrow i_* & & \downarrow h \\ \text{dir lim}_n \tilde{MU}_{2q+2n}(BU) & \cong & MU_{2q}(K) & \cong & K_{2q}(MU) \end{array}$$

Мы хотим показать, что h сохраняет целые элементы. Для этого достаточно установить, что сохраняют целые элементы все гомоморфизмы i_{2n*} , $n \geq 0$.

20.32. Лемма. Гомоморфизм

$$h: \pi_0(MU) \rightarrow K_0(MU)$$

сохраняет целые элементы.

Доказательство. Согласно упражнению 20.31 достаточно показать, что этим свойством обладают гомоморфизмы $h: \pi_{2n}(MU(n)) \rightarrow \tilde{K}_{2n}(MU(n))$ для каждого $n \geq 0$. Поскольку пространство $MU(n)$ является $(2n-1)$ -связным, то

$$h: \pi_{2n}(MU(n)) \rightarrow \tilde{H}_{2n}(MU(n)) \cong \mathbb{Z}$$

— изоморфизм. Рассмотрим композицию гомоморфизмов

$$\pi_{2n}(MU(n)) \rightarrow \tilde{K}_{2n}(MU(n)) \xrightarrow{\langle \tau_n, - \rangle} \tilde{K}_0(S^0),$$

где $\tau_n \in \tilde{K}^{2n}(MU(n))$ — класс Тома (см. п. 16.40). Если $j_{2n}: S^{2n} \rightarrow MU(n)$ — вложение слоя (и, следовательно, компонента единицы $\iota: S^0 \rightarrow MU$ спектра MU), то мы имеем

$$\langle \tau_n, h(1) \rangle = \langle \tau_n, h[j_{2n}] \rangle = \langle \tau_n, j_{2n*}(g_{2n}) \rangle = \langle j_{2n}^* \tau_n, g_{2n} \rangle = 1$$

($g_{2n} \in \tilde{K}_{2n}(S^{2n})$ — образующая). Это показывает, что гомоморфизм h сохраняет целые элементы — другими словами, что $h(1)$ делится только на ± 1 . $\square$

20.33. Предложение (Стонг, Хаттори). Гомоморфизм

$$h: \pi_*(MU) \rightarrow K_*(MU)$$

сохраняет целые элементы.

Доказательство. Покажем, что этим свойством обладают гомоморфизмы $i_{2n*}: \tilde{M}U_{2n+2q}(S^{2n}) \rightarrow MU_{2n+2q}(BU)$ для всех n и q . Случай $q=0$: мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \tilde{M}U_{2n}(S^{2n}) & \xrightarrow{\cong} & \text{dir lim } \tilde{M}U_{2m}(S^{2m}) \cong \pi_0(MU) \\ \downarrow i_{2n*} & & \downarrow \text{dir lim } (i_{2m*}) \quad \downarrow h \\ \tilde{M}U_{2n}(BU) & \longrightarrow & \text{dir lim } \tilde{M}U_{2m}(BU) \cong K_0(MU), \end{array}$$

гомоморфизм h которой сохраняет целые элементы в силу леммы 20.32. Следовательно, такими же являются и гомоморфизмы i_{2n*} .

Случай $q > 0$: $\tilde{M}U_*(S^{2n})$ является свободным $\tilde{M}U_*(S^0)$ -модулем с единственной образующей $g_{2n} \in \tilde{M}U_{2n}(S^{2n})$. Следовательно, типичный элемент группы $\tilde{M}U_{2n+2q}(S^{2n}) \otimes \mathbb{Q}$ имеет вид $\omega g_{2n} \otimes 1/d$ для некоторого $\omega \in \tilde{M}U_{2q}(S^0)$ и целого числа d . Пусть $i_{2n*}(g_{2n}) = \sum_{\alpha} \omega_{\alpha} \beta^{\alpha}$, где $\beta^{\alpha} = \beta_1^{\alpha_1} \beta_2^{\alpha_2} \dots \beta_r^{\alpha_r}$ — моном от полиномиаль-

ных образующих $\beta_i \in MU_{2i}(BU)$ и $\omega_\alpha \in \widetilde{MU}_*(S^0)$. Тогда

$$(i_{2n*} \otimes 1)(\omega g_{2n} \otimes 1/d) = \sum_{\alpha} \omega \omega_{\alpha} \beta^{\alpha} \otimes 1/d.$$

Если этот элемент целый, то d должно делить каждый из коэффициентов $\omega \omega_{\alpha}$. Так как $\widetilde{MU}_*(S^0) = \pi_*(MU)$ — кольцо полиномов, это условие означает, что для каждого α имеет место равенство $d = e_{\alpha} f_{\alpha}$ с $e_{\alpha} | \omega$, $f_{\alpha} | \omega_{\alpha}$. Пусть $e = \text{нок} \{e_{\alpha}\}$ и $f = \text{нод} \{f_{\alpha}\}$. Тогда $d = ef$, $e | \omega$, $f | \omega_{\alpha}$ для всех α . Следовательно,

$$(i_{2n*} \otimes 1)(g_{2n} \otimes 1/f) = \sum_{\alpha} \omega_{\alpha} \beta^{\alpha} \otimes 1/f$$

— целый элемент. Но тогда, на основании рассмотренного выше случая $q=0$, мы получаем, что $g_{2n} \otimes 1/f$ также является целым элементом. Это возможно лишь тогда, когда $f = \pm 1$, откуда вытекает, что $d | \omega$. Таким образом, $\omega g_{2n} \otimes 1/d$ — целый элемент. $\square$

20.34. Теорема. Гомоморфизм

$$h: \pi_*(MU) \rightarrow P(K_*(MU))$$

является изоморфизмом.

Доказательство. На категории конечных спектров функтор $K_*(-) \otimes \mathbb{Q}$ является теорией гомологий, а кофунктор $K^*(-) \otimes \mathbb{Q}$ — теорией когомологий. Следовательно, по теореме Брауна существует спектр $K\mathbb{Q}$, представляющий $K^*(-) \otimes \mathbb{Q}$ на категории конечных спектров. Естественное преобразование $K^*(-) \rightarrow K^*(-) \otimes \mathbb{Q}$ (переводящее x в $x \otimes 1$) определяет отображение $\alpha: K \rightarrow K\mathbb{Q}$ представляющих спектров. Тогда $K\mathbb{Q}_*(X) \cong K_*(X) \otimes \mathbb{Q}$ для всех конечных спектров X . Переходя к прямым пределам, найдем, что этот изоморфизм имеет место и для любых спектров. Таким образом, мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \pi_*(MU) & \xrightarrow[\text{МОНО}]{j} & \pi_*(MU) \otimes \mathbb{Q} \\ \downarrow h & & \downarrow h_{\mathbb{Q}} \\ P(K_*(MU)) & \xrightarrow[\text{МОНО}]{\alpha} & P(K\mathbb{Q}_*(MU)) \\ \cap & & \cap \\ K_*(MU) & \xrightarrow[\text{МОНО}]{\alpha} & K\mathbb{Q}_*(MU) \cong K_*(MU) \otimes \mathbb{Q}. \end{array}$$

$\searrow h \otimes 1$

Поскольку группа $K_*(MU)$ не имеет элементов конечного порядка, то α — мономорфизм. Далее мы покажем, что $h_{\mathbb{Q}}$ — изоморфизм. Из этого факта немедленно будет следовать, что h — мономорфизм. Пусть теперь $y \in P(K_*(MU))$; если $h_{\mathbb{Q}}$ эпиморфизм, то $\alpha(y) = h_{\mathbb{Q}}(z)$ для некоторого $z \in \pi_*(MU) \otimes \mathbb{Q}$. Но согласно пред-

ложению 20.33 гомоморфизм h сохраняет целые элементы, поэтому z — целый. Таким образом, существует $w \in \pi_*(MU)$ с $j(w) = z$ или, другими словами, $\alpha \cdot h(w) = h_Q \cdot j(w) = \alpha(y)$. Следовательно, $h(w) = y$. Это показывает, что h — эпиморфизм.

Займемся теперь доказательством того, что для всех спектров E , X гомоморфизм

$$h_Q: \pi_*(X) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow P(E\mathbb{Q}_*(X))$$

является изоморфизмом в предположении, что группа $\pi_0(E)$ не имеет элементов конечного порядка. Прежде всего, очевидно, что h_Q — мономорфизм. Далее, в силу леммы 17.19 имеет место изоморфизм

$$\wedge \otimes 1: \pi_*(E) \otimes \pi_*(X) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \pi_*(E \wedge X) \otimes \mathbb{Q} \cong E\mathbb{Q}_*(X).$$

При этом отождествлении h_Q превращается в отображение

$$\pi_*(X) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \pi_*(E) \otimes \pi_*(X) \otimes \mathbb{Q},$$

задаваемое формулой $y \mapsto 1 \otimes y$. Кроме того, диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E\mathbb{Q}_*(X) & \xrightarrow{\psi_X} & E\mathbb{Q}_*(E\mathbb{Q}) \otimes_{E\mathbb{Q}_*(S^0)} E\mathbb{Q}_*(X) \\ \cong & & \cong \\ \pi_*(E) \otimes \pi_*(X) \otimes \mathbb{Q} & \xrightarrow{\Psi} & \pi_*(E) \otimes \pi_*(E) \otimes \pi_*(X) \otimes \mathbb{Q} \end{array}$$

коммутативна, если положить $\Psi(x \otimes y) = x \otimes 1 \otimes y$ для $x \in \pi_*(E)$, $y \in \pi_*(X) \otimes \mathbb{Q}$. Таким образом, подгруппа примитивных элементов совпадает с подгруппой элементов вида $1 \otimes y$ в $\pi_*(E) \otimes \pi_*(X) \otimes \mathbb{Q} \cong E\mathbb{Q}_*(X)$, т. е. в точности равна образу гомоморфизма h_Q . Следовательно, h_Q — эпиморфизм. $\square$

20.35. В конце главы 17 мы вычислили $P(K_*(MU))$ в малых размерностях. Теперь ясно, что эти вычисления можно рассматривать как описание образов полиномиальных образующих $M_1, M_2, \dots$ из $\pi_*(MU) \cong \Omega_*^U$ при гомоморфизме Гуревича $h: \pi_*(MU) \rightarrow K_*(MU)$. В частности, $[CP^3]$ не может быть полиномиальной образующей в размерности 6.

20.36. Замечание. В работе [42] Коннер и Флойд показали, что существует тесная связь между спектрами MU и K , а также между спектрами MSp и KO . В связи с этим естественно предположить, что имеет место следующий аналог теоремы 20.34: гомоморфизм $h: \pi_*(MSp) \rightarrow P(KO_*(MSp))$ является изоморфизмом.

В малых размерностях группы $\pi_*(MSp)$ известны, и мы можем сравнить их с вычислениями, проделанными в конце главы 17. Оказывается, что в размерностях, меньших 9, наша гипотеза верна. Однако $\pi_9(MSp) \cong \mathbb{Z}_2$, в то время как

$$P_9(KO_*(MSp)) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2.$$

Неизвестно, является ли h мономорфизмом¹⁾. Более того, неизвестно даже, справедливо ли более слабое предположение: $h: \pi_n(MSp) \rightarrow P_n(KO_*(MSp))$ изоморфизм для $n \equiv 0 \pmod{4}$.

Основываясь на Ω_*^U , приступим теперь к вычислению кольца бордизмов Ω_*^{SO} . Для любых нечетных простых чисел p спектральная последовательность Адамса $\text{mod } p$ для $\pi_*(MSO)$ устроена довольно просто, поэтому ею мы займемся в первую очередь. Мы имеем изоморфизм Тома $\Phi_*: H_*(MSO; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H_*(BSO; \mathbb{Z}_p)$. Согласно упражнению 16.52 существует изоморфизм $H_*(BSO; \mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p[q_1, q_2, \dots]$, где $Bi_*: H_*(BSO(2); \mathbb{Z}_p) \rightarrow H_*(BSO; \mathbb{Z}_p)$ удовлетворяет равенствам $Bi_*(y_{2i+1}) = 0$, $i \geq 0$, и $Bi_*(y_{2i}) = q_i$, $i \geq 1$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} BU(1) & \cong & BSO(2) \\ \downarrow Bi & & \downarrow Bi \\ BU & \xrightarrow{r} & BSO \end{array}$$

где r — отображение «овеществления», которое превращает комплексное расслоение в ориентированное вещественное расслоение. Из этой диаграммы видно, что $r_*(y_{2i}) = q_i$, $r_*(y_{2i+1}) = 0$ для всех $i \geq 0$. Пусть $q'_i \in H_{4i}(MSO; \mathbb{Z}_p)$ — такие элементы, что $\Phi_*(q'_i) = q_i$, $i \geq 1$. Если обозначить через $Mr: MU \rightarrow MSO$ отображение, индуцированное отображением $r: BU \rightarrow BSO$, то

$$Mr_*(b_i) = \begin{cases} q'_k, & i = 2k, \\ 0, & i \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Таким образом, из следствия 20.22 мы получаем следующую лемму.

20.37. Лемма. $\psi q'_k = \sum_{i+j=k} (X^{2i+1})_{4i} \otimes q'_j, \quad k \geq 0.$

Поэтому, если положить $H'' = \mathbb{Z}_p[z_1, z_2, \dots]$, $z \in H''_{4k}$ для любого k , не равного $(p^t - 1)/2$ ни при каком $t \geq 1$, то мы получим следующее утверждение.

20.38. Лемма. Существует изоморфизм A_* -алгебр

$$H_*(MSO; \mathbb{Z}_p) \cong C \otimes H''.$$

Следовательно, в спектральной последовательности Адамса для MSO мы имеем

$$E_2^{**} \cong \mathbb{Z}_p[q_0, q_1, \dots] \otimes H'' \cong \mathbb{Z}_p[q_0] \otimes \mathbb{Z}_p[n_1, n_2, \dots]$$

¹⁾ Не является. Именно, в работе [3] построено много нетривиальных элементов групп $\pi_{8k+8}(MSp)$, в то время как $KO_{8k+8}(MSp) = 0$. — Прим ред.

6

$$n_k = \begin{cases} z_k \in E_2^{0,4k}, & \text{если } k \neq (p^t - 1)/2 \text{ ни при каком } t, \\ q_t \in E_2^{1,4k+1}, & \text{если } k = (p^t - 1)/2 \text{ для некоторого } t > 0. \end{cases}$$

20.39. Теорема. Имеет место изоморфизм групп

$${}_p\pi_*(MSO) \cong \mathbb{Z}[n_1, n_2, \dots].$$

При этом гомоморфизм Гуревича

$$h: {}_p\pi_*(MSO) \rightarrow P(H_*(MSO; \mathbb{Z}_p))$$

является эпиморфизмом. В частности, $\pi_*(MSO)$ не имеет кручения нечетного порядка.

20.40. У п р а ж н е н и е. Показать, что если p — нечетное простое число, то существует изоморфизм групп

$${}_p\pi_*(MSp) \cong \mathbb{Z}[p_1, p_2, \dots], \deg p_i = 4i.$$

[У к а з а н и е. Доказать, что $r': BSp \rightarrow BSO$ индуцирует изоморфизм

$$H_*(BSp; \mathbb{Z}_p) \cong H_*(BSO; \mathbb{Z}_p).]$$

Вычисление спектральной последовательности Адамса mod 2 для MSO более интересно. Мы покажем, что

$$H^*(MSO; \mathbb{Z}_2) \cong A^*/A^*Sq^1 \otimes H^* \oplus A^* \otimes Z^*,$$

где $H^* = \mathbb{Z}_2[p_1, p_2, \dots]$ и Z^* — некоторое векторное пространство над полем $\mathbb{Z}_2$. Отсюда будет следовать, что

$$H_*(MSO; \mathbb{Z}_2) \cong (A^*/A^*Sq^1)^* \otimes H \oplus A_* \otimes Z.$$

Сосредоточим сперва свое внимание на алгебре $(A^*/A^*Sq^1)^*$.

Алгебра A^* действует на A_* слева и справа по формулам:

$$\begin{aligned} \langle b, a\eta \rangle &= \langle ba, \eta \rangle, \\ \langle b, \eta a \rangle &= \langle ab, \eta \rangle, \end{aligned} \quad a, b \in A^*, \eta \in A_*.$$

Кроме того, мы имеем $c(\eta a) = c^*(a)c(\eta)$, $c(a\eta) = c(\eta)c^*(a)$, $a \in A^*$, $\eta \in A_*$, где $c: A_* \rightarrow A_*$ — канонический антиавтоморфизм и $c^*: A^* \rightarrow A^*$ — двойственный ему автоморфизм.

$$20.41. \text{ Л е м м а. } Sq^1 \xi_i = \xi_{i-1}^2, i \geq 1, \text{ и } \xi_i Sq^1 = \begin{cases} \xi_0, & i = 1, \\ 0, & i > 1. \end{cases}$$

Кроме того,

$$Sq^1(\eta\eta') = (Sq^1\eta)\eta' + \eta(Sq^1\eta')$$

и

$$(\eta\eta')Sq' = \eta(\eta'Sq^1) + (\eta Sq^1)\eta'$$

для любых $\eta, \eta' \in A_*$.

Доказательство. Напомним формулу из предложения 17.11:

$$\langle ay, u \rangle = \sum_i \langle a, e_i \langle y, u_i \rangle \rangle,$$

где $a \in A^*$, $y \in H^*(X; \mathbb{Z}_2)$, $u \in H_*(X; \mathbb{Z}_2)$ и $\psi u = \sum_i e_i \otimes u_i$. Применяя эту формулу к спектру $X = H(\mathbb{Z}_2)$, получим

$$\langle a, \text{Sq}^1 \xi_i \rangle = \langle a \text{Sq}^1, \xi_i \rangle = \sum_j \langle a, \xi_{i-j}^{2^j} \langle \text{Sq}^1, \xi_j \rangle \rangle = \langle a, \xi_{i-1}^2 \rangle \text{ для всех } a \in A^*.$$

Следовательно, $\text{Sq}^1 \xi_i = \xi_{i-1}^2$. Аналогично,

$$\langle a, \xi_i \text{Sq}^1 \rangle = \langle \text{Sq}^1 a, \xi_i \rangle = \sum_j \langle \text{Sq}^1, \xi_{i-j}^{2^j} \langle a, \xi_j \rangle \rangle = \begin{cases} \langle a, \xi_0 \rangle, & i=1, \\ 0, & i \neq 1 \end{cases}$$

для всех $a \in A^*$.

Таким образом,

$$\xi_i \text{Sq}^1 = \begin{cases} \xi_0, & i=1, \\ 0, & i>1. \end{cases}$$

Пусть $\phi: A_* \otimes A_* \rightarrow A_*$ — умножение в A_* и $\phi^*: A^* \rightarrow A^* \otimes A^*$ — коумножение, двойственное к ϕ . Тогда $\phi^* \text{Sq}^1 = \text{Sq}^1 \otimes 1 + 1 \otimes \text{Sq}^1$. Пусть $a \in A^*$, $\eta, \eta' \in A_*$ и $\phi^* a = \sum_i a_i \otimes a'_i$. Имеем

$$\begin{aligned} \langle a, \text{Sq}^1(\eta\eta') \rangle &= \langle a \text{Sq}^1, \phi(\eta \otimes \eta') \rangle = \langle \phi^*(a \text{Sq}^1), \eta \otimes \eta' \rangle = \\ &= \left\langle \left(\sum_i a_i \otimes a'_i \right) (\text{Sq}^1 \otimes 1 + 1 \otimes \text{Sq}^1), \eta \otimes \eta' \right\rangle = \\ &= \sum_i \{ \langle a_i \text{Sq}^1, \eta \rangle \langle a'_i, \eta' \rangle + \langle a_i, \eta \rangle \langle a'_i \text{Sq}^1, \eta' \rangle \} = \\ &= \sum_i \{ \langle a_i, \text{Sq}^1 \eta \rangle \langle a'_i, \eta' \rangle + \langle a_i, \eta \rangle \langle a'_i, \text{Sq}^1 \eta' \rangle \} = \\ &= \left\langle \sum_i a_i \otimes a'_i, \text{Sq}^1 \eta \otimes \eta' + \eta \otimes \text{Sq}^1 \eta' \right\rangle = \\ &= \langle \phi^* a, \text{Sq}^1 \eta \otimes \eta' + \eta \otimes \text{Sq}^1 \eta' \rangle = \langle a, (\text{Sq}^1 \eta) \eta' + \eta (\text{Sq}^1 \eta') \rangle. \end{aligned}$$

Следовательно, $\text{Sq}^1(\eta\eta') = (\text{Sq}^1 \eta) \eta' + \eta (\text{Sq}^1 \eta')$. Аналогично доказывается, что

$$(\eta\eta') \text{Sq}^1 = \eta (\eta' \text{Sq}^1) + (\eta \text{Sq}^1) \eta'. \quad \square$$

Мы имеем точную последовательность

$$A^* \xrightarrow{\text{RSq}^1} A^* \rightarrow A^*/A^* \text{Sq}^1 \rightarrow 0,$$

где через RSq^1 обозначена операция Sq^1 , действующая справа. Переход к двойственным объектам дает точную последовательность

$$0 \rightarrow (A^*/A^* \text{Sq}^1)^* \rightarrow A_* \xrightarrow{\text{LSq}^1} A_*.$$

Применяя к этой последовательности антиавтоморфизм c , получим

$$0 \rightarrow c(A^*/A^* \text{Sq}^1)^* \rightarrow A_* \xrightarrow{\text{RSq}^1} A_*,$$

так как $c^* \text{Sq}^1 = \text{Sq}^1$.

20.42. Следствие. $c(A^*/A^* \text{Sq}^1)^* \cong \mathbb{Z}_2[\xi_1^*, \xi_2^*, \xi_3^*, \dots]$.

Рассмотрим теперь в группе $H^0(MSO)$ (для краткости мы опустим обозначение группы коэффициентов $\mathbb{Z}_2$) элемент t , соответствующий классам Тома $t_n \in H^n(MSO_n)$. Определим гомоморфизм

$$\kappa^*: A^* \rightarrow H^*(MSO),$$

полагая $\kappa^*(a) = a \cdot t$ для $a \in A^*$. Гомоморфизм κ^* есть не что иное, как композиция

$$A^* \cong A^* \otimes \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{1 \otimes \eta} A^* \otimes H^*(MSO) \xrightarrow{\psi^*} H^*(MSO),$$

где $\eta(1) = t$ и все тензорные произведения рассматриваются над $\mathbb{Z}_2$. По двойственности мы получаем гомоморфизм $\kappa: H_*(MSO) \rightarrow A_*$, который представляется композицией

$$H_*(MSO) \xrightarrow{\psi} A_* \otimes H_*(MSO) \xrightarrow{1 \otimes \varepsilon} A_* \otimes \mathbb{Z}_2 \cong A_*,$$

где ε — пополнение в $H_*(MSO)$.

В точной последовательности

$$0 \rightarrow H^n(MSO_n) \rightarrow H^n(BSO(n)) \rightarrow H^n(BSO(n-1)) \rightarrow \dots$$

(где мы рассматриваем MSO_n как конус расслоения на сферы $BSO(n-1) \rightarrow BSO(n)$; см. следствие 16.11) класс Тома t_n переходит в $\omega_n \in H^n(BSO(n))$. (Замечание: $H^*(BSO(n)) \cong \mathbb{Z}_2[\omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n]$; см., например, [96].) Так как $\omega_1 = 0$ в $H^*(BSO(n))$, мы имеем $\text{Sq}^1 \omega_n = \omega_n \omega_1 = 0$; поэтому $\text{Sq}^1 t_n = 0$ для всех n и, значит, $\text{Sq}^1 t = 0$. Следовательно, κ^* индуцирует гомоморфизмы

$$\bar{\kappa}^*: A^*/A^* \text{Sq}^1 \rightarrow H^*(MSO)$$

и

$$\bar{\kappa}: H_*(MSO) \rightarrow (A^*/A^* \text{Sq}^1)^*.$$

20.43. Предложение. Гомоморфизм $\bar{\kappa}^*$ является мономорфизмом или, эквивалентно, $\bar{\kappa}$ является эпиморфизмом.

Доказательство. Прежде всего, введем некоторые обозначения. Через $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_r^{\alpha_r}$ будет обозначаться типичный моном в A_* ; тогда $\{\xi^\alpha\}$ является $\mathbb{Z}_2$ -базисом для A_* . Через $\{\text{Sq}^\alpha\}$ обозначим дуальный базис в A^* . (Замечание: в этих обозначениях элемент $\text{Sq}^{(k)}$, двойственный к $\xi^{(k)} = \xi_1^k$, равен Sq^k , но в общем случае $\text{Sq}^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)}$ не равен произведению $\text{Sq}^{\alpha_1} \text{Sq}^{\alpha_2} \dots \text{Sq}^{\alpha_r}$.)

Мы знаем, что $(A^*/A^* \text{Sq}^1)^*$ порождена как алгебра элементами $c(\xi_1^*)$, $c(\xi_2^*)$, $c(\xi_3^*)$... Если мы покажем, что подгруппа $P_* \subset A_*$, порожденная $c(\xi_1^*)$, $c(\xi_2^*)$, $c(\xi_3^*)$, ..., содержится в образе отобра-

жения κ , то поскольку κ — гомоморфизм колец, отсюда будет следовать его эпиморфность. Двойственным образом, достаточно доказать, что κ^* является мономорфизмом на подгруппе $P \subset A^*$, порожденной элементами $c^*(Sq^{(2)}) = c^*(Sq^2)$, $c^*(Sq^{(0,1)}) = Sq^{(0,1)}$, ..., $c^*(Sq^{(0, \dots, 0, 1)}) = Sq^{(0, \dots, 0, 1)}$, ... Обозначим через Δ_i последовательность $(0, \dots, 0, 1)$, в которой единица находится на i -м месте. Тогда Sq^{Δ_i} удовлетворяет соотношению

$$Sq^{\Delta_{i+1}} = Sq^1 Sq^{2\Delta_i} + Sq^{2\Delta_i} Sq^1, \quad i \geq 1$$

(см. [55]), так что мы получаем

$$\kappa^*(c^*(Sq^2)) = c^*(Sq^2) \cdot t = \Phi^*(w_2),$$

$$\kappa^*(Sq^{\Delta_{i+1}}) = (Sq^1 Sq^{2\Delta_i} + Sq^{2\Delta_i} Sq^1) \cdot t =$$

$$Sq^1(\Phi^*(w_{2^{i+1}-2} + \text{члены меньшей степени})) =$$

$$\Phi^*(Sq^1 w_{2^{i+1}-2} + \text{члены меньшей степени}) =$$

$$\Phi^*(w_{2^{i+1}-1} + \text{члены меньшей степени}), \quad i \geq 1.$$

Здесь мы использовали тот факт, что Sq^1 коммутирует с Φ^* , поскольку $Sq^1 t_n = 0$. Таким образом, мы видим, что κ^* — мономорфизм и, следовательно, κ — эпиморфизм. $\square$

Так как $Sq^1 \cdot Sq^1 = 0$, то Sq^1 можно рассматривать как дифференциал на любом A^* -модуле M и, значит, определены когомологии $H^*(M; Sq^1)$. В частности, мы имеем

$$i) H^*(H^*(MSO); Sq^1) \cong \mathbb{Z}_2[w_2^*, w_4^*, \dots].$$

Действительно, поскольку Sq^1 коммутирует с Φ^* , достаточно показать, что $H^*(H^*(BSO); Sq^1) \cong \mathbb{Z}_2[w_2^*, w_4^*, \dots]$. Но $Sq^1 w_{2n} = w_{2n+1}$, поэтому если мы запишем $H^*(BSO)$ в виде $H^*(BSO) = \mathbb{Z}_2[w_2, w_3] \otimes \mathbb{Z}_2[w_4, w_5] \otimes \dots$ и используем теорему Кюннета, то получим требуемый результат.

ii) $H^*(A^*/A^* Sq^1; Sq^1) \cong \mathbb{Z}_2$. В самом деле, $A^*/A^* Sq^1$ имеет $\mathbb{Z}_2$ -базис, состоящий из классов допустимых мономов Sq^I с $I = 0$ или $i_r \geq 2$. Кроме того,

$$Sq^1 Sq^I = \begin{cases} Sq^{I'}, & i_1 \text{ четно, } I \neq 0, \\ 0, & i_1 \text{ нечетно или } I = 0, \end{cases}$$

где $I' = (i_1 + 1, i_2, \dots, i_r)$, если $I = (i_1, i_2, \dots, i_r)$. Отсюда следует требуемый изоморфизм.

Таким образом, если мы положим $H^* = \mathbb{Z}_2[p_1, p_2, \dots]$, $p_i \in H_4^*$ и определим отображение

$$\theta: A^*/A^* Sq^1 \otimes H^* \rightarrow H^*(MSO)$$

формулой $\theta(\{a\} \otimes p_\alpha) = a\Phi^*(w_2^{2\alpha_1} w_4^{2\alpha_2} \dots w_{2r}^{2\alpha_r})$, $a \in A^*$, то θ будет гомоморфизмом A^* -модулей, индуцирующим изоморфизм

$$\theta^*: H^*(A^*/A^* Sq^1 \otimes H^*; Sq^1) \cong H^*(H^*(MSO); Sq^1).$$

Пусть теперь $M = H^*(MSO)$, $\bar{M} = M/A^*M$, где через A^* обозначены элементы положительных степеней алгебры A^* , и пусть $\rho: M \rightarrow \bar{M}$ — естественная проекция. Выберем в M , рассматриваемом как векторное пространство над полем $\mathbb{Z}_2$, такое подпространство $Z^* \subset M$, что $\rho|_{Z^*}$ — мономорфизм и

$$\bar{M} \cong \rho(\theta(A^*/A^*Sq^1 \otimes H^*)) \oplus \rho(Z^*).$$

Другими словами, мы обозначаем через $\rho(Z^*)$ дополнение в $\bar{M}$ подпространства $\rho\theta(A^*/A^*Sq^1 \otimes H^*)$ и определяем Z^* как подпространство, порожденное прообразом $\rho^{-1}(\rho Z^*)$. Пусть $N = A^*/A^*Sq^1 \otimes H^* \oplus A^* \otimes Z^*$. Продолжим гомоморфизм θ на N , полагая $\theta(a \otimes z) = az$ для всех $a \in A^*$, $z \in Z^*$.

20.44. Теорема. Гомоморфизм

$$\theta: N \rightarrow H^*(MSO)$$

является изоморфизмом.

Доказательство. Обозначим через $N^{(n)}$ и $M^{(n)}$ A^* -подмодули модулей N и M , порожденные, соответственно, N_i , M_i , $i \leq n$. Покажем индукцией по n , что $\theta: N^{(n)} \rightarrow M^{(n)}$ является изоморфизмом.

Из определения подпространства Z^* следует, что $\theta(N^{(n)}) = M^{(n)}$. Пусть $n=0$; $N^{(0)} = A^*/A^*Sq^1 \otimes \{1\}$ и $M^{(0)} = A^* \cdot 1$. Кроме того, ограничение $\theta|_{N^{(0)}}$ совпадает с κ^* , так что в силу предложения 20.43 $\theta|_{N^{(0)}}$ является мономорфизмом.

Будем теперь считать доказанным, что $\theta: N^{(n-1)} \rightarrow M^{(n-1)}$ — изоморфизм, и пусть $\lambda: N/N^{(n-1)} \rightarrow M/M^{(n-1)}$ индуцировано отображением θ . Мы хотим доказать, что $\lambda|_{(N^{(n)}/N^{(n-1)})}$ — мономорфизм. Обозначим через $P \subset N$ подпространство, порожденное элементами вида $h, z, Sq^1 z$ для $h \in H_n^*$, $z \in Z_n^*$. Заметим, что P можно рассматривать как подпространство в $N/N^{(n-1)}$.

20.45. Лемма. Ограничение $\lambda|_P$ является мономорфизмом.

Доказательство. Прежде всего, поскольку $H^*(A^*; Sq^1) = 0$, то $\theta^*: H^*(N; Sq^1) \rightarrow H^*(M; Sq^1)$ — изоморфизм. Так как $\theta: N^{(n-1)} \rightarrow M^{(n-1)}$ — изоморфизм по предположению индукции, то $\lambda^*: H^*(N/N^{(n-1)}; Sq^1) \rightarrow H^*(M/M^{(n-1)}; Sq^1)$ также является изоморфизмом.

Пусть теперь $v \in P$ и $\lambda(v) = 0$. Заметим, что $\dim v = n$ или $\dim v = n+1$; рассмотрим отдельно обе возможности:

$\dim v = n$: тогда $v = h + z$, $h \in H_n^*$, $z \in Z_n^*$.

Равенство $\lambda(v) = 0$ означает, что $\theta(h + z) \in M_n^{(n-1)}$. Следовательно, в силу выбора подпространства Z^* имеем $z = 0$. Теперь, если $h \neq 0$, то h представляет неограничивающий Sq^1 -цикл в N и, значит, в $N/N^{(n-1)}$. Но это противоречит тому, что $\lambda(h) = 0$ (так как λ^* является изоморфизмом). Значит, $h = 0$.

$\dim v = n+1$: тогда $v = Sq^1 z$ для некоторого $z \in Z_n^*$. Если $\lambda(v) = 0$, то $\lambda(z)$ является Sq^1 -циклом в $M/M^{(n-1)}$. Так как λ^* — эпимор-

физм, отсюда следует, что $\lambda(z) = \lambda(h) + \text{Sq}^1 z'$ для некоторых $h \in H_n^*$ и $z' \in (M/M^{(n-1)})_{n-1}$. Но это означает, что $z' = 0$, т. е. $\lambda(z) = \lambda(h)$. Таким образом, $\lambda(h+z) = 0$, и мы оказываемся в исследованной выше ситуации. Следовательно, $h = z = 0$. $\square$

Вернемся теперь к доказательству теоремы 20.44. Умножение $\mu: MSO \wedge MSO \rightarrow MSO$ задает на $M = H^*(MSO)$ коумножение $\mu^*: M \rightarrow M \otimes M$. Так как A^* -действие $\psi_M^*: A^* \otimes M \rightarrow M$ естественно, то имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A^* \otimes M & \xrightarrow{\psi_M^*} & M \\ \psi^* \otimes \mu^* \downarrow & & \downarrow \mu^* \\ A^* \otimes A^* \otimes M \otimes M & \xrightarrow{(\psi_M^* \otimes \psi_M^*) \circ T} & M \otimes M. \end{array}$$

Пусть $p: M \rightarrow M/M^{(n-1)}$ — естественная проекция. Если $u \in H_n^* \oplus Z_n^*$, то $\mu^* \theta(u) = 1 \otimes \theta u \bmod M \otimes M^{(n-1)}$. Следовательно, для любого $v \in P$ выполнено равенство

$$(1 \otimes p) \mu^* \theta(v) = 1 \otimes \lambda(v).$$

Выберем теперь базисы $h_1, h_2, \dots, h_r$ для H_n^* и $z_1, z_2, \dots, z_s$ для Z_n^* . Тогда P имеет базис $\{v_i\} = \{h_1, \dots, h_r, z_1, \dots, z_s, \text{Sq}^1 z_1, \dots, \text{Sq}^1 z_s\}$, и любой элемент $v \in N^{(n)}/N^{(n-1)}$ представляется в виде $v = \sum_i a_i v_i$, где $a_i \notin A^* \text{Sq}^1$. Чтобы получить это представление, записываем v как

$$v = \sum c_{i,j} \text{Sq}^j h_j + \sum d_{j,k} \text{Sq}^j z_k,$$

где $\text{Sq}^j \notin A^* \text{Sq}^1$, и затем выражаем каждый элемент $\text{Sq}^j z_k$, $j = (j_1, \dots, j_{r-1}, 1)$, в виде произведения $\text{Sq}^j z_k = \text{Sq}^{j'} \text{Sq}^1 z_k$ с $j' = (j_1, j_2, \dots, j_{r-1})$. Пусть $m = \max \{\dim a_i\}$ и пусть $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_t}$ — элементы размерности m . Если $\lambda(v) = 0$, то $\theta(v) \in M^{(n-1)}$, и, следовательно, $0 = (1 \otimes p) \mu^* \theta(v) = \sum a_{i_j} t \otimes \lambda(v_{i_j}) + \sum b_k t \otimes m_k$ для некоторых $m_k \in M$ и $b_k \in A$ с $\dim b_k < m$. Но мы показали, что $\lambda|_P$ — мономорфизм, так что все $\lambda(v_{i_j})$ линейно независимы. Поэтому $a_{i_j} \cdot t = 0$ для всех j . Однако из равенства $a_{i_j} \cdot t = 0$ согласно предложению 20.43 вытекает, что $a_{i_j} \in A^* \text{Sq}^1$. Полученное противоречие означает, что равенство $\lambda(v) = 0$ возможно лишь для $v = 0$. Это завершает шаг индукции. $\square$

20.46. Следствие.

$$H_*(MSO) \cong (A^*/A^* \text{Sq}^1)^* \otimes H \oplus A_* \otimes Z,$$

где

$$H = \mathbb{Z}_2[q_1, q_2, \dots], \quad q_i \in H_{4i}$$

и Z — некоторое векторное пространство над полем $\mathbb{Z}_2$. $\square$

Согласно следствию 20.17 отсюда получается, что

$$\text{Ext}_{A_*}^{**}(\mathbb{Z}_2, (A^*/A^* \text{Sq}^1)^*) \cong \text{Ext}_{A_* // (A^*/A^* \text{Sq}^1)^*}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2).$$

Но $A_* // (A^*/A^* \text{Sq}^1)^* \cong A_* // c(A^*/A^* \text{Sq}^1)^* \cong E(\xi_1)$ — внешняя алгебра, порожденная элементом ξ_1 . Так как мы умеем строить резольвенты $\mathbb{Z}_2$ над внешними алгебрами, то применительно к данному случаю получается изоморфизм

$$\text{Ext}_{A_*}^{**}(\mathbb{Z}_2, (A^*/A^* \text{Sq}^1)^*) \cong \mathbb{Z}_2[q_0].$$

$$20.47. \text{ Следствие. } \text{Ext}_{A_*}^{**}(\mathbb{Z}_2, H_*(MSO)) \cong \mathbb{Z}_2[q_0] \otimes H \oplus \mathbb{Z}.$$

Столбцы с q_0 в спектральной последовательности Адамса появляются лишь в размерностях, кратных четырем. Поэтому никакой дифференциал d_r не может переводить элементы одного столбца в другой. Предположим, что $d_r(z) = q_0^r h$ для некоторых $r \geq 2$, $z \in \mathbb{Z}$, $h \in H$. Тогда $0 = d_r(q_0 z) = q_0 d_r(z) = q_0^{r+1} h$, что является противоречием. Следовательно, и в данном случае все дифференциалы равны нулю, но на сей раз по несколько менее тривиальным соображениям.

20.48. Теорема. *Имеет место изоморфизм групп*

$${}_{2\pi}_*(MSO) \cong \mathbb{Z}[n_1, n_2, \dots] \oplus \mathbb{Z}, \quad \deg n_i = 4i.$$

При этом гомоморфизм Гуревича

$$h: {}_{2\pi}_*(MSO) \rightarrow P(H_*(MSO; \mathbb{Z}_2))$$

является эпиморфизмом.

На самом деле, $\Omega_*^{SO}/\text{Tors}$ представляет собой алгебру полиномов от образующих $N_i \in \Omega_{4i}^{SO}/\text{Tors}$; этот факт можно доказать с помощью рассуждений, аналогичных использованным в теореме 20.27.

Для вычисления Ω_*^{SU} применяется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_*(MSO; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\psi} & A_* \otimes H_*(MSO; \mathbb{Z}_2) \\ \downarrow h & & \downarrow \alpha \otimes h \\ H_*(MSU; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\psi} & A_* \otimes H_*(MSU; \mathbb{Z}_2), \end{array}$$

где $\alpha: A_* \rightarrow A_*$ задается формулой $\alpha(x) = x^2$, $x \in A_*$, а h — изоморфизм неградуированных алгебр, получающийся факторизацией композиции

$$H_*(MSO; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_*(MO; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{1} H_*(MU; \mathbb{Z}_2)$$

по $H_*(MSU; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_*(MU; \mathbb{Z}_2)$. Следовательно,

$$H_*(MSU; \mathbb{Z}_2) \cong \alpha(A^*/A^* \text{Sq}^1)^* \otimes H' \oplus \alpha(A_*) \otimes \mathbb{Z}'.$$

Группы $\text{Ext}_{A_*}^{**}(\mathbb{Z}_2, \alpha(A_*))$ мы уже знаем. В работе [47] Люлевичус построил резольвенту для $\alpha(A^*/A^* \text{Sq}^1)^*$ над алгеброй A_* и, таким образом, вычислил

$$\text{Ext}_{A_*}^{**}(\mathbb{Z}_2, H_*(MSU; \mathbb{Z}_2)).$$

Основываясь на этих вычислениях, Андерсон, Браун и Петерсон [13] показали, что единственным ненулевым дифференциалом в спектральной последовательности Адамса для MSU является дифференциал d_2 , и тем самым полностью описали ${}_{2*}(MSU)$. Вычисление ${}_{p*}(MSU)$ для нечетных простых p не составляет труда. Как и следовало ожидать, группы ${}_{p*}(MSU)$ не имеют элементов нечетных порядков.

Более сложным оказывается вычисление группы ${}_{p*}(MSpin)$. В работе [14] Андерсон, Браун и Петерсон установили, что

$$H^*(MSpin; \mathbb{Z}_2) \cong A^*/A^*(\text{Sq}^1, \text{Sq}^2) \otimes X \oplus A^*/A^* \text{Sq}^3 \otimes Y \oplus A^* \otimes Z.$$

Это делается примерно так же, как при доказательстве изоморфизма

$$H^*(MSO; \mathbb{Z}_2) \cong A^*/A^* \text{Sq}^1 \otimes H^* \oplus A^* \otimes Z^*,$$

однако гораздо дольше и сложнее. Затем они вычислили Ω_*^{Spin} , используя скорее характеристические числа в KO -теории, нежели спектральную последовательность Адамса. И на этот раз нетрудно показать, что группы Ω_*^{Spin} не имеют элементов нечетного порядка.

О симплектических бордизмах Ω_*^{Sp} известно немного. Оказывается, что группы Ω_*^{Sp} имеют лишь 2-кручение. Кроме того, имеет место изоморфизм групп $\Omega_*^{Sp}/\text{Tors} \cong \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots]$, $\deg x_i = 4i$ (кольцевым этот изоморфизм не является). Н. Рэй, Д. Сигал и другие авторы вычислили Ω_n^{Sp} для малых размерностей n .

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Приведенное здесь вычисление A_* -комодуля $H_*(MO; \mathbb{Z}_2)$ основано на работе Люлевичуса [46]. Доказательство теоремы 20.37, по существу, содержится в книге Адамса [10], иное доказательство можно найти в [7]. Доказательства предложений 20.32 и 20.33 взяты из лекции Адамса, прочитанной им в 1967 г. в Манчестере.

В вычислениях настоящей главы имеется одна деталь, которая, на мой взгляд, не позволяет считать их полностью безупречными. Дело вот в чем. С одной стороны, мы вычислили ${}_{p*}(MU)$, используя спектральные последовательности Адамса для $E = H(\mathbb{Z}_p)$ при всех простых p . В то же время было заявлено, что «правильным» гомоморфизмом Гуревича, пригодным для

изучения $\pi_*(MU)$, является гомоморфизм $h: \pi_*(MU) \rightarrow K_*(MU)$; оправданием этого заявления служила теорема 20.34. Понятно, что более естественным был бы такой путь: вычислить $\pi_*(MU)$ и одновременно доказать теорему 20.34 с помощью спектральной последовательности Адамса для K . Правда, вообще говоря, мы не знаем, сходится ли эта спектральная последовательность, однако в данном случае она, по-видимому, должна быть тривиальной или «почти тривиальной» в подходящем смысле, который гарантировал бы ее сходимость и делал теорему 20.34 очевидной. К сожалению, в настоящий момент я не вижу, как реализовать такой подход. Адамс и Люлевичус в работе [11] доказали эту теорему, привлекая спектральную последовательность Адамса для спектра BP .

ССЫЛКИ НА ЛИТЕРАТУРУ

1. Адамс [7, 10, 11].
2. Андерсон, Браун, Петерсон [13, 14].
3. Дольд [33].
4. Коннер, Флойд [42, 43].
5. Люлевичус [46, 47].
6. Милнор [55, 58].
7. Милнор, Мур [61].
8. Стонг [76].
9. Том [78, 79].
10. Уолл [85, 86, 88].
11. Хьюзмоллер [96].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Адамс (Adams J. F.). On the structure and applications of the Steenrod algebra. — *Comm. Math. Helv.*, 1958, 32, p. 180—214.
- [2] Адамс (Adams J. F.). Vector fields on spheres. — *Ann. Math.*, 1962, 75, p. 603—632. [Русский перевод: Адамс Дж. Ф. Векторные поля на сферах. — *Математика*, 1963, 7 : 6, с. 48—79.]
- [3] Адамс (Adams J. F.). On the groups $J(X)$, I—IV. — *Topology*, 1963, 2, p. 181—195; 1965, 3, p. 137—171; 1965, 3, p. 193—222; 1966, 5, p. 21—71. [Русский перевод: Адамс Дж. Ф. О группах $J(X)$, I—IV. — *Математика*, 1966, 10 : 5, с. 70—84; 1967, 11 : 4, с. 42—69; 1968, 12 : 3, с. 3—97.]
- [4] Адамс (Adams J. F.). Stable homotopy theory. — Berlin: Springer, 1964.
- [5] Адамс (Adams J. F.). S. P. Novikov's work on operations on complex cobordism. — Chicago: University of Chicago Mathematics Lecture Notes, 1967.
- [6] Адамс (Adams J. F.). Lecture on generalized cohomology. — Berlin: Springer, 1969.
- [7] Адамс (Adams J. F.). Quillen's work on formal groups and complex cobordism. — Chicago: University of Chicago Mathematics Lecture Notes, 1970.
- [8] Адамс (Adams J. F.). Stable homotopy and generalized homology. — Chicago: University of Chicago Mathematics Lecture Notes, 1971.
- [9] Адамс (Adams J. F.). A variant of E. H. Brown's representability theorem. — *Topology*, 1971, 10, p. 185—198.
- [10] Адамс (Adams J. F.). Algebraic topology: a student's guide. — Cambridge: Cambridge University Press, 1972.
- [11] Адамс, Люевичус (Adams J. F., Liulevicius A.). The Hurewicz homomorphism for MU and BP . — *J. London Math. Soc.*, 1972, 5, p. 539—545.
- [12] Адаме, Харрис, Свитцер (Adams J. F., Harris A. S., Switzer R. M.). Hopf algebras of cooperations for real and complex K -theory. — *Proc. London Math. Soc.*, 1971, 23, p. 385—408.
- [13] Андерсон, Браун, Петерсон (Anderson D. W., Brown E. H., Peterson F. P.). SU -cobordism, KO -characteristic numbers and the Kervaire invariant. — *Ann. Math.*, 1966, 83, p. 54—67.
- [14] Андерсон, Браун, Петерсон (Anderson D. W., Brown E. H., Peterson F. P.). The structure of the Spin cobordism ring. — *Ann. Math.*, 1967, 86, p. 271—298.
- [15] Атья (Atiyah M. F.). Thom complexes. — *Proc. London Math. Soc.* 1961, 11, p. 291—310. [Русский перевод: Атья М. Ф. Пространства Тома. — *Математика*, 1966, 10 : 5, с. 48—69.]
- [16] Атья (Atiyah M. F.). K -theory. — N. Y.: Benjamin, 1967. [Русский перевод: Атья М. Ф. Лекции по K -теории. — М.: Мир, 1967.]
- [17] Атья, Ботт, Шапиро (Atiyah M. F., Bott R., Shapiro A.). Clifford modules. — *Topology*, 1964, 3, suppl. 1, p. 3—38.
- [18] Атья, Зингер (Atiyah M. F., Singer I. M.). The index of elliptic operators on compact manifolds. — *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1963, 69, p. 422—433. [Русский перевод: Атья М. Ф., Зингер И. М. Индекс эллиптических операторов на компактных многообразиях. — *Математика*, 1966, 10 : 3, с. 29—38.]
- [19] Атья, Хирцеbruch (Atiyah M. F., Hirzebruch F.). Vector bundles and homogeneous spaces. — *Proc. of Symposia in Pure Mathematics*, 3, Amer.

- Math. Soc., 1961, p. 7—38. [Русский перевод: А т ъ я М. Ф., Х и р ц е б р у х Ф. Векторные расслоения и однородные пространства. — Математика, 1962, 6 : 2, с. 3—39.]
- [20] Б а р р а т (Barratt M. G.). Track groups I, II. — Proc. London Math. Soc., 1955, 5, p. 71—106, p. 285—329.
- [21] Б о р д м а н (Boardman J. M.). Stable homotopy theory, mimeographed notes. — Warwick, 1966.
- [22] Б о р д м а н, Ф о г т (Boardman J. M., Vogt R. M.). Homotopy-everything H -spaces. — Bull. Amer. Math. Soc., 1968, 74, p. 1117—1122.
- [23] Б о р е л ь, Х и р ц е б р у х (Borel A., Hirzebruch F.). Characteristic classes and homogeneous spaces I, II, III. — Amer. J. Math., 1958, 80, p. 458—538; 1959, 81, p. 315—382; 1960, 82, p. 491—504.
- [24] Б о т т (Bott R.). The stable homotopy of the classical groups. — Ann. Math., 1959, 70, p. 313—337.
- [25] Б о т т (Bott R.). Lecture on $K(X)$. — N. Y.: Benjamin, 1969. [Русский перевод: Б о т т Р. K -теория. — Математика, 1967, 11 : 2, с. 32 — 57; 11 : 3, с. 3—36.]
- [26] Б р а у д е р (Browder W.). The Kervaire invariant of framed manifolds and its generalization. — Ann. Math., 1969, 90, p. 157—186.
- [27] Б р а у н (Brown E. H.). Cohomology theories. — Ann. Math., 1962, 75, p. 467—484; исправления: Ann. Math., 1963, 78, p. 201.
- [28] В и к (Vick J. W.). Homology theory. — N. Y.: Academic Press, 1973.
- [29] Г р и н б е р г (Greenberg M.). Lectures on algebraic topology. — N. Y.: Benjamin, 1967.
- [30] Д а й е р (Dyer E.). The functors of algebraic topology. — In: MAA Studies in Mathematics, 5, Studies in modern topology (P. J. Hilton, ed.). Englewood Cliffs (N. J.): Prentice Hall, 1968.
- [31] Д а й е р (Dyer E.). Cohomology theories. — N. Y.: Benjamin, 1969.
- [32] Д а й е р, Л а ш о ф (Dyer E., Lashof R. K.). A topological proof of the Bott periodicity theorems. — Annali di Math., 1961, 54, p. 231—254.
- [33] Д о л ь д (Dold A.). Erzeugende der Thomschen Algebra $\mathfrak{A}$. — Math. Z., 1956, 65, p. 25—35.
- [34] Д о л ь д (Dold A.). Partitions of unity in the theory of fibrations. — Ann. Math., 1963, 78, p. 223—255.
- [35] Д о л ь д (Dold A.). Halbexakte Homotopiefunktorern. — Berlin: Springer, 1966. [Русский перевод: Д о л ь д А. Полуточные гомотопические функторы. — Математика, 1970, 14 : 1, с. 3—93.]
- [36] Д о л ь д (Dold A.). Lectures on algebraic topology. — Berlin: Springer, 1972. [Русский перевод: Д о л ь д А. Лекции по алгебраической топологии. — М.: Мир, 1976.]
- [37] К а р т а н (Cartan H.). Séminaire H. Cartan 1954—1955. Paris.
- [38] К а р т а н (Cartan H.). Séminaire H. Cartan 1959—1960. — Paris.
- [39] К в и л л е н (Quillen D.). The Adams conjecture. — Topology, 1970, 10, p. 67—80.
- [40] К е р в е р, М и л н о р (Kervaire M. A., Milnor J. W.). Groups of homotopy spheres I. — Ann. Math., 1963, 77, p. 504—537.
- [41] К о н н е р, Ф л о й д (Conner P. E., Floyd E. E.). — Differentiable periodic maps. — Berlin: Springer, 1964. [Русский перевод: К о н н е р П., Ф л о й д Э. Гладкие периодические отображения. — М.: Мир, 1969.]
- [42] К о н н е р, Ф л о й д (Conner P. E., Floyd E. E.). The relation of cobordism to K -theories. — Berlin: Springer, 1966. [Русский перевод: К о н н е р П., Ф л о й д Э. О соотношении теории кобордизмов и K -теории. — В кн.: К о н н е р П., Ф л о й д Э. Гладкие периодические отображения. М.: Мир, 1969.]
- [43] К о н н е р, Ф л о й д (Conner P. E., Floyd E. E.). Torsion in SU -bordism. — Mem. Amer. Math. Soc., 1966, 60.
- [44] Л а н д в е б е р (Landweber P. S.). Cobordism operations and Hopf algebras. — Trans. Amer. Math. Soc., 1967, 129, p. 94—110.

- [45] Л е н г (Lang S.). Introduction to differentiable manifolds. — N. Y.: Interscience, 1962. [Русский перевод: Л е н г С. Введение в теорию дифференцируемых многообразий. — М.: Мир, 1967.]
- [46] Л ю л е в и ч у с (Liulevicius A.). A proof of Thom's theorem. — *Comm. Math. Helv.*, 1962, **37**, p. 121—131.
- [47] Л ю л е в и ч у с (Liulevicius A.). Notes on homotopy of Thom spectra. — *Amer. J. Math.*, 1964, **86**, p. 1—16.
- [48] Л ю л е в и ч у с (Liulevicius A.). On characteristic classes, mimeographed lecture notes from the Nordic Summer School in Mathematics. — Aarhus, 1968.
- [49] М а к л е й н (MacLane S.). Homology. — Berlin: Springer, 1963. [Русский перевод: М а к л е й н С. Гомология. — М.: Мир, 1966.]
- [50] М а к л е й н (MacLane S.). Natural associativity and commutativity. — Houston: Rice University Studies, 1963, **49**, № 4.
- [51] М а н к р с (Munkres J. R.). Elementary differential topology. — Princeton: Princeton University Press, 1966. [Сокращенный русский перевод: М а н к р с Дж. Элементарная дифференциальная топология. — В кн.: М и л н о р Дж., С т а ш е ф Дж. Характеристические классы. М.: Мир, 1979.]
- [52] М а с с и (Massey W. S.). Algebraic topology: an introduction. — N. Y.: Harcourt, Brace and World, 1967. [Русский перевод: М а с с и У., Столлингс Дж. Алгебраическая топология. Введение. — М.: Мир, 1977.]
- [53] М а у н д е р (Maunder C. R. F.). Algebraic topology. — London: Van Nostrand, 1970.
- [54] М и л н о р (Milnor J. W.). Differential topology, mimeographed notes. — Princeton: Princeton University, 1958.
- [55] М и л н о р (Milnor J. W.). The Steenrod algebra and its dual. — *Ann. Math.*, 1958, **67**, p. 150—171.
- [56] М и л н о р (Milnor J. W.). Lectures on characteristic classes. — Princeton: Princeton University, 1957. [Русский перевод: М и л н о р Дж. Лекции о характеристических классах. — Математика, 1959, **3**: **4**, с. 3—53; 1965, **9**: **4**, с. 3—40. См. также М и л н о р Дж., С т а ш е ф Дж. Характеристические классы. — М.: Мир, 1979.]
- [57] М и л н о р (Milnor J. W.). On spaces having the homotopy type of a CW-complex. — *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1959, **90**, p. 272—280.
- [58] М и л н о р (Milnor J. W.). On the cobordism ring Ω^* and a complex analogue, Part I. — *Amer. J. Math.*, 1960, **82**, p. 505—521.
- [59] М и л н о р (Milnor J. W.). On axiomatic homology theory. — *Pacific J. Math.*, 1962, **12**, p. 337—341.
- [60] М и л н о р (Milnor J. W.). Microbundles I. — *Topology*, 1964, **3**, suppl. 1, p. 53—81.
- [61] М и л н о р, М у р (Milnor J. W., Moore J. C.). On the structure of Hopf algebras. — *Ann. Math.*, 1965, **81**, p. 211—264.
- [62] М о ш е р, Т а н г о р а (Mosher R. E., Tangora M. C.). Cohomology operations and applications in homotopy theory. — N. Y.: Harper and Row, 1968. [Русский перевод: М о ш е р Р., Т а н г о р а М. Когомологические операции и их приложения в теории гомотопий. — М.: Мир, 1970.]
- [63] Н о в и к о в С. П. Методы алгебраической топологии с точки зрения теории кобордизмов. — ИАН СССР, сер. мат., 1967, **31**, с. 855—951.
- [64] П у п п е (Puppe D.). Homotopiemengen und ihre induzierten Abbildungen I. — *Math. Z.*, 1958, **69**, p. 299—344.
- [65] Р э й (Ray N.). Some results in generalized homology, K -theory and bordism. — *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 1972, **71**, p. 283—300.
- [66] Р э й (Ray N.). The symplectic bordism ring. — *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 1972, **71**, p. 271—282.
- [67] Р э й (Ray N.). Realizing symplectic bordism classes. — *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 1972, **71**, p. 301—305.
- [68] С е р р (Serre J.-P.). Homologie singulière des espaces fibrés. — *Ann. Math.*, 1951, **54**, p. 425—505. [Русский перевод: С е р р Ж.-П. Сингулярные гомо-

- логии расслоенных пространств. — В кн.: Расслоенные пространства. М.: ИЛ, 1958, с. 9 — 114.]
- [69] Серр (Serre J.-P.). Cohomologie modulo 2 des complexes d'Eilenberg — MacLane. — *Comm. Math. Helv.*, 1953, 27, p. 198—231.
- [70] Серр (Serre J.-P.). Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens. — *Ann. Math.*, 1953, 58, p. 258—294. [Русский перевод: Серр Ж.-П. Гомотопические группы и классы абелевых групп. — В кн.: Расслоенные пространства. М.: ИЛ, 1958, с. 124—162.]
- [71] Спеньер (Spanier E. H.). Function spaces and duality. — *Ann. Math.*, 1959, 70, p. 338—378.
- [72] Спеньер (Spanier E. H.). Algebraic topology. — N. Y.: McGraw-Hill, 1966. [Русский перевод: Спеньер Э. Алгебраическая топология. — М.: Мир, 1971.]
- [73] Стинрод (Steenrod N.). The topology of fibre bundles. — Princeton Mathematical Series, 14, Princeton: Princeton University Press, 1951. [Русский перевод: Стинрод Н. Топология косых произведений. — М.: ИЛ, 1953.]
- [74] Стинрод, Эйленберг (Steenrod N., Eilenberg S.). Foundations of algebraic topology. — Princeton Mathematical Series, 15, Princeton: Princeton University Press, 1952. [Русский перевод: Стинрод Н., Эйленберг С. Основания алгебраической топологии. — М.: ИЛ, 1956.]
- [75] Стинрод, Эпштейн (Steenrod N., Epstein D. B. A.). Cohomology operations. — Princeton: Princeton University Press, 1962. [Русский перевод: Стинрод Н., Эпштейн Д. Когомологические операции. — М.: Наука, 1983.]
- [76] Стонг (Stong R. E.). Notes on cobordism theory. — Princeton: Princeton University Press, 1968. [Русский перевод: Стонг Р. Заметки по теории кобордизмов. — М.: Мир, 1973.]
- [77] Toda (Toda H.). Composition methods in homotopy groups of spheres. — Princeton: Princeton University Press, 1962. [Русский перевод: Toda X. Композиционные методы в гомотопических группах сфер. — М.: Наука, 1982.]
- [78] Том (Thom R.). Quelques propriétés globales des variétés différentiables. — *Comm. Math. Helv.*, 1954, 28, p. 17—86. [Русский перевод: Том Р. Некоторые свойства «в целом» дифференцируемых многообразий. — В кн.: Расслоенные пространства. М.: ИЛ, 1958, с. 291—351.]
- [79] Том (Thom R.). Travaux de Milnor sur le cobordisme. — Paris, Séminaire Bourbaki, 1958/59.
- [80] Томас (Thomas E.). Seminar on fibre spaces. — Berlin: Springer, 1966.
- [81] Уайтхед (Whitehead G. W.). Generalized homology theories. — *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1962, 102, p. 227—283.
- [82] Уайтхед (Whitehead G. W.). Homotopy theory. — Cambridge, Mass.: M. I. T. Press, 1966.
- [83] Уайтхед (Whitehead J. H. C.). Combinatorial homotopy I, II. — *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1949, 55, p. 213—245, p. 453—496.
- [84] Уайтхед (Whitehead J. H. C.). The mathematical works of J. H. C. Whitehead. — London; N. Y.: Pergamon Press, 1962.
- [85] Уолл (Wall C. T. C.). Determination of the cobordism ring. — *Ann. Math.*, 1960, 72, p. 292—311.
- [86] Уолл (Wall C. T. C.). A characterisation of simple modules over the Steenrod algebra mod 2. — *Topology*, 1962, 1, p. 249—254.
- [87] Уолл (Wall C. T. C.). Finiteness conditions for CW-complexes. — *Ann. Math.*, 1965, 81, p. 56—69.
- [88] Уолл (Wall C. T. C.). Addendum to a paper of Conner and Floyd. — *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 1966, 62, p. 171—175.
- [89] Хилтон (Hilton P. J.). An introduction to homotopy theory. — Cambridge: Cambridge University Press, 1953.
- [90] Хилтон (Hilton P. J.). Homotopy theory and duality. — N. Y.: Gordon and Breach, 1965.

- [91] Хилтон, Стамбах (Hilton P. J., Stambach U.). A course in homological algebra. — Berlin: Springer, 1971.
- [92] Хилтон, Уайли (Hilton P. J., Wylie S.). Homology theory. Cambridge: Cambridge University Press, 1950. [Русский перевод: Хилтон П., Уайли С. Теория гомологий. — М.: Мир, 1965.]
- [93] Хирцебрух (Hirzebruch F.). Topological methods in algebraic geometry. — Berlin: Springer, 1966. [Русский перевод: Хирцебрух Ф. Топологические методы в алгебраической геометрии. — М.: Мир, 1973.]
- [94] Хопф (Hopf H.). Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche. — Math. Ann., 1931, 104, p. 637—665.
- [95] Ху Сыцзян (Hu S.-T.). Homotopy theory. — N. Y.: Academic Press, 1959. [Русский перевод: Ху Сыцзян. Теория гомотопий. — М.: Мир, 1934.]
- [96] Хьюзмоллер (Husemoller D.). Fibre bundles. — N. Y.: McGraw-Hill, 1936. [Русский перевод: Хьюзмоллер Д. Расслоенные пространства. — М.: Мир, 1970.]

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1*] Адамс (Adams J. F.). Infinite loop spaces. — Princeton, New Jersey, 1978, Ann. Math. Studies, 90. — [Русский перевод: Адамс Дж. Бесконечнократные пространства петель. — М.: Мир, 1982.]
- [2*] Араки, Есимура (Araki S., Yosimura Z.). A spectral sequence associated with a cohomology theory of infinite CW-complexes. — Osaka J. Math., 1972, 9, № 3, p. 351—365.
- [3*] Вершинин В. В. Вычисление кольца симплектических кобордизмов в размерностях до 32 и нетривиальность большинства тройных произведений элементов Н. Рея. — Сиб. матем. журнал, 1983, 29, № 1, с. 50—62.
- [4*] Коэн (Cohen R. L.). Immersion of manifolds. — Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1982, 79, № 10, p. 3390—3392.
- [5*] Кузьминов В. И. О производных функторов функтора обратного предела. — Сиб. мат. журнал, 1967, 8, № 2, с. 933—945.
- [6*] Мадсен, Милгрэм (Madsen I., Milgram R. J.). The classifying spaces for surgery and cobordism of manifolds. — Princeton, New Jersey, 1979, Ann. Math. Studies, 92. [Русский перевод: Мадсен И., Милгрэм Р. Классифицирующие пространства для перестроек и кобордизмов многообразий. — М.: Мир, 1984.]
- [7*] Постников М. М. О теореме А. Картана. — УМН, 1966, 21, № 4, с. 35—46.
- [8*] Сулливан (Sullivan D.). Geometric Topology. Part I. — Localization, periodicity and Galois symmetry, mimeographed notes, MIT, 1970. [Русский перевод: Сулливан Д. Геометрическая топология. — М.: Мир, 1975.]
- [9*] Фукс Д. Б. Двойственность Экмана—Хилтона и теория функторов в категории топологических пространств. — УМН, 1966, 21, № 2, с. 4—40.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абелева группа 24
Адамса спектральная последовательность 528
— теорема 197
— фильтрация 537
Аддитивная операция 453, 480
Адема соотношения 517
Аксиома вырезания 124
— Майера — Вьеториса 185, 194
— — — слабая 194
— слабой гомотопической эквивалентности 135
— суммы 135, 156, 184
— — — слабая 191
— точности 122, 134, 153
Алгебра над коалгеброй 563
— разделенных полиномов 520
— Стиенрода 509
Александера двойственность 367
Аппроксимация диагональная 510
Ассоциированное расслоенное пространство 238
Атлас векторного расслоения 237
— главного G -расслоения 266
— класса C^∞ дифференцируемый 265
— многообразия 264
Атьи — Хирцебруха — Уайтхеда теорема 398
Ациклический на моделях функтор 293
- Бернулли числа 552
Вимодуль 483
Бокштейна гомоморфизм 213
Борданты многообразия 271
Бордизмов теория 279
Бордизмы 264, 279
— Браудера 274
— неориентированные 273
— ориентированные 273
— оснащенные 274
— симплектические 274
— спинорные 273
— унитарные 274
Бордмана гомоморфизм 341
Вореля теорема 433
Ботта теорема о периодичности 261
Браудера бордизмы 274
Брауна теорема 190
Вукет 14
- Вана точная последовательность 417
Векторное n -мерное расслоение 282
Вещественное векторное расслоение 283
— проективное пространство 82
Вложение 268
Внутренность клетки 81
Вырезаемая триада 127
Вырезания аксиома 124
- Гизия точная последовательность 416
Главная клетка 80
Главное G -расслоение 233, 248
— —, редукция 248
Гладкое многообразие 265
— отображение 267
Гомологий сингулярных группа 205
— — теория с коэффициентами в группе A 207
— теория классическая 204
— — мультипликативная 337
— — неприведенная 122
— — приведенная 134
— — с коэффициентами в группе G 204
Гомологическое X -умножение 300
Гомоморфизм Бокштейна 213
— Бордмана 341
— Гуревича 140
— неустойчивый 224
— — относительный 226
— — устойчивый 224
— краевой 412
—, сохраняющий целые элементы 581
— Хопфа устойчивый 228
Гомотопии продолжения свойство 92
— устойчивых теория 182
Гомотопическая группа 45
— — n -мерная 45
— — спектра 170
— — устойчивая 103
— единица 24, 28
— надстройка 106
— точная последовательность 50
— — — триады 101
— тривиализация 402
— эквивалентность 47
— — послонная 400
— — слабая 171
Гомотопически ассоциативное коумножение 28
— — умножение 25
— коммутативная H -когруппа 29
— коммутативное обращение 25
— — умножение 25
Гомотопический класс 12
— тип 47
Гомотопическое множество n -мерное 100
— обращение 25
Гомотопия 12
— относительно A 12
— послонная 272, 400
— стягивающая 48
— цепная 208
Градуированное кольцо 323
Границ группа 205
Граница клетки 80
Грань клетки непосредственная 80
Грассмана многообразие 73
Граф 121
Группа 23
— абелева 24
— бордизмов Браудера 274
— — неориентированных 273

Группа бордизмов ориентированных 273
 — — оснащенных 274
 — — симплектических 274
 — — спинорных 273
 — — унитарных 274
 — гомологий сингулярных 206
 — гомотопическая 45
 — — спектра 170
 — — стабильная 107
 — грани 205
 — когомологий сингулярных с коэффициентами в G 209
 — коммутативная 24
 — коэффициентов теории гомологий 129
 — — — приведенной 144
 — — цепей 205
 — циклов 205
 Гуревича гомоморфизм 140
 — — нестабильный 224
 — — относительный 226
 — — стабильный 224
 — теорема об изоморфизме 226
 — — — относительная 227

Двойственность Александра 367
 — Лефшеца 370
 — Пуанкаре 371
 Действие 40
 — вполне разрывное 71
 — группы 40
 — согласованное с умножением 57
 — — H -группы на H -группе 58
 — топологической группы на топологическом пространстве 76
 Дерево 121
 Диагональная аппроксимация 510
 Дiffeоморфизм 267
 Дiffeоморфные многообразия 267
 Дифференциал 205
 — отображения 268
 Дифференцируемая структура класса C^∞ 265
 Дифференцируемое многообразие 265
 Дифференцируемый атлас класса C^∞ 265
 Допустимая последовательность 517, 526
 Допустимый моном 517, 526
 Дуальный класс Штифеля — Уитни многообразия 443

Единица гомотопическая 28
 Естественная эквивалентность 19
 — — теорий когомологий 141
 Естественное преобразование 18
 — — неприведенных теорий когомологий 141

Закон экспоненциальный 13
 Замкнутое многообразие 265
 Зинмана теорема о сравнении 431

Идеал пополнения 451
 Избыточность 518
 Изоморфизм Тома 362
 — — стабильный 464
 Индуктивная система 145
 Индуктивный предел 145

Индукционная X -структура 272
 Индуцированное расслоение 240, 399
 Инъективная резольвента 549
 Инъективный модуль 549

Карта векторного расслоения 237
 — главного G -расслоения 233
 — микрорасслоения 359
 — многообразия 264
 Картана формула 442
 Касательное микрорасслоение 359
 — — расслоение 232, 267
 Категория 15
 Кватернионное векторное расслоение 232
 — — проективное пространство 84
 Класс гомотопический 12
 — — Понтрягина 443
 — — универсальный 443
 — — Тома 360, 361, 427
 Класс Тома микрорасслоения 360
 — фундаментальный многообразия 371
 — — характеристический 437
 — — Чженя 443
 — — универсальный 443
 — Штифеля — Уитни 443
 — — — многообразия 443
 — — — дуальный 443
 — — универсальный 443
 — Эйлера 416
 Классифицирующее пространство 184
 Классическая теория когомологий 204
 Клетка 79
 — — главная 80
 — — спектра 165
 Клетки внутриности 80
 — — непосредственная грань 80
 Клеточное отображение 113
 — — подпространство 87
 — — пространство 81
 — — — относительное 89
 — — разбиение 79
 Клеточный эквивалент 120
 Кобордизмов теория 279
 Когомологий теория 153
 — — мультипликативная 337
 Когомологическая операция аддитивная 453, 480
 — — нестабильная 453
 — — стабильная 480
 Когомологическая операция степени n 480
 — — Стиррода 511
 — — типа (p, q) 480
 Когомологическое X -умножение 300
 Когомотопий стабильных теория 182
 Когомотопическое множество n -мерное 229
 Кодействие 40
 — — согласованное 58
 Кольцевой спектр 319
 — — коммутативный 319
 Кольцо градуированное 323
 Коммутативная группа 24
 Коммутативное умножение 319
 Коммутативный Кольцевой спектр 319
 Комодуль 482
 — — расширенный 533
 Компактно-открытая топология 13
 Комплекс коцепной 209
 — — цепной 205
 — — Эйленберга 221
 Комплексное векторное расслоение 288
 — — проективное пространство 83
 Композиция 15
 Компонента линейной связности 21
 Конечный спектр 165

- Конструкция Понтрягина — Тома 277
 Конус 35, 168
 — отображения 36, 168
 Корасслоение 92
 Корасслоенная последовательность общая 174
 — — специальная 174
 Котенизорное произведение 571
 Котичная последовательность 35
 Коумножение 28
 — гомотопически ассоциативное 28
 Кофинальный подспектр 166
 Кофунктор 16
 Коцепной комплекс 209
 Краевой гомоморфизм 412
 Край многообразия 265
 Кюннета теорема 296
 — — относительная 296
- Лемма о симплициальной аппроксимации 95
 Лере — Серра теорема 409
 Лере — Хирша теорема 425
 Лефшеца двойственность 370
 Линейно связанное пространство 20
 Линейной связности компонента 20
 Лиэзовое пространство 112
 Локальное сечение 71
- Майера — Вьеториса аксиома 185, 194
 — — слабая 194
 — — точная последовательность 131
 Микрорасслоение 359
 —, эквивалентности 360
 Милнора — Спеньера теорема 391
 Миттаг-Леффлера условие 161
 Многообразие 265
 — без края 265
 — гладкое 265
 — Грассмана 73
 — дифференцируемое 265
 — замкнутое 265
 — ориентируемое 267
 — размерности n 265
 — Штифеля 73
 —, фундаментальный класс 371
 Многообразия борданты 271
 — диффеоморфные 267
 — сингулярные X -борданты 272, 279
 Множество гомотопическое n -мерное 106
 — когомтопическое n -мерное 229
 — направленное 145
 — относительное гомотопическое n -мерное 49
 — функций перехода 234
 — —, эквивалентность 234
 Модель 293
 Модуль инъективный 549
 — плоский 338
 — проективный 530
 — расширенный 532
 Модульный спектр 320
 Мног. допустимый 517, 526
 Морфизм 15
 — F -векторных расслоений 233
 — главных G -расслоений 233
 — множеств функций перехода 234
 —, область значений 15
 — определения 15
 — обратных систем 154
 — прямых систем 146
 — спектральных последовательностей 430
 Мультипликативная теория гомологий 327
 — — когомтологий 327
- Надстройка 22
 — гомотопическая 106
 Надстройки функтор 23
 Наивное приведенное произведение спектров 304
 Накрывающая проекция 75
 Накрывающее пространство 75
 Накрывающей гомотопии свойство 66
 Накрытие 75
 — регулярное 77
 Направленное множество 145
 Невырожденная отмеченная точка 141
 Неориентированные бордизмы 273
 Непосредственная грань клетки 80
 Неприведенная теория гомологий 122
 Неприведенный цилиндр отображения 52
 Неразложимых элементов факторалгебра 451
 Нестабильная когомтологическая операция 453
 Нестабильное отображение Хопфа 230
 Нестабильный гомоморфизм Гуревича 224
 Нормальное расслоение 233
 — — стабильное 269
- Область значений морфизма 15
 — определения морфизма 15
 Обратная система 153
 Обратный предел 154
 Обращение 23
 — гомотопическое 25
 Общая корасслоенная последовательность 174
 Объект 15
 Окрестность трубчатая 269
 Операция Стиррода 511
 Орбита 40
 — точки 76
 Ориентация микрорасслоения 360
 — многообразия 360
 — расслоения 427
 Ориентированные бордизмы 273
 Ориентируемое микрорасслоение 360
 — многообразия 267, 360
 Оснащенное расслоение 274
 Остов 79, 165
 Остовами фильтрация 165
 Отмеченная точка 13
 — — невырожденная 141
 Относительный гомоморфизм Гуревича 226
 Отображение вычисления 13
 — гладкое 267
 — клеточное 113
 — приклеивающее 87
 — спектров 167
 — трансверсально регулярное 270
 — характеристическое 80, 87
 — Хопфа 108
 — — нестабильное 230
 — S -двойственности 376
 — X -многообразий 272
 Отображения дифференциал 268
 — степень 216
 — цилиндр неприведенный 52
 — — приведенный 52
- Петель пространство 22
 — функтор 23
 Плоский модуль 338
 Погружение 268
 Подмногообразие 270
 —, коразмерность 270

- Поднятие 66
- Подпространство клеточное 87
- Подразбиение 86
- Подспектр 164
 - кофидальный 166
- Понтрягина класс 443
 - универсальный 443
 - умножение 337
- Понтрягина — Тома конструкция 277
- Последовательность допустимая 517
 - расслоенная общая 174
 - специальная 174
 - коточная 35
 - Серра 420
 - спектральная 397
 - Адамса 197
 - Атья — Хирцебруха — Уайтхеда 398
 - Лере — Серра 409
 - сходящаяся 398
 - точная 34, 35, 36
 - Вана 417
 - Гизина 416
 - гомотопическая 50, 53
 - — слабого расслоения 69
 - Майера — Векториса 131
- Послойная гомотопическая эквивалентность 400
 - гомотопия 272, 400
- Предел обратный 154
 - прямой 145
- Представляющее пространство 184
- Приведенная теория гомологий 134
 - — когомологий 153
- Приведенное произведение 21
 - — спектров наивное 304
- Приведенный цилиндр отображения 52
- Приклеивающее отображение 87
- Примитивный элемент 453, 488
- Проективная резольвента 530
 - система 153
- Проективное пространство вещественное 82
 - — кватернионное 84
 - — комплексное 83
- Проективный модуль 530
 - предел 154
- Произведение котензорное 571
 - наивное приведенное спектров 304
 - приведенное 21
 - расслоенных пространств 252
 - тензорное 290
 - — модулей 338
 - — расслоенный 351
- Простая система образующих 433
- Пространство классифицирующее 184
 - клеточное 81
 - — относительное 89
 - линейно связанное 20
 - линзовое 112
 - накрывающее 75
 - петель 22
 - представляющее 184
 - проективное вещественное 82
 - — кватернионное 84
 - — комплексное 83
 - пунктированное 13
 - расслоенное 69
 - — ассоциированное 238
 - стягиваемое 47
 - Тома 276
 - Эйленберга — Маклейна 118, 209
 - л-связное 51
- Прямая система 145
- Прямой предел 145
- Пуанкаре двойственность 371
- Пунктированное пространство 13
- Путь 21
- Разбиение клеточное 79
- Расслоение векторное 66
 - — вещественное 232
 - — кватернионное 232
 - — комплексное 232
 - индуцированное 240, 399
 - касательное 232, 267
 - нормальное 233
 - — стабильное 269
 - ориентируемое 427
 - — относительно теории гомологий 401
 - оснащенное 274
 - слабое 66
 - сферическое 415
 - тривиальное 66
- Расслоения векторные послойно гомотопически эквивалентные 400
 - — стабильно эквивалентные 254
 - — эквивалентные 233
- Расслоенное пространство 69
 - — ассоциированное 238
- Расширение (группы) 287
- Расширения эквивалентные 288
- Расширенный комодуль 533
 - модуль 532
- Регулярное накрытие 77
- Резольвента инъективная 549
 - проективная 530
 - свободная 533
- Репер 72
- Ретракт 48
- Свободная резольвента 283
- Свободный на моделях функтор 293
- Свойство накрывающей гомотопии 66
 - продолжения гомотопии 92
- Связный спектр 365
- Серра последовательность 420
- Сечение 240
 - локальное 71
- Симплекс л-мерный сингулярный 205
 - — стандартный 204
- Симплектические бордизмы 274
- Сингулярное X-многообразие 279
- Сингулярные X-борданты многообразия 279
- Сингулярный л-мерный симплекс 205
- Сингулярных гомологий группа 205
 - — теория с коэффициентами в группе G 207
 - когомологий теория с коэффициентами в группе G 209
- Система обратная 153
 - прямая 145
- Склеивающая функция 249
- Слабая аксиома суммы 191
 - гомотопическая эквивалентность 171
- Слабо гомотопные отображения 197
- Слабое расслоение 66
- Слабой гомотопической эквивалентности аксиома 135
- Слой 66
 - спектра 166
- Слоями фильтрация 165
- Согласованное действие 57, 58
 - кодействия 58
- Соотношения Адема 517
- Сохраняющий целые элементы гомоморфизм 581
- Спектр 164
 - кольцевой 319
 - коммутативный 320
 - конечный 165
 - связный 365
 - счетный 165

- Спектр Тома 275
 — Эйленберга — Маклейна 211
 — S-двойственный данному 376
 Спектральная последовательность 397
 — — Адамса 529
 — — Атьи — Хирцебруха — Уайтхеда 398
 — — Лере — Серра 409
 — — сходящаяся 398
 Специальная корасслоенная последовательность 174
 Спинорные бордизмы 273
 Стабильная гомотопическая группа 108
 — когомологическая операция 480
 — когомологическая группа 174
 Стабильное нормальное расслоение 269
 Стабильный гомоморфизм Гуревича 224
 — — Хопфа 228
 — изоморфизм Тома 465
 Стабильных гомотопий теория 174
 — когомотопий теория 174
 Стандартный n -мерный симплекс 204
 Степень гомоморфизма 488
 — отображения 216
 Стиррода алгебра 480
 — операция 511
 Стонга — Хаттори теорема 582, 583
 Структура дифференцируемая класса C^∞ 265
 — относительного клеточного пространства 89
 Стягиваемое пространство 47
 Стягивающая гомотопия 48
 Сумма Уитни 252
 Суммы аксиомы 135, 154, 184
 — — слабая 191
 Сходящаяся спектральная последовательность 398
 Счетный спектр 165
- Тензорное произведение 290
 — — модулей 338
 — — расслоений 351
 Теорема Адамса 197, 529
 — Атьи — Хирцебруха — Уайтхеда 398
 — Бореля 433
 — Ботта о периодичности 261
 — Брауна 190
 — Гуревича об изоморфизме 226
 — — — относительная 227
 — двойственности Александра 367
 — — Лефшца 370
 — — Пуанкаре 371
 — Зимана о сравнении 431
 — Кюннета 296
 — — относительная 299
 — Лере — Серра 409
 — Лере — Хирша 425
 — о гомотопическом вырезании 100
 — об акцильных моделях 294
 — об универсальных коэффициентах 285, 288
 — Спеньера — Милнора 391
 — Стонга — Хаттори 582—583
 — Тома об изоморфизме 362, 427
 — Уайтхеда 111, 228
 — Фрейденшталя о надстройке 107, 425
 — Хопфа об изоморфизме 230
 — Эйленберга — Зильбера 296
 Теория бордизмов 279
 — гомотопий классическая 204
 — — мультипликативная 327
 — — неприведенная 122
 — — приведенная 134
 — — сингулярных с коэффициентами в группе G 207
- Теория гомотопий стабильных 182
 — кобордизмов 279
 — когомологий приведенная 153
 — когомотопий стабильных 182
 Тома изоморфизм стабильный 464
 — класс 360, 361, 427
 — — микрорасслоения 360
 — пространство 276
 — спектр 275
 — теорема об изоморфизме 362, 427
 Топология компактно-открытая 13
 Точки орбита 76
 Точная гомотопическая последовательность отображения 53
 — — — пары 50
 — — — слабого расслоения 69
 — — — триады 101
 — — последовательность 34, 43
 — — Вана 417
 — — Гизина 416
 — — Майера — Вьеториса 131
 — — расщепляющаяся 56
 Точности аксиомы 122, 134, 153
 Точный слева функтор 155
 Трансверсально регулярное отображение 270
 Трансгрессивный элемент 421
 Трансгрессия 420
 Триада 100
 — вырезаемая 127
 —, точная гомотопическая последовательность 101
 Тривиализация гомотопическая 402
 Тривиальное расслоение 66
 Тройка 53
 Трубчатая окрестность 269
- Уайтхеда теорема 111, 228
 Уитни сумма 252
 Умножение 23
 — гомотопически ассоциативное 25
 — коммутативное 25
 — Понтрягина 337
 Универсальное свойство декартова произведения 10
 — — факторпространства 10
 Универсальный класс Понтрягина 443
 — — Чженя 443
 — — Штифеля — Уитни 443
 — элемент 187
 Унитарные бордизмы 274
 Условие Миттаг-Леффлера 161
- Факторалгебра неразложимых элементов 451
 Фильтрация 165, 393
 — Адамса 537
 — остовами 165
 — слоями 165
 — спектра 165
 Формула Картана 442
 Фрейденшталя теорема о надстройке 107, 425
 Фундаментальный класс многообразия 371
 Функтор 16
 — акцильный на моделях 283
 — ковариантный 17
 — контравариантный 17
 — надстройки 23
 — петель 23
 — свободный на моделях 293
 — точный слева 155
 Функция 166

Функция перехода 234
— склеивающая 249

Характер Чженя 457
Характеристический класс 437
Характеристическое отображение 80, 87
— число 468
Хофа гомоморфизм стабильный 228
— отображение 108
— неустойчивое 230
— теорема об изоморфизме 230

Целый элемент 581
Целей группа 205
Цепная гомотопия 208
Цепной комплекс 205
Цепь 205
Цикл 205
Циклов группа 205
Цилиндр отображения 52
— — неприведенный 52
— — приведенный 52

Чженя класс 443
— — универсальный 443
— характер 457
— число 468
Числа Бернулли 552
Число характеристическое 468
— Чженя 468

Штифеля многообразие 72
Штифеля — Уитни класс 443
— — — многообразия 443
— — — дуальный 443
— — — универсальный 443

Эйленберга комплекс 221
Эйленберга — Зильбера теорема 296
Эйленберга — Маклейна пространство 118, 209
— — спектр 211
Эйлера класс 416
Эквивалент клеточный 120
Эквивалентность векторных расслоений 223
— — — послойная гомотопическая 400

Эквивалентность векторных расслоений стабильная 254
— главных G -расслоений 233
— гомотопическая 47
— — послойная 400
— — слабая 171
— естественная 19
— — теорий гомотологий 141
— множеств функций перехода 234
— объектов 15
— X -структур 271
Эквивалентные микрорасслоения 360
— множества функций перехода 234
— расслоения 233
— расширения 288
— X -структуры 271
Экспоненциальный закон 13
Элемент примитивный 453, 488
— трансгрессивный 421
— универсальный 187
— целый 581
— n -универсальный 187

e -инвариант 551
 G -расслоение главное 233, 248
 H -гомоморфизм 28
 H -группа 25
 H -когруппа 28
 H -когруппа гомотопически коммутативная 29
 H -пространство 24
 J -гомоморфизм 554
 n -мерный остов 79
— симплекс 204
— — сингулярный 205
— — стандартный 204
 n -связная пара 51
 n -связное пространство 51
 n -универсальный элемент 187
 S -двойственности отображение 376
 S -двойственный спектр 376
 X -бордантные многообразия 272, 279
 X -многообразия 272
— сингулярные 279
 X -многообразий отображение 272
 X -структура 271
— индуцированная 272
 X -структуры эквивалентные 271

Ω -спектр 181

$\times$ -умножение гомотопическое 300
— когомотопическое 300
 $\wedge$ -умножение 303
 $\vee$ -умножение 303
 $\cup$ -умножение 303
 $\circ$ -умножение 303

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
Глава 0. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ОБЩЕЙ ТОПОЛОГИИ . . .	10
Глава 1. КАТЕГОРИИ, ФУНКТОРЫ И ЕСТЕСТВЕННЫЕ ПРЕ- ОБРАЗОВАНИЯ	15
Глава 2. ГОМОТОПИЧЕСКИЕ МНОЖЕСТВА И ГРУППЫ	20
Глава 3. СВОЙСТВА ГОМОТОПИЧЕСКИХ ГРУПП	47
Глава 4. РАССЛОЕНИЯ	65
Глава 5. КЛЕТОЧНЫЕ ПРОСТРАНСТВА	79
Глава 6. ГОМОТОПИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КЛЕТОЧНЫХ ПРО- СТРАНСТВ	92
Глава 7. ТЕОРИИ ГОМОЛОГИЙ И КОГОМОЛОГИЙ	123
Глава 8. СПЕКТРЫ	163
Глава 9. ТЕОРЕМЫ О ПРЕДСТАВИМОСТИ	184
Глава 10. КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ГОМОЛОГИЙ	204
Глава 11. ВЕКТОРНЫЕ РАССЛОЕНИЯ И К-ТЕОРИЯ	232
Глава 12. МНОГООБРАЗИЯ И БОРДИЗМЫ	264
Глава 13. УМНОЖЕНИЯ	280
Глава 14. ОРИЕНТАЦИЯ И ДВОЙСТВЕННОСТЬ	359
Глава 15. СПЕКТРАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ	393
Глава 16. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КЛАССЫ	437
Глава 17. КОГОМОЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ И ГОМОЛОГИЧЕ- СКИЕ КООПЕРАЦИИ	479
Глава 18. АЛГЕБРА СТИНРОДА И ДВОЙСТВЕННАЯ К НЕЙ АЛ- ГЕБРА	509
Глава 19. СПЕКТРАЛЬНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ АДАМСА И ϵ -ИНВАРИАНТ	529
Глава 20. ВЫЧИСЛЕНИЕ ГРУПП БОРДИЗМОВ	563
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	595
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ	600

Роберт М. Свитцер

**АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТОПОЛОГИЯ —
ГОМОТОПИИ И ГОМОЛОГИИ**

Редакторы: Ю. Б. Рудяк, Т. А. Панькова

Технический редактор С. Я. Шкляр

Корректор Е. В. Сидоркина

ИБ № 12037

Сдано в набор 24.01.84. Подписано к печати 13.12.84.
Формат 60×90¹/₁₆. Бумага тип. № 2. Литературная
гарнитура. Высокая печать. Усл. печ. л. 38 Усл.
кр.-отт. 38. Уч.-изд. л. 37,88. Тираж 9200 экз. За-
каз № 1315. Цена 3 р. 10 к.

Издательство «Наука»

**Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15**

Отпечатано с матриц ордена Октябрьской Револю-
ции, ордена Трудового Красного Знамени Ленин-
градского производственно-технического объединения
«Печатный Двор» имени А. М. Горького в типогра-
фии № 8 ордена Трудового Красного Знамени Ленин-
градского объединения «Техническая книга» им. Ев-
гении Соколовой Союзполиграфпрома при Государст-
венном комитете СССР по делам издательств, поли-
графии и книжной торговли. 190000, Ленинград,
Прачечный переулок, 6, зак. 33

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
ИЗДАТЕЛЬСТВА «НАУКА»
ПЛАНИРУЕТ ИЗДАТЬ В 1984—1985 гг.
СЛЕДУЮЩИЕ КНИГИ:

М. М. Постников. Лекции по алгебраической топологии. Основы теории гомотопий.

Книга содержит подробное изложение теории гомотопий. Особое внимание в ней уделено разъяснению и происхождению основных понятий. Содержит обширный материал, в монографической и учебной литературе до сих пор не излагавшийся.

Для студентов 3—5 курсов и аспирантов математических отделений университетов. Может служить основой спецкурсов и спецсеминаров.

М. М. Постников. Лекции по алгебраической топологии. Теория гомотопий клеточных пространств.

Книга является непосредственным продолжением книги «Основы теории гомотопий» того же автора, выходящей в 1984 г., и вполне доступна читателям и не знакомым с основами теории гомотопий, но владеющим элементами теории гомотопий.

Основное внимание в книге уделено гомотопической теории клеточных пространств и теории гомотопических групп сфер.

Для студентов старших курсов университетов, аспирантов и научных работников, специализирующихся в области топологии и смежных дисциплин.

Книги можно приобрести в магазинах Книготорга и Академкниги.