УДК 530.182, 517.957

БЕЗДИСПЕРСИОННЫЙ ПРЕДЕЛ ДЛЯ (1+1)-МЕРНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ШРЕДИНГЕР-МАКСВЕЛЛ-БЛОХА

Умурзахова Жанар Бапаховна
uzhb78@mail.ru
Докторант Физико-технического факультета, ЕНУ им.Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
Научный руководитель – А.Б.Алтайбаева

В последнее время вопросы интегрируемости нелинейных уравнений и систем являются одним из перспективных направлений теоретической и математической физики. Наличие у таких уравнений физических приложений многократно увеличивает интерес к подобным исследованиям. Известно огромное разнобразие нелинейных интегрируемых уравнений, описывающих различные явления в разных областях физики. С интегрируемостью нелинейных волновых уравнений тесно связано такое понятие, как солитон [1].

Помимо интегрируемых нелинейных дифференциальных уравнении, существует также важный класс интегрируемых уравнений в частных производных, так называемые интегрируемые уравнения гидродинамического типа, часто называемые бездисперсионными уравнениями [2]-[5]. В некоторых случаях эти уравнения являются бездисперсионными (или квазиклассическими) пределами интегрируемых солитонных систем, или по построению, таких как систем гидродинамического типа. Они часто возникают в различных задачах физики и математики, по этой причине они интенсивно изучаются в последние годы.

Исследование бездисперсионных систем имеет большое значение, так как они возникают из анализа различных проблемы, такие как физика, математика и прикладной математики от теории квантовых полей и струн до теории конформных отображений на комплексной плоскости. Используются множество методов для изучения бездисперсионных уравнений и иерархии. Интегрируемые бездисперсионные уравнения можно рассматривать как квазиклассический предел обычных интегрируемых систем [2].

Интегрируемые бездисперсионные уравнения эквивалентны условию коммутации векторных полей пар Лакса, так что они могут быть в произвольном количество измерений. Например, в [3] был введен новый систематический метод для построения бездисперсионных систем в (3 + 1) измерениях с использованием неизоспектрального Лакса пары, которые включают контактные векторные поля.

В данной работе рассмотрим (1+1)-мерную систему уравнений Шредигер-Максвелл-Блоха:

$$\begin{cases} iq_t + q_{xx} + 2|q|^2 q - 2ip = 0, \\ p_x - 2q\eta - 2i\omega_0 p = 0, \\ \eta_x + q\bar{p} + \bar{q}p = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где q $и$ p - комплексные функций, η – вещественная функция, ω_0– вещественная постоянная, q_t, q_{xx}, p_x и η_x - частные производные по переменным x и t, i – мнимая единица, $\bar{q}$ и $\bar{p}$ - комплексные сопряженные величин q $и$ p, соответственно.

Введем масштабное преобразование [6]

$$\frac{\partial}{\partial t} \to \varepsilon \frac{\partial}{\partial t},$$
$$\frac{\partial}{\partial x} \to \varepsilon \frac{\partial}{\partial x},$$

здесь ε - малый параметр. Система уравнений (1) примет вид:

$$\begin{cases} i\varepsilon q_t + \varepsilon^2 q_{xx} + 2|q|^2 q - 2ip = 0, \\ \varepsilon p_x - 2q\eta - 2i\omega_0 p = 0, \\ \varepsilon\eta_x + q\bar{p} + \bar{q}p = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Теперь величины q, p и η представим в следующем виде:

$$q=\sqrt{u}e^{\frac{i}{\varepsilon}S}, \tag{3}$$

$$p=i\sqrt{uw}e^{\frac{i}{\varepsilon}S}, \tag{4}$$

$$\eta=\sqrt{1-uw}, \tag{5}$$

где p и η связаны соотношением:

$$\eta^2+|p|^2=1 \tag{6}$$

Вычислим производные по переменной t и x от функции q, p и η в уравнении (2):

$$q_t=\left(\frac{u_t}{2\sqrt{u}}+\frac{i}{\varepsilon}S_t\sqrt{u}\right)e^{\frac{i}{\varepsilon}S}, \tag{7}$$

$$q_x=\left(\frac{u_x}{2\sqrt{u}}+\frac{i}{\varepsilon}S_x\sqrt{u}\right)e^{\frac{i}{\varepsilon}S}, \tag{8}$$

$$q_{xx}=\left\{\left(\left(\frac{u_x}{2\sqrt{u}}\right)_x-\frac{S_x^2\sqrt{u}}{\varepsilon^2}\right)+\frac{i}{\varepsilon}\left(S_{xx}\sqrt{u}+\frac{S_xu_x}{\sqrt{u}}\right)\right\}e^{\frac{i}{\varepsilon}S}, \tag{9}$$

$$p_x=\left(i\left(\sqrt{uw}\right)_x-\frac{S_x}{\varepsilon}\sqrt{uw}\right)e^{\frac{i}{\varepsilon}S}, \tag{10}$$

$$\eta_x=-\frac{(uw)_x}{2\sqrt{1-uw}}. \tag{11}$$

Формулы (7)-(11) подставим в уравнения (2) и собираем по степеням ε :

$$\begin{aligned}\varepsilon^0: &\quad S_t-S_x^2-2u-2\sqrt{w}=0,\\ &\quad \left(\frac{(2\omega_0-S_x)\sqrt{w}}{2}\right)_x=0,\end{aligned} \tag{12}$$

$$\varepsilon^1: \quad \frac{u_t}{2\sqrt{u}}+\frac{2(S_{xx}u+S_xu_x)_x}{2\sqrt{u}}=0. \tag{13}$$

Делая некоторые вычисления системы уравнении (2) примет вид:

$$\begin{cases} u_t+2(S_xu)_x=0,\\ \upsilon_t+\left(S_x^2-2u-2\sqrt{w}\right)_x=0,\\ w_x-\dfrac{2S_{xx}w}{2\omega_0-S_x}=0.\end{cases} \tag{14}$$

Полагая, что $S_x=\upsilon$, получим бездисперсионный предел для (1+1)-мерной системы уравнений Шредингер-Максвелл- Блоха:

$$\begin{cases} u_t + 2(\upsilon u)_x = 0, \\ \upsilon_t + \left(\upsilon^2 - 2u - 2\sqrt{w}\right)_x = 0, \\ w_x - \dfrac{\upsilon_x w}{2\omega_0 - \upsilon} = 0. \end{cases} \qquad (15)$$

В настоящей работе был получен бездисперсионный предел (1+1)-мерной системы уравнений Шредингер-Максвелл- Блоха. В последнее время значительный интерес уделяется бездисперсионным или квазиклассическим пределам интегрируемых уравнений и их иерархий. Изучение бездисперсионных иерархий имеет большое значение, так как они возникают при анализе различных проблем физики, математики и прикладной математики от теории квантовых полей и струн до теории конформных отображений на комплексной плоскости. В последующих работах планируется получить пару Лакса бездисперсионного предела (1+1)-мерной системы уравнений Шредингер-Максвелл- Блоха.

Список использованных источников

1. Ощепков А.Ю. Теория солитонов. Математическое описание и физические приложения: учеб.-метод.пособие. - Перм.ун.-т. Пермь, 2007, С. 11.

2. Kodama Y. A method for solving the dispersionless KP equation and its exact solutions, Phys.Lett. A129, 1988. P. 223-226.

3. Sergyeyev A. New integrable (3+1)-dimensional systems and contact geometry, Lett. Math. Phys., 108, 359-376.

4. Zakharov V.E. Collapse of Langmuir waves // Soviet physics jetp 35. 1972. №5. P.908–914.

5. Junchao Chen, Yong Chen, Bao-Feng Feng, Ken-ichi Maruno, Yasuhiro Ohta General high-order rogue waves of the (1+1)-dimensional Yajima-Oikawa system // The Physical Society of Japan. 2018. P.87.

6. Takashi Takebe Lectures on Dispersionless Integrable Hierarchies. – Moscow, 2014, P.95.