

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ ҒЫЛЫМ ЖӘНЕ ЖОҒАРЫ БІЛІМ МИНИСТРЛІГІ

«Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ» КЕАҚ

**Студенттер мен жас ғалымдардың
«GYLYM JÁNE BILIM - 2024»
XIX Халықаралық ғылыми конференциясының
БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ**

**СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ
XIX Международной научной конференции
студентов и молодых ученых
«GYLYM JÁNE BILIM - 2024»**

**PROCEEDINGS
of the XIX International Scientific Conference
for students and young scholars
«GYLYM JÁNE BILIM - 2024»**

**2024
Астана**

УДК 001

ББК 72

G99

«GYLYM JÁNE BILIM – 2024» студенттер мен жас ғалымдардың XIX Халықаралық ғылыми конференциясы = XIX Международная научная конференция студентов и молодых ученых «GYLYM JÁNE BILIM – 2024» = The XIX International Scientific Conference for students and young scholars «GYLYM JÁNE BILIM – 2024». – Астана: – 7478 б. - қазақша, орысша, ағылшынша.

ISBN 978-601-7697-07-5

Жинаққа студенттердің, магистранттардың, докторанттардың және жас ғалымдардың жаратылыстану-техникалық және гуманитарлық ғылымдардың өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

The proceedings are the papers of students, undergraduates, doctoral students and young researchers on topical issues of natural and technical sciences and humanities.

В сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов и молодых ученых по актуальным вопросам естественно-технических и гуманитарных наук.

УДК 001

ББК 72

G99

ISBN 978-601-7697-07-5

**©Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия
ұлттық университеті, 2024**

10. Kopezhanova A. N., Nursultanov E.D., Persson L.-E. Boas theorem for some Lorents spaces $\Lambda_q(\omega)$ // Lulea University of Technology, Department of Mathematics, Research Report 2, 2015, p.1– 21.

УДК. 517.51

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РЯДОВ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ Λ -ВАРИАЦИИ

Кәукенова Жаннұр Мейрамбекқызы

kaukenova_zh@ast.nis.edu.kz

Магистрант механико-математического факультета

ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан

Научный руководитель – Ж.Б. Муканов

В данной работе показано, что коэффициенты Фурье функций ограниченной Λ -вариации, где $\Lambda = \{\lambda_n\}$, равны $O(\lambda_n / n)$. Это было известно для $\lambda_n = n^{\beta+1}$, $-1 < \beta < 0$. Показано, что классы L и HBV - дополнительные, а L и ΛBV не являются дополнительными, если класс ΛBV не вложен в класс HBV . Показано, что частичные суммы рядов Фурье функций ограниченной гармонической вариации равномерно ограничены, приведено доказательство аналога теоремы Дирихле для этого класса функций без использования признака Лебега.

В [1] показано, что функции ограниченной гармонической вариации (HBV) удовлетворяют признаку Лебега сходимости их рядов Фурье, но если класс функций ограниченной Λ -вариации (ΛBV) не вложен в класс HBV , он содержит функции, ряд Фурье которых расходится.

В данной работе приводится оценка коэффициентов Фурье функций из класса ΛBV . Мы докажем аналог теоремы Дирихле для функций из HBV , не прибегая к признаку Лебега, а также покажем, что частичные суммы рядов Фурье функций из класса HBV равномерно ограничены. Из этого можно заключить, что классы L и HBV являются дополнительными, то есть справедливо равенство Парсеваля (с обычной сходимостью) для $f \in L$ и $g \in HBV$. Мы увидим, что L и ΛBV не являются дополнительными, если ΛBV не является подклассом HBV .

Пусть функция f задана на отрезке $[a, b]$, $\Lambda = \{\lambda_n\}$ - неубывающая последовательность положительных чисел, такая, что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = +\infty$ и $\{I_n\}$ - последовательность неперекрывающихся промежутков $I_n = [a_n, b_n] \subset [a, b]$. Функция f называется функцией ограниченной Λ -вариации (ΛBV), если для любой последовательности $\{I_n\}$ выполняется $\sum_{n=1}^{\infty} |f(a_n) - f(b_n)| / \lambda_n < +\infty$. Супремум этих сумм называется Λ -вариацией функции f и обозначается $V_{\Lambda}(f; [a, b])$. При $\Lambda = \{n\}$ данный класс называют функциями ограниченной гармонической вариации (HBV).

Положим $[a, b] = [0, 2\pi]$ и функция f имеет период 2π . Классы функций K и K_1 называются дополнительными [3], если для $f \in K$ и $g \in K_1$ выполняется

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f g dx = \frac{1}{2} a_0 a_0' + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k a_k' + b_k b_k'),$$

где a_k, b_k - коэффициенты Фурье функции f и a'_0, b'_k - коэффициенты Фурье функции g . Предполагаем, что ряд справа сходится.

Докажем следующие результаты.

Теорема 1. Если $f \in \Lambda BV$, то коэффициенты Фурье функции f равны $O(\lambda_n / n)$.

Теорема 2. Классы L и HBV – дополнительные. Если класс ΛBV не вложен в класс HBV , то L и ΛBV не являются дополнительными.

Теорема 3. Если $f \in HBV$, то частичные суммы ряда Фурье функции f равномерно ограничены. Ряд сходится всюду и равномерно сходится на любом отрезке, лежащем внутри интервала непрерывности функции.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим коэффициенты b_n . Имеем

$$\begin{aligned} \pi b_n &= \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt dt = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \int_0^{\pi} f\left(\frac{t+k\pi}{n}\right) \sin t dt = \\ &= \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sum_{k=1}^{2n-1} \left[f\left(\frac{t+(k-1)\pi}{n}\right) - f\left(\frac{t+k\pi}{n}\right) \right] \sin t dt, \end{aligned}$$

где $*$ означает суммирование по нечетным индексам. Следовательно,

$$\pi |b_n| \leq \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sum_{k=1}^{2n-1} \left| f\left(\frac{t+(k-1)\pi}{n}\right) - f\left(\frac{t+k\pi}{n}\right) \right| dt = \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{\lambda_k} |\lambda_k| dt.$$

Применяя преобразование Абеля, получим, что это выражение равно $O(\lambda_n / n)$.

Доказательство теоремы 2. Пусть $f \in L$, $g \in HBV$ и $S_n(g, x)$ - n -ная частичная сумма ряда Фурье функции g . Тогда

$$\Delta_n = \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f g dx - \left[\frac{1}{2} a_0 a'_0 + \sum_{k=1}^n (a_k a'_0 + b_k b'_k) \right] \right| = \frac{1}{\pi} \left| \int_0^{2\pi} (g - S_n(g)) f dx \right|.$$

По теореме 3 $S_n(g) \rightarrow g$ всюду и $S_n(g)$ равномерно ограничены. Применяя теорему о мажорируемой сходимости, получим $\Delta_n \rightarrow 0$. Таким образом, классы L и HBV – дополнительные.

Положим теперь, что класс ΛBV не вложен в класс HBV , и покажем, что тогда существуют функции $f_0 \in L$, $g_0 \in \Lambda BV$, такие, что $\left\{ \int_0^{2\pi} f_0 S_n(g_0) dx \right\}$ является расходящейся последовательностью.

Наше предположение эквивалентно существованию невозрастающей последовательности положительных чисел a_n , такой, что ряд $\sum a_n / \lambda_n$ сходится, а $\sum a_n / n$ расходится. Пусть $g_n(x)$ - 2π -периодическая функция, определенная на отрезке $[0, 2\pi]$, равна a_i , при $(2i-2)\pi < \left(n + \frac{1}{2}\right)x < (2i-1)\pi$, $i = 1, \dots, n+1$, и 0 в остальных точках. Очевидно, что $g_n \in \Lambda BV$.

Теперь ΛBV является банаховым пространством с нормой [4]

$$\|g\|_{\Lambda} = |g(0)| + V_{\Lambda}(g; [0, 2\pi]).$$

Имеем

$$V_{\Lambda}(g_n; [0, 2\pi]) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i (1/\lambda_{2i-1} + 1/\lambda_{2i}) \leq 2 \sum_{i=1}^{n+1} a_i / \lambda_i.$$

Следовательно,

$$\|g_n\|_{\Lambda} \leq 2 \sum_{i=1}^{\infty} a_i / \lambda_i = C < \infty$$

для любого n . Теперь

$$\begin{aligned} \sup_x |S_n(g_n, x)| &\geq |S_n(g_n, 0)| = \frac{1}{\pi} \left| \int_0^{2\pi} g_n(t) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{\sin \frac{1}{2}t} dt \right| = \frac{1}{\pi} \left| \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{n + \frac{1}{2}} \int_0^{\pi} g_n\left(\frac{t+k\pi}{n + \frac{1}{2}}\right) \frac{\sin t}{\sin(t+k\pi)/(2n+1)} dt \right| \geq \\ &\geq \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{n+1} a_i \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t + (2i-2)\pi} dt \geq \frac{4}{\pi^2} \sum_{i=1}^{n+1} a_i / (2i-1) > \frac{2}{\pi^2} \sum_{i=1}^{n+1} a_i / i, \end{aligned}$$

подразумевая, что $\sup_x |S_n(g_n, x)| \neq O(1)$.

Пусть $P_n(f)$ - непрерывный линейный функционал на L , заданный как

$$P_n(f) = \int_0^{2\pi} f S_n(g_n) dx.$$

Тогда

$$\|P_n\| = \sup_x |S_n(g_n, x)| \neq O(1),$$

подразумевая, что существует $f_0 \in L$, такая, что

$$P_n(f_0) \neq O(1)$$

Пусть $Q_n(g)$ - непрерывный линейный функционал на ΛBV , заданный как

$$Q_n(g) = \int_0^{2\pi} f_0 S_n(g) dx.$$

Тогда

$$\|Q_n\| \geq |Q_n(g_n)| / \|g_n\|_{\Lambda} \geq |P_n(f_0)| / C \neq O(1).$$

Следовательно, существует g_0 в ΛBV , такая, что $Q_n(g_0) \neq O(1)$, что означает $\left\{ \int_0^{2\pi} f_0 S_n(g_0) dx \right\}$ расходится.

Доказательство теоремы 3. Положим $f \in HBV$. Если $S_n(x)$ - n -ная частичная сумма ряда Фурье функции f , то для любого $\delta > 0$,

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} (f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)) \frac{\sin nt}{t} dt + o(1)$$

равномерно по x . Так как $f(x+0)$ и $f(x-0)$ существуют в каждой точке, положим $f(x) = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ для любого x . Следовательно, предыдущий интеграл можно переписать следующим образом

$$\int_0^\delta (f(x+t) - f(x+0)) \frac{\sin nt}{t} dt + \int_0^\delta (f(x-t) - f(x-0)) \frac{\sin nt}{t} dt.$$

Рассмотрим первое слагаемое, второе можно рассмотреть аналогичным образом. Обозначим $h(t) = f(x+t) - f(x+0)$. Заметим, что

$$\left| \int_0^{\pi/n} h(t) \frac{\sin nt}{t} dt \right| < \pi \sup_{0 < t < \pi/n} |h(t)| = o(1)$$

для любого x равномерно на замкнутых интервалах точек непрерывности. Это выражение также равномерно ограничено. Далее

$$\int_{\pi/n}^\delta h(t) \frac{\sin nt}{t} dt = \sum_1^N \int_{k\pi/n}^{(k+1)\pi/n} h(t) \frac{\sin nt}{t} dt + \int_{(N+1)\pi/n}^\delta h(t) \frac{\sin nt}{t} dt = I_1 + I_2,$$

где $N+1 = [n\delta/\pi]$. Очевидно, $I_2 = o(1)$ равномерно по x

$$I_1 = \int_0^\pi \sum_1^N h\left(\frac{t+k\pi}{n}\right) (-1)^k \frac{\sin t}{t+k\pi} dt.$$

При четном N абсолютная величина подынтегрального выражения ограничивается выражением:

$$\left| \sum_1^{N-1} \left[h\left(\frac{t+k\pi}{n}\right) \frac{1}{t+k\pi} - h\left(\frac{t+(k+1)\pi}{n}\right) \frac{1}{t+(k+1)\pi} \right] \right|,$$

где * означает суммирование по нечетным индексам. Если N — нечетно, то

$$\int_{N\pi/n}^{(N+1)\pi/n} h(t) \frac{\sin nt}{t} dt = o(1)$$

так же, как и I_2 , удалив этот член, сведем к задаче, в которой сумма имеет четное число членов. Поэтому положим, что N — четное. Общий член рассматриваемой суммы равен

$$\left[h\left(\frac{t+k\pi}{n}\right) - h\left(\frac{t+(k+1)\pi}{n}\right) \right] \frac{1}{t+k\pi} - h\left(\frac{t+(k+1)\pi}{n}\right) \left[\frac{1}{t+k\pi} - \frac{1}{t+(k+1)\pi} \right].$$

Учитывая, что $\varepsilon > 0$ и выбирая N_0 так, чтобы $\sum_{N_0+1}^\infty 1/k^2 < \varepsilon$, имеем

$$\left| \sum_1^{N-1} h \left(\frac{t + (k+1)\pi}{n} \right) \left[\frac{1}{t + k\pi} - \frac{1}{t + (k+1)\pi} \right] \right| \leq \sum_1^{N-1} \left| f \left(x + \frac{t + (k+1)\pi}{n} \right) - f(x+0) \right| / k^2 = \sum_1^{N_0} + \sum_{N_0+1}^{N-1}$$

и вторая сумма ограничена числом $2\varepsilon \sup |f(x)|$. Первая сумма ограничена числом

$$\sup_{0 < t < (N_0+2)\pi/n} |f(x+t) - f(x+0)| \cdot \sum_1^{N_0} 1/k^2,$$

который равен $o(1)$ при $n \rightarrow \infty$ для любого x , $o(1)$ равномерно по x в любом замкнутом интервале точек непрерывности, и равномерно ограничена по n и x .

Наконец, имеем

$$\left| \sum_1^{N-1} \left[h \left(\frac{t + k\pi}{n} \right) - h \left(\frac{t + (k+1)\pi}{n} \right) \right] \frac{1}{t + k\pi} \right| \leq \sum_1^{N-1} \left| f \left(x + \frac{t + k\pi}{n} \right) - f \left(x + \frac{t + (k+1)\pi}{n} \right) \right| / k \leq V_H(\bar{f}; [x, x + \delta]),$$

где $\bar{f}(t)$ равна $f(t)$ на $(x, x + \delta]$ и $\bar{f}(t) = f(x+0)$. Теперь

$$V_H(\bar{f}; [x, x + \delta]) < \varepsilon$$

если δ достаточно мало, поскольку $\bar{f}$ непрерывна справа в точке x [4]. Если f непрерывна в каждой точке отрезка I , то мы можем выбрать такое $\delta > 0$, что $V_H(\bar{f}; [x, x + \delta]) < \varepsilon$ для любого $x \in I$. Очевидно, что сумма ограничена числом $V_H(f; [0, 2\pi])$ для любых n и x .

Список использованных источников

1. D. Waterman. On convergence of Fourier series of functions of generalized bounded variation // Studia Math. 44, 1972, С. 107-117.
2. D. Waterman. On the summability of Fourier series of functions of Λ -bounded variation // Studia Math. 55, 1976, С. 87-95.
3. А.Зигмунд. Тригонометрические ряды, Том I.- М.:Мир, 1965, С. 254-255.
4. D. Waterman. On Λ -bounded variation, Studia Math. 57, 1976, С. 33-45.

УДК 517.926

АЛТЫНШЫ РЕТТІ ЖАРТЫЛАЙ СЫЗЫҚТЫ КЕШІКТІРУІ БАР ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУДІҢ ШЕШІМДЕРІНІҢ ТЕРБЕЛІС КРИТЕРИЙЛЕРІ

Қолғанат Ұлжан

ukolganat@mail.ru

Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ 7М01509 – Математика білім беру бағдарламаның 2-курс
магистранты, Астана, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі – Кошкарлова Б.С.

Кіріспе. Бұл жұмыста біз p -Лаплас операторы бар алтыншы ретті жартылай сызықты кешіктіруі бар дифференциалдық теңдеуді қарастырамыз: