УДК 524.834

ГРАВИТАЦИЯНЫҢ $f(R,T)$ ТЕОРИЯСЫМЕН СКАЛЯРЛЫҚ ӨРІСПЕН ТОЛТЫРЫЛҒАН ЖАЗЫҚ ҒАЛАМ ҮШІН ҚОЗҒАЛЫС ТЕҢДЕУЛЕРІ

Еркінбек Боранбек
Marzia.93@mail.ru
Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУ, Физика-техникалық факультетінің магистранты,
Нұр-Сұлтан, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі – К.Р. Мырзакулов

Кіріспе. Қазіргі кезде Ғаламның ұлғаюын сипаттау үшін заманауй космология мен астрофизикада әртүлі жалпыланған гравитациялық модельдер пайдаланды. Солардын бірі $f(R)$ гравитациялық теория, мұнда R шамасы Риччи тензорының скаляры болып табылады.

Бұл теория келесі мақалаларда толығырақ сипатталған [1,2]. Келесі космологияда жиі қолданылатын теориялардын бірі болып, $f(T)$ гравитациялық теорияны атап кетсек болады, мұнда T шамасы айналу (ширату) тензорының скаляры болып табылады. Бұл теория келесі жұмыстарда толығырақ келтіріп кеткен [3, 4]. Соңғы жылдары әдебиеттерде осы екі теорияны біріктірілген моделі ұсынулуда - $f(R,T)$ гравитациялық теориясы [5]. Бұл теориялар әсердегі гравитациялық өрісті сипаттайтын мүшенің жалпылынған түрлері болып табылады, бірақ заманауы әдебиеттеде әртүрлі материяның компоненттері қарастырылады. Солардын бірі – скалярлық өріс болып табылады. Космологияда бұндай теорияның қолданылуы, келесі жұмыстарда толығырақ қарастырылған [6, 8].

Біз бұл жұмыста скалярлық өрістерпен толтырылған жазық және біртекті Ғаламды $f(R,T)$ гравитациялық теориясының аясында зерттейміз. Бұл жұмыстын негізгі мақсаты осы теориясы үшін Ғаламың эволюциясын сиппаттайтын өріс теңдеулерін алу болып табылады.

Әсер және қозғалыс теңдеулері

Енді біз бұл мақалада жалпы скаляр өріс үшін гравитациялық әсерді қарастырамыз. Ол мынандай

$$S=\int d^4x\sqrt{-g}\left(h(\varphi)f\left(R,T\right)+K\right), \tag{1}$$

мұнда: L-жалпыланған Лагранжиан, K - аргументтерінің функциясы болып табылады, потенциал V (φ) бұндағы φ - ауыспалы функция.

Қозғалыс теңдеуі ретінде Фридман-Робертсон метрикасын аламыз;

$$ds^2=-dt^2+a(t)^2\left(dx^2+dy^2+dz^2\right), \tag{2}$$

Лагранжиан теңдеуі;

$$\begin{aligned}L=a^3hf-a^3hRf_R-6a\dot{a}^2hf_R-6a^2\dot{a}f_Rh_\varphi\dot{\varphi}-6a^2h\dot{a}\dot{R}f_{RR}-\\-6a^2h\dot{a}\dot{T}f_{RT}-a^3hTf_T+6a\dot{a}^2hf_T+2a^2K\end{aligned} \tag{3}$$

Лагранжиан теңдеуін пайдалана отырып Эйлер-Лагранжиан теңдеуін алуға болады;

$$\frac{\partial L}{\partial a}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{a}}=0 \tag{4}$$

Лагранжианнанқарапайым туындылар есептеулер арқылы шығарсақ, алатын нәтиже;

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial a}=3a^2hf-3a^2hRf_R-6\dot{a}^2hf_R-12a\dot{a}\dot{h}f_R-12a\dot{a}h\dot{R}f_{RR}-\\-12ah\dot{a}\dot{T}f_{RT}-3a^2hTf_T+6\dot{a}^2hf_T+2a^2K\end{aligned} \tag{5}$$

Келесіде біз алған Лагранжианнан $\dot{a}$ тәуелсіз айнмалы түрінде туынды алсақ, онда келесі мәнге ие боламыз;

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{a}}=-12a\dot{a}hf_R-6a^2\dot{h}f_R-6a^2h\dot{R}f_{RR}-6a^2h\dot{T}f_{RT}+12a\dot{a}hf_T \tag{6}$$

Енді (6) алған теңдеуден уақыт күйінше туынды алсақ;

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot a} = & -12\dot a^2 h f_R - 12a\ddot a h f_R - 12a\dot a\dot h f_R - 12a\dot a h\dot R f_{RR} - 12a\dot a h\dot T f_{RT} - 12a\dot a\dot h f_R - \\
& - 6a^2\dot h\dot R f_{RR} - 6a^2\dot h\dot T f_{RT} - 6a^2\ddot h f_R - 12a\dot a h\dot R f_{RR} - 6a^2\dot h\dot R f_{RR} - 6a^2 h\ddot R f_{RR} - 6a^2 h\dot R^2 f_{RRR} - \\
& - 6a^2 h\dot R\dot T f_{RRT} - 12a\dot a h\dot T f_{RT} - 6a^2\dot h\dot T f_{RT} - 6a^2 h\ddot T f_{RT} - 6a^2 h\dot T\dot R f_{RTR} - 6a^2 h\dot T^2 f_{RTT} + \\
& + 12\dot a^2 h f_T + 12a\ddot a h f_T + 12a\dot a\dot h f_T + 12a\dot a h\dot T f_{TT} + 12a\dot a h\dot R f_{TR}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Онда біз жеке-жеке алған қарапайым туындылар арқылы Эйлер-Лагранжиан теңдеуінің келесідей мәнге ие екенін көре аламыз;

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial a} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot a} = & \dot R^2 f_{RRR} + \dot R\dot T(f_{RRT} + f_{RTR}) + \dot T^2 f_{RTT} + \left[\ddot R + \left(2\frac{\dot a}{a} + 2\frac{\dot h}{h}\right)\dot R\right] f_{RR} + \\
& + \left[\ddot T + 2\left(\frac{\dot a}{a} + \frac{\dot h}{h}\right)\dot T\right] f_{TR} - 2\frac{\dot a}{a}(\dot R f_{TR} + \dot T f_{TT}) + \left(\frac{\dot a^2}{a^2} + 2\frac{\ddot a}{a} f_R + 2\frac{\dot a}{a}\frac{\dot h}{h} - \frac{1}{2}R\right) f_R - \\
& - \left(\frac{\dot a^2}{a^2} + 2\frac{\ddot a}{a} + 2\frac{\dot a}{a}\frac{\dot h}{h} + \frac{1}{2}T\right) f_T + \frac{\dot h}{h}\left(\dot R f_{RR} + \dot T f_{RT}\right) + \frac{\ddot h}{h} f_R + \frac{1}{2} f + \frac{K}{3h} = 0
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Лагранжиан шамасына қатысты есептеулер жүргізу барысында біз алдыңғыдай қарапайым туындылар пайдалану арқылы көптеген есептер шығара аламыз, яғни

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial R} = & a^3 h f_R - a^3 h f_R - a^3 h R f_{RR} - 6a\dot a^2 h f_{RR} - 6a^2\dot a f_{RR}\dot h - 6a^2 h\dot a\dot R f_{RRR} - \\
& - 6a^2 h\dot a\dot T f_{RTR} - a^3 h T f_{TR} + 6a\dot a^2 h f_{TR}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Бұдан біз $\dot R$ тәуелсіз айнымалы ретінде қарастыру арқылы;

$$
\frac{\partial L}{\partial \dot R} = -6a^2 h\dot a f_{RR} \tag{10}
$$

Лагранжианның t уақытқа тәуелсіз шамасасын анықтауға мүмкіндік аламыз;

$$
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot R} = -12a\dot a^2 h f_{RR} - 6a^2\dot h\dot a f_{RR} - 6a^2 h\ddot a f_{RR} - 6a^2 h\dot a\dot R f_{RRR} - 6a^2 h\dot a\dot T f_{RRT} \tag{11}
$$

Қарастырған Лагранжиан қар L оның Эйлер-Лагранж теңдеуіне айналуын шығара аламыз;

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial R} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot R} = & 6\frac{\dot a}{a}\dot T\left(f_{RTR} + f_{RRT}\right) - \\
& - \left(R + 6\frac{\dot a^2}{a^2} - 6\frac{\ddot a}{a}\right) f_{RR} - \left(T - 6\frac{\dot a^2}{a^2}\right) f_{TR} = 0
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Келесі қадам T шамасына қатысты L туындысы.

$$\frac{\partial L}{\partial T} = a^3 h f_T - a^3 h f_T - a^3 h R f_{RT} - 6a\dot{a}^2 h f_{RT} - 6a^2 \dot{a} f_{RT} \dot{h} - 6a^2 h\dot{a}\dot{R} f_{RRT} - \tag{13}$$

$$- 6a^2 h\dot{a}\dot{T} f_{RTT} - a^3 h T f_{TT} + 6a\dot{a}^2 h f_{TT}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{T}} = -6a^2 h\dot{a}\dot{T} f_{RT}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{T}} = -12a\dot{a}^2 h f_{RT} - 6a^2 \dot{h}\dot{a} f_{RT} - 6a^2 h\ddot{a} f_{RT} - 6a^2 h\dot{a}\dot{R} f_{RTR} - 6a^2 h\dot{a}\dot{T} f_{RTT}$$

Скалярлы айналу T және $\dot{T}$ үшін Эйлер-Лагранж теңдеуі былай анықталады;

$$\frac{\partial L}{\partial T} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{T}} = 6\frac{\dot{a}}{a}\dot{R}\left(f_{RTR} - f_{RRT}\right) - \left(R + 6\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 6\frac{\ddot{a}}{a}\right) f_{RT} - \left(T - 6\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) f_{TT} = 0 \tag{14}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = \left(a^3 f - a^3 R f_R - 6a\dot{a}^2 f_R - 6a^2 \dot{a}\dot{R} f_{RR} - 6a^2 \dot{a}\dot{T} f_{RT} - a^3 T f_T + 6a\dot{a}^2 f_T\right) h_\varphi - 6a^2 \dot{a} f_R h_{\varphi\varphi}\dot{\varphi} - V'$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = -6a^2 \dot{a} h_\varphi f_R + a^3 \dot{\varphi} \tag{15}$$

Енді жүйе динамикасын сипаттайтын келесідей теңдеу жазатын болсақ:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = -12a\dot{a}^2 h_\varphi f_R - 6a^2 \ddot{a} h_\varphi f_R - 6a^2 \dot{a} h_{\varphi\varphi}\dot{\varphi} f_R - \tag{16}$$

$$- 6a^2 \dot{a}\dot{R} h_\varphi f_{RR} - 6a^2 \dot{a}\dot{T} h_\varphi f_{RT} + 3a^2 \dot{\varphi} + a^3 \ddot{\varphi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \left(-R f_R + 6\frac{\dot{a}^2}{a^2} f_R + 6\frac{\ddot{a}}{a} f_R - T f_T + 6\frac{\dot{a}^2}{a^2} f_T + f\right) h_\varphi - \frac{3}{a}\dot{\varphi} - \ddot{\varphi} - V' = 0$$

Гамильтон теңдеуінің нөлдік энергия түрінде қарастырайық

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}}\dot{a} + \frac{\partial L}{\partial \dot{R}}\dot{R} + \frac{\partial L}{\partial \dot{T}}\dot{T} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\dot{\varphi} - L$$

$$6\frac{\dot{a}}{a}\dot{R} f_{RR} + 6\frac{\dot{a}^2}{a^2} f_R - 6\frac{\dot{a}^2}{a^2} f_T + 6\frac{\dot{a}}{a}\dot{T}^2 f_{RT} + 6\frac{\dot{a}}{a}\dot{\varphi}\frac{h_\varphi}{h} f_R + \frac{1}{h}\ddot{\varphi} + f - R f_R - T f_T + 2\frac{K}{ah}$$

Қолданылған әдебиеттер тізімі

5. Jai-chan Hwang and Hyerim Noh f(R) gravity theory and CMBR constraints // Physics Letters B. 2001. P. 212.

6. Sotiriou, T. P., Faraoni V. f(R) Theories of Gravity // Reviews of Modern Physics. 2014 №5. P.35.

7. Antonio De F., Shinji T. f(R)theories // LivingRev.Rel. 2012. – V. 44, №12. P.380.

8. Myrzakulov R. F(T) gravity and k-essence // General Relativity andGravitation. 2012 №12. P.380.

9. Nojiri S., Odintsov S.D. Introduction to Modified Gravity and Gravitational Alternative for Dark Energy // Meth. Mod.Phys. 2007. P. 115-145.