bulmathmc.enu.kz

https://doi.org/10.32523/2616-7182

ISSN 2616-7182
eISSN 2663-1326

Л.Н.Гумилев атындағы
Еуразия ұлттық университетінің
ХАБАРШЫСЫ

BULLETIN
of L.N.Gumilyov Eurasian
National University

№2 (127)/2019

ВЕСТНИК
Евразийского национального
университета имени Л.Н.Гумилева

МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРЛІК ҒЫЛЫМДАР. МЕХАНИКА
сериясы

MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS
Series

Серия
МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ. МЕХАНИКА

ISSN 2616-7182
eISSN 2663-1326

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің

ХАБАРШЫСЫ

BULLETIN
of L.N. Gumilyov Eurasian National University

ВЕСТНИК
Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева

МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРЛІК ҒЫЛЫМДАР. МЕХАНИКА сериясы

MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS Series

Серия **МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ. МЕХАНИКА**

№2(127)/2019

1995 жылдан бастап шығады

Founded in 1995

Издается с 1995 года

Жылына 4 рет шығады

Published 4 times a year

Выходит 4 раза в год

Нұр-Сұлтан, 2019
Nur-Sultan, 2019
Нур-Султан, 2019

Редакцияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Нұр-Сұлтан қ., Сәтпаев к-сі, 2, 349 бөлме.
Тел: +7 (7172) 709-500 (ішкі 31-428). E-mail: *vest_math@enu.kz*

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы.
МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРЛІК ҒЫЛЫМДАР. МЕХАНИКА сериясы
Меншіктенуші: ҚР БжҒМ "Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті" ШЖҚ РМК
Мерзімділігі: жылына 4 рет.
Қазақстан Республикасының Ақпарат және коммуникациялар министрлігінде тіркелген.
27.03.2018ж. № 17000-ж тіркеу куәлігі.
Тиражы: 30 дана
Типографияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Нұр-Сұлтан қ., Қажымұқан к-сі ,12/1,
тел: +7 (7172)709-500 (ішкі 31-428).

Editorial address: 2, Satpayev str., of. 349, Nur-Sultan, Kazakhstan, 010008
Tel.: +7 (7172) 709-500 (ext. 31-428)
E-mail: *vest_math@enu.kz*

Responsible Editor-in-Chief: A.Zh. Zhubanysheva

Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University.
MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS Series
Owner: Republican State Enterprise in the capacity of economic conduct "L.N. Gumilyov Eurasian National University" Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan
Periodicity: 4 times a year
Registered by the Ministry of Information and Communication of the Republic of Kazakhstan.
Registration certificate №17000-ж from 27.03.2018.
Circulation: 30 copies
Address of printing house: 12/1 Kazhimukan str., Nur-Sultan, Kazakhstan 010008;
tel: +7 (7172) 709-500 (ext.31-428).

Адрес редакции: 010008, Казахстан, г. Нур-Султан, ул. Сатпаева, 2, каб. 349
Тел: +7 (7172) 709-500 (вн. 31-428). E-mail: *vest_math@enu.kz*

Ответственный редактор: А.Ж. Жубанышева

Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева.
Серия МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ. МЕХАНИКА
Собственник: РГП на ПХВ "Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева" МОН РК
Периодичность: 4 раза в год.
Зарегистрирован Министерством информации и коммуникаций Республики Казахстан.
Регистрационное свидетельство №17000-ж от 27.03.2018г.
Тираж: 30 экземпляров. Адрес типографии: 010008, Казахстан, г. Нур-Султан,
ул. Кажымукана, 12/1, тел.: +7 (7172)709-500 (вн.31-428).

Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТIНIҢ ХАБАРШЫСЫ. МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРЛIК ҒЫЛЫМДАР. МЕХАНИКА СЕРИЯСЫ, №2(127)/2019

МАЗМҰНЫ

BULLETIN OF L.N. GUMILYOV EURASIAN NATIONAL UNIVERSITY. MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS SERIES, №2(127)/2019

CONTENTS

ВЕСТНИК ЕВРАЗИЙСКОГО НАЦИОНАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ Л.Н.ГУМИЛЕВА. СЕРИЯ МАТЕМАТИКА. компьютерные науки. МЕХАНИКА, №2(122)/2019

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА-КОМПЬЮТЕРЛІК ҒЫЛЫМДАР
MATHEMATICS-COMPUTER SCIENCE
МАТЕМАТИКА-КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Математика. Компьютерлік ғылымдар. Механика сериясы, 2019, том 127, №2, 8-26 беттер
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

МРНТИ: **27.23.23**

Н. Темиргалиев

Институт теоретической математики и научных вычислений,
Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
(E-mail: ntmath10@mail.ru)

Преобразования и абсолютная сходимость тригонометрических рядов Фурье

Аннотация: В статье рассматриваются проблемы теории суммируемости и абсолютной сходимости тригонометрических рядов Фурье с постановками задач, включая принадлежащие П.Л. Ульянову, в контексте дальнейшего развития этих направлений исследований.

Ключевые слова: пространство Орлича, преобразования рядов Фурье, абсолютная сходимость, предельный случай.

DOI: https://doi.org/10.32523/2616-7182/2019-127-8-26

§1. Введение

1. Еще раз о числовых рядах. Ныне общепринятое «*Ряд есть предел*» даже тогда, а это 1821 год, когда были произнесены эти правильные слова, нуждалось в подробном наполнении [1, стр. 170-171]:

«После смерти Эйлера в 1783 г. в математике наступил период застоя. Чего только не сделал Эйлер: создал непревзойденное изложение исчисления бесконечно малых и дифференциального исчисления (Эйлер 1748, 1755), взял берущиеся интегралы, решил решаемые дифференциальные уравнения (Эйлер 1768, 1769), раскрыл загадки жидкостей (Эйлер 1755), механики (Эйлер 1736, Лагранж 1788), вариационного исчисления (Эйлер 1744), алгебры (Эйлер 1770). Казалось, что единственное, что следует делать — это изучать 30000 страниц работ Эйлера.

. . . .

В 1821 г. Коши вводит новые требования к строгости в своем знаменитом "Курсе анализа". Он ставит следующие вопросы и отвечает на них.

- *Что такое производная? Ответ: предел.*
- *Что такое интеграл? Ответ: предел.*
- *Что такое бесконечный ряд* $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ *? Ответ: предел.*

Отсюда следует вопрос:

- *Что такое предел? Ответ: число.*

И, наконец, последний вопрос:

- *Что такое число?*

Около 1870-1872 гг. Вейерштрасс и его соратники (Гейне, Кантор), а также Мере, ответили на этот вопрос. Они также исправили много неточностей в доказательстве Коши, прояснив понятия равномерной сходимости, равномерной непрерывности, а также почленного интегрирования и дифференцирования бесконечных рядов».

В процитированном выше замечательном историческом исследовании [1] нижеследующий текст со стр. 192

"Пример. Согласно критерию Лейбница, ряд

$$(2.10) \qquad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$$

сходиться (к $ln2$). Если мы перегруппируем ряд следующим образом

$$(*) \qquad \underbrace{1-\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}+\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}_{\frac{1}{6}}-\frac{1}{8}+\underbrace{\frac{1}{5}-\frac{1}{10}}_{1/10}-\frac{1}{12}+\underbrace{\frac{1}{7}-\frac{1}{14}}_{1/14}-\frac{1}{16}+\cdots$$

мы получим ряд

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\cdots=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots\right),$$

сумма которого вдвое меньше, чем у первоначаленого. Это показывает, что значение суммы бесконечного ряда может зависеть от порядка суммирования.

(2.7) Определение. *Ряд $\sum_{i=0}^{\infty} a_i'$ называется перегруппировкой ряда $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$, если каждой член $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ появиться в $\sum_{i=0}^{\infty} a_i'$ ровно один раз, и наоборот (это значит, что существует биекция $\sigma : N_0 \to N_0$, такая, что $a_i' = a_{\sigma(i)}$; здесь $N_0 = \{0, 1, 2.3, 4, .., \}$ ").*
противоречив в том смысле, что ряд (*) не есть перегруппировка численного ряда (2.10) в смысле определения (2.7).

В связи с чем (да и по многим причинам внутреннего характера), уточним определение числового ряда – основного объекта данной статьи (например, в исполнении из [2, стр.301-302]).

«1. Числовой ряд и его сходимость. Пусть задана числовая последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Символическая запись (символ)

$$a_1 + ... + a_n + ... \tag{1.1}$$

называется *числовым рядом.* Здесь действительное число a_n из ряда (1.1) называется *"членом ряда* (1.1) *с номером* n *"* или *"n -ным членом"*, а число S_n , равное сумме первых n членов ряда, т.е. определяемое из равенства $S_n = a_1 + \cdots + a_n$, называют *"частичной суммой ряда* (1.1) *номера* n *"* или *"n - ной частичной суммой"*. Иногда, полагая, что n – *любое* целое положительное число, запись a_n называют *общим членом* ряда (1.1).

Если определенная по (1.1) числовая последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет конечный предел (который обозначим через S, тем самым $S := \lim\limits_{n\to\infty} S_n$), то говорят, что ряд (1.1) *сходится,* число S называют *суммой* ряда, и все это записывается в виде $S = a_1 + ... + a_n + ...$. В таком случае говорят, что «*ряд* (1.1) *сходится к сумме* S ».

В каждом из остальных случаев, то есть если предел последовательности $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, бесконечен, тем самым равен $+\infty, -\infty, \infty$ или же вовсе не существует, то ряд (1.1), по определению, *не сходится* или же (1.1) есть *расходящийся ряд* (при этом, в случае бесконечного $S := \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ также говорят «*Ряд расходится к бесконечности*»).

Теперь уточним и обсудим мотивы принятия и предупредим опасности в неверном понимании сформулированных определений:

1^0. Используемый в обозначении (1.1) знак сложения "+" может быть причиной следующего несуществующего понятия «*Сумма бесконечного количества слагаемых*» как естественного продолжения сумм из 2-х чисел, 3-х чисел, и, вообще, из любых n чисел. Поэтому нужно полностью понять и навсегда запомнить: понятие суммы действительных чисел определено только для конечного множества слагаемых – имеет смысл сумма чисел a_1 и a_2 обозначаемое $a_1 + a_2$, при любом целом положительном n сумма действительных чисел $a_1 , \ldots , a_n$ обозначаемое $a_1 + \cdots + a_n$, но для бесконечной последовательности действительных чисел $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ их сумма составляет случай, когда слагаемых бесконечно много, и только по одному этому факту не определена.

Для этого нового случая, чтобы придать «бесконечной» сумме смысл с числовым значением, нужно использовать понятие предела числовой последовательности. Все эти идеи исполнены в приведенных выше определениях: по (1.1) составляется бесконечная последовательность чисел $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \dots, S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \dots$, и если эта последовательность имеет конечный (действительный) предел, этот предел называют суммой бесконечного количества слагаемых (1.1). Таким образом, понятие суммы бесконечного (счетного) количества слагаемых (ряда) задается через предел.

2^0. Понятие суммы ряда дается через последовательность частичных сумм, то есть по каждому ряду выписывается числовая последовательность. И это обоюдно: для каждой данной числовой последовательности $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ можно составить ряд, частичные суммы которого составляют именно эту последовательность. Таковым является ряд $a_1 + ... + a_n + ...$ с членами $a_1 = S_1$, а для каждого целого $n > 1$ равным $a_n = S_n - S_{n-1}$. Действительно, $a_1 = S_1, a_1 + a_2 = S_1 + (S_2 - S_1) = S_2, \dots, a_1 + a_2 + \cdots + a_n = S_1 + (S_2 - S_1) + (S_{n-1} - S_{n-2}) + (S_n - S_{n-1}) = S_n$. Таким образом, ряд это специальный вид записи числовой последовательности. В итоге, пришли к такому выводу: каждое утверждение для ряда можно записать на языке последовательностей, и, наоборот, каждое утверждение на языке последовательностей можно записать на языке рядов.

3^0. Ряд полностью определяется (задается) каждым своим членом: чтобы знать ряд, надо знать первый, второй,..., n-ный, то есть знать *каждый член* этого ряда. Важность этого утверждения заключается в следующем: сходимость или расходимость ряда зависит от сходимости или расходимости последовательности, образованной из его частичных сумм, а значения частичных сумм полностью зависят как от *значений* членов ряда, так и их *порядка* в записи этого ряда.

4^0. Многократно использованное выше слово *бесконечное* множество в применении к числовому ряду означает *счетное* множество (как наименьшее бесконечное множество, содержащееся в любом бесконечном множестве), которое моментально следует из того обстоятельства, что все члены ряда $a_1, \dots, a_n, \dots$ пронумерованы своими нижними индексами $1,\ 2, \dots, n, \dots$. «*Сумма*» значений функции $f(x)$, заданной на «*несчетном*» отрезке $[a, b]$ оформляется в виде интеграла $\int_a^b f(x)\, dx$.

По тем же соображениям, следуя совету И.М.Виноградова (переписано из Стенной газеты Математического института им. В.А.Стеклова АН СССР):

«Надо пытаться решать важные задачи, не считаясь с их трудностью. Их решения навсегда войдут в историю науки и принесут людям большую пользу. Так поступали наши великие предшественники. Не следует увлекаться решением легких и малонужных задач только потому, что они не требуют больших усилий. Учёные, которые это делают, могут увлечь на тот же неправильный путь и своих учеников. Выбрав достойную тему, следует наметить план работы и не оставлять его, пока теплится хоть малейшая надежда на успех.

Важно знать работы классиков – содержащиеся в них идеи могут оказать решающее действие на успех собственный»,

позволим себе обширное цитирование Г.Харди и С.Б.Стечкина [3], лейтмотивом которого является «*Это сейчас тривиально: современному математику и не придет в голову, что какое-либо соединение математических символов может иметь "смысл" до того, как ему придан смысл с помощью определения. Но это не было тривиальностью даже для наиболее выдающихся математиков восемнадцатого века. Определения не были в их обычае; для них не было естественно говорить: "под X мы понимаем У". С некоторыми оговорками, в общем, верно будет сказать, что математики до Коши спрашивали не "как определить* $1 - 1 + 1 - \cdots$ *?", а что есть* $1 - 1 + 1 - \cdots$ *?"; и этот склад мышления приводил их к не нужным затруднениям и спорам, зачастую, по существу, чисто словесного характера*».

2. Долгий путь к правильной постановке задачи *приписания* «суммы» к несходящимся числовым рядам. Понятно – это будет подборка цитат.

В Предисловии Редактора перевода книги Годфри Харди «Расходящиеся ряды» С.Б.Стечкин пишет:

«Пожалуй, ни одна математическая дисциплина не нуждается так в обзорной монографии, как теория суммирования расходящихся рядов. Посвященная ей журнальная

литература непрерывно увеличивается и почти необозрима. Некоторые теоремы до того обросли обобщениями, вариантами и аналогами, что во всем этом лесу трудно ориентироваться без хорошего путеводителя».

Разумеется, эта история развития теории суммирования числовых рядов весьма полезна для понимания как, в узком смысле, аналитического аппарата числовых рядов, так и, в широком смысле, формирования структуры самой математики.

На самом деле, на отдельном примере теории суммируемости описана общая траектория создания и развития «*математической дисциплины*»: сначала возникает идея, затем на ее основе формулируется постановка задачи со всеми сопутствующими определениями, ценность которой передают (или показывают ее несостоятельность) их решения в форме теорем в качественных показателях от информативности до красоты формулировок, которые затем, в контексте Колмогоровского «Нас много» (в смысле "много" нуждающихся в публикациях), «*обрастают обобщениями, вариантами и аналогами*» в «*непрерывно увеличивающейся вплоть до необозримости журнальной литературе*» (яркой иллюстрацией чего является критерий вложения $H_p^\omega(0,1) \subset L^\nu(0,1) \iff \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{\nu}{p}-2}\omega^\nu\left(\frac{1}{n}\right) < \infty \quad (1 \le p < \nu < \infty)$ П.Л.Ульянова как новое окончательное завершение разработанных задач с продолжениями в большом количестве журнальных статей, тем не менее с безответными до сих пор естественными вопросами, с особенностью, когда основатель направления от нее сам сразу же и отошел (подробности см.в [4])).

С.Б.Стечкин продолжает:

«*Сделаем теперь несколько замечаний по поводу истории возникновения и развития теории суммирования расходящихся рядов. Основоположником теории суммирования рядов является Леонард Эйлер. Многие математики XVII и XVIII веков (Лейбниц, Бернулли, Даламбер, Лагранж и др.) долго и безуспешно спорили о том, чему равна сумма расходящегося ряда. Эйлер первый понял, что задача поставлена не правильно и что нужно спрашивать: как определить сумму расходящегося ряда? Он пишет: «И вот я говорю, что вся трудность кроется в названии "сумма". Действительно, если под "суммой" ряда понимать, как это обычно делается, результат сложения всех его членов, то нет никакого сомнения, что суммы можно получить только для тех бесконечных рядов, которые являются сходящимися и дают результаты, тем более близкие к некоторому определенному значению, чем больше членов складывается. Расходящиеся же ряды, члены которых не убывают..., вообще не будут иметь никаких определенных сумм, если только слово "сумма" понимается в смысле результата сложения всех членов.*

Этих затруднений и кажущихся противоречий мы совершенно избежим, если мы припишем слову „сумма" значение, отличное от обычного. А именно, мы скажем, что сумма некоторого бесконечного ряда есть конечное выражение, из разложения которого возникает этот ряд... При этом соглашении, если ряд будет сходящимся, то новое определение слова „сумма" совпадает с обычным, а так как расходящиеся ряды не имеют никакой суммы в собственном смысле слова, то из этого нового определения не проистечет никаких неудобств. Приняв это определение, мы сможем сохранить выгоды пользования расходящимися рядами и в то же время защититься от всяческих обвинений» (Л. Эйлер, Дифференциальное исчисление, ГИТТЛ, М.-Л., 1949, стр. 101).

Как видно из этой цитаты, точка зрения Эйлера на расходящиеся ряды вполне современна: расходящиеся ряды не имеют суммы в обычном смысле этого слова, однако возможно дать новое определение суммы ряда (мы бы сказали: определение метода суммирования рядов), применимое как ко всем сходящимся рядам, так и к некоторым расходящимся рядам; при этом от определения нужно потребовать, чтобы для сходящихся рядов новая сумма совпадала с обычной (мы бы сказали: метод должен быть регулярным). Что же касается конкретного определения Эйлера "сумма некоторого бесконечного ряда есть конечное выражение, из разложения которого возникает этот ряд", то оно еще недостаточно четко и легко могло привести к противоречиям.

Эти высказывания Эйлера долгое время не были правильно поняты и способствовали некритическому допущению в анализ расходящихся рядов и основанных на них рассуждений. Достаточно отметить, что в большом трактате Лакруа по дифференциальному и интегральному исчислению (начало XIX века) вовсе не фигурирует понятие сходимости ряда и не излагаются известные к тому времени признаки сходимости (признак Лейбница, признак Даламбера и признак, который теперь часто называют интегральным признаком Коши). После произведенного в первой половине XIX века критического пересмотра основ анализа расходящиеся ряды были почти полностью изгнаны из математики. Однако они все же встречаются как у Коши, так и в более позднее время, например у Лагерра.

Современная теория суммирования расходящихся рядов начала бурно развиваться в конце XIX-начале XX века. Этому значительно способствовало то обстоятельство, что выявились связи этой теории с другими математическими дисциплинами. Так, Чезаро (1880) ввел свои методы суммирования в связи с рассмотрением задачи о перемножении рядов; Борель (1895-1901) изучал "метод Бореля" в связи с исследованием аналитического продолжения функций; наконец, Л. Фейер (1904) показал, какую пользу может принести теория суммирования рядов теории рядов Фурье. Этот период в основном завершился выходом в свет первой обзорной монографии Бореля (1901), посвященной расходящимся рядам. После этого теория расходящихся рядов стала доступной для широкого круга математиков, и ее развитие больше не останавливалось ».

Теперь обратимся к Годфри Харди:

«*Определения сходимости и расходимости относятся теперь к элементам анализа. Суть этих понятий была известна математикам и до Ньютона и Лейбница (фактически уже Архимеду); и все выдающиеся математики семнадцатого и восемнадцатого веков, как бы беззаботно ни обращались они с рядами, достаточно хорошо знали, сходятся ли употребляемые ими ряды. Но лишь с эпохи Коши определения сходимости и расходимости стали формулировать явно и в общем виде.*

Ньютон и Лейбниц – первые математики, систематически пользовавшиеся бесконечными рядами, не имели достаточных побуждений к употреблению расходящихся рядов (хотя Лейбниц изредка касался их). Такие побуждения стали умножаться с расширением анализа, и вскоре обнаружилось, что расходящиеся ряды полезны и что некритически выполняемые над ними действия часто приводят к важным результатам, справедливость которых может быть затем проверена независимым путем».

Далее, Харди пишет:

«*Важные примеры применения расходящихся рядов даны Эйлером и другими ранними аналитиками. Предпошлем этим примерам несколько разрозненных замечаний.*

(1) Наиболее ранние аналитики были, в целом, довольно строгими "ортодоксами": их работа проводилась в арифметическом духе древних греков. Работам Кавальери, Валлиса, Броункера, Грегори (впервые употребившего слово "сходится") и Меркатора не хватало не строгости, а техники. В частности, им мешало отсутствие удобных признаков сходимости. Среди аналитиков Ньютон первый был мастером действительно мощной техники: он рассматривал бесконечные ряды прежде всего как средство выполнения квадратур, и ему предстояло в этой области сделать столько, что потеря ортодоксальности была достаточно возмещена.

(2) До Эйлера расходящиеся ряды встречаются мало, за исключением некоторых мест в переписке между Лейбницем и братьями Бернулли; эти места оставляют впечатление, что Лейбниц упустил блестящую возможность. Он был на пути по крайней мере к одному из принятых теперь определений, но уступил искушению приправить обсуждение вопроса метафизикой. Сумма ряда $1 - 1 + 1 - \cdots$ *должна равняться* $\frac{1}{2}$ *на основании «вероятности»: «Этот способ аргументации, хотя и кажется более метафизическим, чем математическим, всё же надежен; впрочем, правила истинной метафизики гораздо более употребительны в точных науках, в анализе, даже в геометрии, чем обычно считают». Такие речи столь выдающегося математика запутывали людей более слабого интеллекта.*

Даже Эйлер апеллировал к метафизике, когда не умел придумать ничего лучшего: «по метафизическим основаниям..., которыми спокойно можно пользоваться в анализе».

(5) Математика после Эйлера медленно, но непрерывно развивалась по направлению к ортодоксальности (от греч. orthodo-xos – правоверный, склонность твердо придерживаться определенных убеждений, строго соблюдать правила и линию действий), наконец наложенной на нее Коши, Абелем и их последователями, и расходящиеся ряды были постепенно изгнаны из анализа и вновь появились там лишь в самый последний период. Они всегда имели противников, как Даламбер, который говорил «Что касается меня, то признаюсь, что все рассуждения и вычисления, основанные на несходящихся рядах... всегда кажутся мне весьма подозрительными, даже тогда, когда результаты этих рассуждений согласуются с истинами, известными из других источников» и Лаплас «К иллюзиям я причисляю также применение теории вероятностей (к суммированию таких рядов, как $1- 1 + 1-\cdots$), сделанное Лейбницем и Даниилом Бернулли» и (в его последние годы) Лагранж; после Коши оппозиция, казалось, одержала полную победу. Аналитиками, больше всего, после Эйлера, применявшими расходящиеся ряды, были Фурье и Пуассон (последний- почти современник Коши).

И завершим цитирование Харди его словами о сложности пути познания:

«Задолго до того, как труды выдающихся континентальных аналитиков были поняты в Англии, работы британских математиков, ...обнаруживают своеобразное и часто забавное смешение тонкости в отдельных частностях с некомпетентностью в основных вопросах».

§2. Задачи П.Л. Ульянова по преобразованиям коэффициентов Фурье

1.Задачи П. Л. Ульянова по преобразованиям коэффициентов тригонометрических рядов Фурье. Эти задачи сформулированы по содержанию бесед с П.Л. Ульяновым и, насколько известно, им нигде не публиковались.

Начнем с общей постановки (сразу же сообщим, что определения привлекаемых классов функций даны в [4–6]).

Пусть даны классы F_1 и F_2, составленные из 2π-периодических суммируемых функций, и пусть для каждого n $(n=0,1,...)$ дано отображение $T_n=T_n(a_0,...,a_n,\dots)$: $R^\infty \mapsto R^1$.

Задача состоит в выяснении условий на классы F_1, F_2 и на последовательность $T\equiv \{T_n\}$, при которых для каждой функции $f\left(x\right)\in F_1$ с рядом Фурье-Лебега $f\left(x\right)\sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ соответствующий тригонометрический ряд $\frac{T_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}T_n\cos nx$ есть ряд Фурье-Лебега некоторой функции Tf из класса F_2.

Требования к выполнению тех или иных свойств к исходным и преобразованным рядам Фурье проводит к дальнейшим разнообразным содержательным задачам.

Одним из способов задания T_n является матричный способ, когда

$$T=\{c_{nk}\}_{k,n=0}^{\infty}, T_n=\sum_{k=0}^{\infty}c_{nk}a_k. \tag{2.1}$$

Примеры: преобразования Харди и Беллмана коэффициентов рядов Фурье. Для 2π-периодической суммируемой функции $f(x)$ (в обозначении $f\in L(0,2\pi)$) положим

$$a_n=a_n\left(f\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\cos nxdx\ (n=0,1,2,...) \text{ и } b_n=b_n\left(f\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\sin nxdx\ (n=1,2,...).$$

Харди [7] доказал, что если ряд ($1\le p<+\infty$)

$$f\left(x\right)\sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$$

есть ряд Фурье- Лебега функции $f\in L^p(0,2\pi)$, то тригонометрический ряд

$$\frac{T_0}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}T_n\cos nx, T_n\equiv H_n:=\frac{a_0+...+a_n}{n+1} \tag{2.2}$$

есть также ряд Фурье-Лебега некоторой функции из $L^p(0,2\pi)$, более того (что есть дополнительное свойство) выполнены неравенства

$$\left\|\frac{H_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}H_n\cos nx\right\|_{L^p}\leq c(p)\left\|\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx\right\|_{L^p}.$$

Р. Беллман [8] перенес результат Харди на случай

$$T_n=B_n:=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{a_k}{k} \tag{2.3}$$

но уже при $1<p<+\infty$.

Аналогичные результаты верны и для преобразований синус-рядов, с заменой косинус-коэффициентов Фурье a_n на синус-коэффициенты b_n.

Заметим, что преобразования (2.2) и (2.3) выполнены по матрицам $c_{nk}=\frac{1}{n+1}$ при $0\leq k\leq n$, $c_{nk}=0$ при $k>n$ и $c_{nk}=0$ при $0\leq k\leq n-1, c_{nk}=\frac{1}{k}$ при $n\leq k<\infty$ соответственно, и тем вписываются в схему (2.1), представляя матрицы метода средних арифметических и транспонированную к ней(соответствующие преобразования рядов обозначим через T_H и T_B).

Конкретизируя F_1 и F_2, в сформулированной выше общей постановке получаем большое количество различных самостоятельных задач (см., напр., [9, с. 243-245]). Вот некоторые из разработанных:

1^0. Условия на T при заданных F_1 и F_2 – такая задача в случае, когда $F_1=F_2=L^p$, а T - есть матрица (2.1), изучена Юнгом [10],

2^0. Условия на F_1 и F_2 при фиксированном T, в частности, нахождение условий на модуль непрерывности $\omega(\delta)$ при которых из $f\in H_p^\omega$ следовало бы $Tf\in H_p^\omega$ (при $\omega(\delta)=\delta^\alpha,\ p=+\infty,\ T$ равном $\mathbf{T}_H$ и $\mathbf{T}_B$ – эта задача решена в [11]).

3^0. Получение аналога теорем Харди и Беллмана для тех или иных множеств функций было предметом исследований ряда математиков (см., например, [12–14]). Так, М.Идзуми и С. Идзуми [14] в 1968 г. рассмотрели этот вопрос для класса $\mathcal{A}^p$, состоящего из четных и интегрируемых функций $f(t)$, со средним значением нуль на периоде, удовлетворяющих условию

$$\int_0^{\pi}|f(t)|\,t^{-1/q}dt<\infty\ \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right).$$

4^0 Изучается случай $T_n=\lambda_n$ (см. [15, 16]).

Теперь обратимся к задачам П.Л. Ульянова, чему предпошлем нижеследующие определения.

Пусть $\Phi-$ совокупность четных, конечных, неубывающих и непрерывных на полупрямой $[0,\infty)$ функций, таких что $\varphi(0)=0,\varphi(t)>0$ при $t>0$ и $\lim\limits_{t\to+\infty}\varphi(t)=\varphi(\infty)=\infty$. Через $\varphi(L)$ будем обозначать множество всех тех измеримых на отрезке $[0,1]$ функций $f(x),$ для которых $\int_0^1\varphi(f(x))dx<\infty$ (см. [5]).

Если $\varphi(t)$ удовлетворяет Δ_2- условию (т.е. $\varphi(2t)=O\left\{\varphi(t)\right\},t\to\infty$), то класс $\varphi(L)$ линеен. В общем же случае класс $\varphi(L)$ нелинеен, но его можно пополнить по линейности. Тогда получим линейное множество $\varphi^*(L),$ снабженное квазинормой

$$\|f\|_\varphi=inf\left\{\epsilon>0:\int\limits_0^1\varphi\left(\frac{f(x)}{\epsilon}\right)dx<\epsilon\right\},f\in\varphi^*(L).$$

Сами задачи П.Л.Ульянова следующие:

1) Дано T, для каких функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ выполнено: из $f\in\varphi(L)$ следует $Tf\in\psi^*(L)$.

2) Даны T, модули непрерывности $\omega(t)$ и $\eta(t)$, числа $1\leq p<q\leq\infty\,(L^\infty\equiv C)$. При каких неулучшаемых связях между всеми этими параметрами из $f\in H_p^\omega$ следует $Tf\in H_q^\eta$.

3) Дано T (начать с T_H и T_B). Найти наибольшее $0 \leq \alpha \leq 1$ такое,что из $f \in Lip\,1$ всегда следует $Tf \in Lip\alpha$.

4) Особый вопрос: всегда ли для $f \in F$ ряды $\frac{a_0(f)}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(f)\cos nx$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(f)\sin nx$ ведут себя одинаково?

2. Примеры решений задач П.Л.Ульянова - теоремы Есентай Алшынбаевой. Для формулировки постановок задач и результатов потребуются классы и пространства Орлича.

Пусть на $[0,+\infty)$ задана непрерывная справа неубывающая функция $p(t)$, такая что

$$0 = p(0) < p(t), p(t) \to +\infty (t \to +\infty),$$

тогда теми же свойствами обладает и обратная (с поправками в виде постоянной в точках скачков исходной функции) к ней функция $(0 \leq s < \infty)$

$$q(s) := sup\left\{t : p(t) \leq s\right\}.$$

Следующие функции, определенные на $(-\infty, +\infty)$ равенствами

$$M(u) := \int\limits_0^{|u|} p(t)dt \;\text{ и }\; N(\nu) := \int\limits_0^{|\nu|} q(s)ds$$

называют дополнительными друг к другу $N-$ функциями.

Для заданной N-функции $M(u)$ *классом Орлича* $L_M(0,2\pi) \equiv L_M$ называют множество, составленное из всех измеримых 2π-периодических функций $f(x)$, для каждой из которых конечен интеграл

$$\int\limits_0^{2\pi} M(f(x))dx,$$

а *пространством Орлича* $L_M^*(0,2\pi) \equiv L_M^* -$ множество всех таких же функций $f(x)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{L_M^*(0,2\pi)} = sup\left\{\int\limits_0^{2\pi} f(x)g(x)dx : g(x) \in L_N(0,2\pi), \int\limits_0^{2\pi} N(g(x))dx \leq 1\right\}.$$

Если $M(u)$ и $N(\nu)$ – взаимно дополнительные N-функции, то классы L_M и L_N и пространства L_M^* и L_N^* называют взаимно дополнительными классами и пространствами Орлича соответственно.

Отметим, что Лебеговы (взаимно сопряженные) пространства $L^p(0,2\pi)$ и $L^q(0,2\pi)$ $(1 < p < \infty)$ при $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ с точностью до постоянного множителя попадают под определения L_M^* и L_N^* при $p(t) = t^{\theta - 1}$ и $q(s) = s^{\frac{1}{\theta-1}} = s^{\theta'-1}$, образуя взаимно дополнительные пространства Орлича при $M_\theta(u) = \frac{|u|^\theta}{\theta}$ и $N_{\theta'}(\nu) = \frac{|\nu|^{\theta'}}{\theta'} (\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta'} = 1)$ для пар $\theta = p,\;\; \theta' = q$ и $\theta = q, \theta' = p$ с нормами

$$\|f\|_{M_\theta} = \left(\theta'\right)^{\frac{1}{\theta'}} \|f\|_{L^\theta(0,2\pi)}.$$

П.Л.Ульяновым была поставлена задача о нахождении необходимых и достаточных условий на функцию $\mathbf{M}(u)$, чтобы пространство $\mathbf{L}_M^*$ было инвариантным относительно преобразований $\mathbf{T}_H$ и $\mathbf{T}_B$.

В следующих двух теоремах содержится ответ на этот вопрос.

Теорема 1 (Е.Алшынбаева [17, 18]). *Пусть дана* N *-функция* $M(u)$ *. Тогда для того чтобы для каждой функции* $f(x) \in L_M^*$ *преобразованный ряд*

$$\frac{H_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} H_n \cos nx$$

принадлежал L_M^* *, необходимо и достаточно, чтобы функция* $M(u)$ *удовлетворяла* $\triangle_2$ *-условию.*

Теорема 2 (Е.Алшынбаева [17, 18]). *Пусть дана* N *-функция* $M(u)$ *. Тогда для того чтобы для каждой функции* $f(x) \in L_M^*$ *преобразованный ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos nx$$

принадлежал L_M^* *, достаточно, чтобы функция* $N(u)$ *, дополнительная к* $M(u)$ *, удовлетворяла* $\triangle_2$ *-условию; это условие является также и необходимым, если только и* $lnu \leq cM(u)$ *при некоторой постоянной* $c > 0$ *и всех* $u \geq u_0 > 0$.

Отметим, что приведенные выше теоремы Харди и Беллмана содержатся соответственно в теоремах 1 и 2.

Теорема 3 (Е.Алшынбаева [17, 18]). *Пусть* $\varphi(u)$ *— неотрицательная неубывающая функция, определенная на* $[1, +\infty)$ *и удовлетворяющая условию*

$$\int_u^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt = O\left(\frac{\varphi(u)}{u}\right), \quad u \to \infty.$$

Пусть суммируемая на $(0,\ \pi)$ *функция* $f(x)$ *удовлетворяет условию*

$$\int_0^{\pi} |f| \varphi\left(\frac{1}{t}\right) dt < \infty.$$

Тогда ряд

$$\frac{H_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} H_n \cos nx \tag{2.4}$$

является рядом Фурье некоторой функции $F(x)$ *из* $L\varphi(L)$.

Из этой теоремы при $\varphi(t) = lnt$ вытекает

Следствие. *Если* $|f| \, ln\frac{1}{|x|} \in L$ *, то* $F(x) \in Lln^+L$ *, т.е. все преобразованные ряды Фурье функций из класса* $\left\{f : |f| \, ln\frac{1}{|x|} \in L\right\}$ *лежат в лучшем классе* Lln^+L *в том смысле, что имеет место строгое включение*

$$Lln^+L \subset \left\{f : |f(x)| \, ln\frac{1}{|x|} \in L\right\}.$$

Рассмотрим функциональные классы $\mathrm{A}^{(M)}$, являющиеся обобщением классов $\mathcal{A}^p$. Пусть дана N-функция $M(u)$. Тогда $\mathrm{A}^{(M)}$ определяется как множество всех тех суммируемых на $(0,\ \pi)$ функций $f(x)$, для каждой из которых выполнено неравенство

$$\int_0^{\pi} |f(x)| \, N^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) dx < \infty$$

где $N(u)$ – дополнительная, а $N^{-1}(u)$ – обратная к $N(u)$ функции.

Тогда справедлива

Теорема 4 (Е.Алшынбаева [17, 18].) *Если* $f(x) \in A^{(M)}$ *, где* $M(u)$ *удовлетворяет* Δ_2*– условию, то ряд (2.4) является рядом Фурье из* L_M^**. Если, кроме того,* $N^{-1}(u)$ *удовлетворяет условию*

$$\int_u^{\infty} \frac{N^{-1}(t)}{t^2} dt = O\left(\frac{N^{-1}(u)}{u^2}\right), \quad u \to \infty,$$

то ряд (2.4) является рядом Фурье некоторой функции из класса $L_M^* \bigcap A^{(M)}$.

При $M(u) = \frac{|u|^p}{p}$, $p > 1$ из этой теоремы следуют приведенные выше результаты М. Идзуми и С. Идзуми.

Утверждения теорем 1-4 справедливы и для рядов по синусам.

3. Восстановление функций методом средних переменного порядка рядов Фурье. Рассмотрим задачу о восстановлении функции f последовательностью $(m = 1,\ 2, ...)$

$$\sigma_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{mk} S_{l_k}(x; f),$$

где $S_{l_k}(x;;f)$ -частичные суммы ряда Фурье, а матрица $A = \|a_{mk}\|_{m,k=0}^{\infty}$ определяет регулярный метод суммирования , т.е., согласно критерию Теплица, выполнены следующие три условия:

1. $\lim_{m\to\infty} a_{mk} = 0 \ (k = 0, 1, \dots)$,
2. Если $A_m = \sum_{k=0}^{m} a_{mk}$, то $\lim_{m\to\infty} A_m = 1$,
3. Если $K_m = \sum_{k=0}^{m} |a_{mk}|$, то $K_m \le C \ (m = 1, 2, \dots)$ для некоторого $c > 0$.

Задача. Большое разнообразие постановок задач в теории суммирования рядов можно получить заменой обычных средних (Чезаро, Рисса и т.п.) на *средние переменного порядка,* определение которых в случае чезаровских средних, как сказано в [19], принадлежит Д.Е. Меньшову: Пусть

$$\sigma_n^{\delta} = \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{\delta + n - k - 1}{n - k} S_k}{\binom{\delta + n}{n}},$$

а $\{\delta_n\}$, $\delta_n > -1$ есть некоторая числовая последовательность. Тогда если $\sigma_n^{\delta_n} \to S \ (n \to +\infty)$, то говорят, что последовательность $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ или ряд $u_0 + u_1 + \cdots$ с частичными суммами S_n, суммируется методом $(C,\ \{\delta_n\})$ к значению S.

4. Методы суммирования тригонометрических рядов Фурье в К(В)П-задачах как еще одно подтверждение "‘*Современная теория суммирования расходящихся рядов начала бурно развиваться в конце XIX-начале XX века. Этому значительно способствовало то обстоятельство, что выявились связи этой теории с другими математическими дисциплинами*"’ (из п.2, §1).

Мощный аппарат гармонического анализа эффективным образом проявляется в самых разных задачах математики и во всевозможных применениях. К таковым относятся и задачи восстановления, вынесенные в программу “Компьютерный (вычислительный) поперечник (в сокращении – К(В)П)”.

Именно, в части К(В)П-2 и К(В)П-3 в случае числовой информации о периодической суммируемой функции $f(x)$, поставляемой линейными функционалами –тригонометирическими коэффициентами Фурье-Лебега

$$\hat{f}(m) = \int\limits_{[0,1]^s} f(x) e^{-2\pi(m,x)} dx \, (m \in Z^s).$$

В подробном изложении (все обозначения и определения из [20]):

При заданных T, F, Y, D_N (фиксированных всюду по последующему контексту):

К(В)П-1: Находится порядок $\asymp \delta_N(0; D_N)_Y \equiv \delta_N(0; T; F; D_N)_Y$, – *информативная мощность набора вычислительных агрегатов* $D_N \equiv D_N(F)_Y$ с построением конкретного вычислительного агрегата $\left(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N\right)$ из $D_N \equiv D_N(F)_Y$, поддерживающего порядок $\asymp \delta_N(0; D_N)_Y$

- это общая часть, далее конкретизация по $l_\tau(f) = \hat{f}(m^{(\tau)}) \, (\tau = 1, ..., N)$, $l^{(N)} = \left(\hat{f}(m^{(1)}), ..., \hat{f}(m^{(N)})\right)$.

К(В)П-2: В предположении, что существует вычислительный агрегат $\left(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N\right) \equiv \overline{\varphi}_N(\hat{f}(m^{(1)}), \ldots, \hat{f}(m^{(N)}), x)$ по тригонометрическим коэффициентам Фурье, осуществляющий оценку сверху в К(В)П-1, исследуется задача существования и нахождения последовательности $\tilde{\varepsilon}_N \equiv \tilde{\varepsilon}_N \left(D_N; \left(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N\right)\right)_Y \equiv \left(\tilde{\varepsilon}_N^{(1)}, ..., \tilde{\varepsilon}_N^{(N)}\right)$ с неотрицательными компонентами – К(В)П-2-предельной погрешности (соответствующей оптимальному вычислительному агрегату $\left(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N\right)$ по тригонометрическим коэффициентам Фурье) такой, что $\delta_N\left(0; D_N\right)_Y \asymp \delta_N\left(\tilde{\varepsilon}_N; \left(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N\right)\right)_Y \equiv$ $\sup\left\{\|Tf\left(\,\cdot\,\right) - \bar{\varphi}_N\left(z_1, ..., z_N; \cdot\right)\|_Y : \, f \in F, \left|\bar{l}_\tau\left(f\right) - z_\tau\right| \leq \tilde{\varepsilon}_N^{(\tau)}\left(\tau = 1, ..., N\right)\right\}$,
с одновременным выполнением

$$\forall \eta_N \uparrow \,+\infty (0 < \eta_N < \eta_{N+1}, \; \eta_N \to +\infty) : \overline{\lim_{N\to+\infty}} \delta_N\left(\eta_N \tilde{\varepsilon}_N; \left(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N\right)\right)_Y / \delta_N(0; D_N)_Y = +\infty.$$

К(В)П-3: Устанавливается *массивность* предельной погрешности $\tilde{\varepsilon}_N\left(D_N; \left(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N\right)\right)_Y$: находится как можно большое множество $M_N\left(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N\right)$ из D_N, составленного из вычислительных агрегатов $\left(l^{(N)}, \varphi_N\right)$ вида $\varphi_N\left(\hat{f}(m^{(1)}), ..., \hat{f}(m^{(N)}); \cdot\right)$, таких, что для каждого из них выполнено

$$\forall \eta_N \uparrow +\infty (0 < \eta_N < \eta_{N+1}, \; \eta_N \to +\infty) : \overline{\lim_{N\to+\infty}} \delta_N\left(\eta_N \tilde{\varepsilon}_N; \left(l^{(N)}, \varphi_N\right)\right)_Y / \delta_N(0; D_N)_Y = +\infty.$$

Применения теории суммирования тригонометрических рядов Фурье в К(В)П-теории заключаются в использовании чаще всего средних Валле-Пуссена (но не Фейера!) в К(В)П-2 и критериев типа С.М.Никольского [21] в К(В)П-3.

В заключение отметим, что практическое применение каждого вычислительного агрегата из К(В)П-2 и -3 осуществляется через построение физического прибора для измерений цифровой информации $l_1(f), ..., l_N(f)$ на классе F с точностью $\bar{\varepsilon}_N$ (понятно, что чем больше ε_N, тем прибор проще в техническом исполнении и дешеве в эксплутации) и через программное обеспечение $\bar{\varphi}_N$ – алгоритма для компьютерных вычислений.

§3. Абсолютная сходимость ортогональных рядов Фурье – предельный случай от Спандияра Даркенбаева

1.Абсолютная сходимость тригонометрических рядов Фурье. В теории тригонометрических рядов связь между гладкостью функции и абсолютной сходимостью ее ряда Фурье изучалась в работах ряда авторов (см., напр., [9, глава IX], [22], [23]).

Одной из первых в этом направлении была

Теорема А. *Если функция* $f\left(x\right) \in Lip\alpha$ *и* $\alpha > \frac{1}{2}$, *то ряд из коэффициентов Фурье*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_n| + |b_n| \tag{3.1}$$

сходится. При $\alpha = 1/2$ *абсолютная сходимость может не иметь места.*

Достаточная часть следует из одного общего результата Фредгольма [24] (см. также [23]), в приведенной формулировке установлена С.Н.Бернштейном [25, с. 217 и 534]. Затем С.Н.Бернштейн доказал критерий сходимости ряда (3.1) для функций из классов $E_\infty(\lambda)$ и $H_\infty^\omega(\lambda)$ при некоторых ограничениях на ω, которые потом были сняты С. Б. Стечкиным [26] ; сам же критерий заключается в сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \omega(\frac{1}{n})$.

Эта задача имела продолжение в следующей постановке: при какой неулучшаемой связи между числом p, последовательностью $\lambda \equiv \{\lambda_n\}$ (модулем непрерывности $\omega(\delta)$), числами γ $(\gamma \geq -1)$ и β $(\beta > 0)$ для каждой функции $f \in E_p\left(\lambda\right)$ $\left(f \in H_p^\omega\right)$ сходится ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} n^\gamma \left(|a_n|^\beta + |b_n|^\beta\right), \tag{3.2}$$

где a_n и b_n соответственно косинус и синус- коэффициенты Фурье-Лебега функции $f(x)$?

Справедлива

Теорема B. *Пусть* $1 \le p \le 2, \quad 0 < \beta \le 1, \quad \nu = p/(p-1), \ \gamma - \beta/\nu > -1$ *и* $\omega(\delta)$ *- модуль непрерывности. Тогда для того чтобы ряд* (3.2) *сходился для каждой функции* $f \in H_p^\omega$ *необходимо и достаточно выполнение неравенства*

$$\sum_{k=0}^{\infty} n^{\gamma - \frac{\beta}{\nu}} \omega^\beta \left(\frac{1}{n}\right) < +\infty. \tag{3.3}$$

При $\gamma = 0, \omega(\delta) = \delta^\alpha$ достаточная часть этой теоремы следует из общей теоремы в [24], необходимость доказана О. Сасом [27], в приведенной формулировке - А. А. Конюшковым [28].

Как можно заметить, приведенные утверждения получены при условии $\gamma - \beta/\nu > -1$ (см. также [29]), случай $\gamma - \beta/\nu = -1$ содержателен, но не был изучен.

Следующая теорема относится к этому неисследованному случаю.

Теорема 1 (С. Даркенбаев [32]). *Пусть* $1 < p \le 2, \quad 0 < \beta \le p, \ (\nu = p/(p-1)), \ \gamma = \beta/\nu - 1$ *и* $\lambda \equiv \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ *- последовательность положительных чисел, убывающая к нулю. Тогда для того чтобы для каждой функции* $f \in E_p(\lambda)$ *ряд* (3.2) *сходился, достаточно, а в случае, когда*

$$\lambda_n = O(\lambda_{n^2}) \tag{3.4}$$

и необходимо, чтобы

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\beta p}} \lambda_n^\beta < +\infty. \tag{3.5}$$

Отметим, что ограничение (3.4) с сохранением формулировки теоремы снято А. Ж.. Аскаровой [31]

Замечание. Условие (3.5) принципиально отличается от соответствующего условия (3.3) и перекликается с эффектами в теоремах вложения классов H_p^ω в пространства Лоренца (см. [4]), повторяя, со своей спецификой, обнаруженные там особенности в решениях поставленных задач по абсолютной сходимости тригонометрических рядов Фурье.

Таким образом, в задаче, как говорят, с «респектабельной» историей, выявлен новый эффект.

Аналогичные результаты, относящиеся к сходимости рядов типа (3.2) со взвешенными коэффициентами Фурье по системе Уолша в нумерации Пэли и по периодической мультипликативной системе Прайса получены С.З.Даркенбаевым в [32].

2. Абсолютная сходимость рядов из коэффициентов Фурье по мультипликативным системам.

Обозначим через $\Psi = \{\psi_k(x)\}_{k=0}^\infty$ одну из следующих систем: систему Уолша в нумерации Пэли $W = \{w_k(x)\}_{k=0}^\infty$ [33, с. 9–25] и периодическую мультипликативную систему Прайса $\Phi(p_n) = \{\varphi_k(x)\}_{k=0}^\infty$ [34, с. 68-69]. Наилучшее приближение функции $f \in L^p$ полиномами по системе Ψ порядка не выше n будем обозначать $E_n^{(p)}(f)_\Psi$. Пусть $1 \le p < \infty$ и $\lambda \equiv \{\lambda_n\}$–последовательность положительных чисел текея, что $\lambda_n \downarrow 0$ при $n \uparrow \infty$.

Положим

$$E_p(\lambda, \Psi) \equiv \{f \in L^p[0,1] : E_n^{(p)}(f)_\Psi = O(\lambda_n)\},$$
$$H_p^\omega(\Psi) \equiv \{f \in L^p[0,1] : \omega_p(\delta, f)_\Psi = O(\omega(\delta))\},$$

где $\omega_p(\delta, f)_\Psi = \sup\limits_{0 \le h < \delta} \left\| f(x \dot{+} h) - f(x) \right\|_p$ – модуль непрерывности (в L^p) функции $f(x)$ (определение $x \dot{+} h$ см. в [34]).

Изучается задача об условиях сходимости рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^\gamma |c_n(f)|^\beta \quad (\beta > 0, \gamma \ge -1), \tag{3.6}$$

составленных из всех коэффициентов Фурье–Лебега $c_n(f)$ по системе Ψ функций $f(x)$ из классов $H_p^\omega(\Psi)$ и $E_p(\lambda, \Psi)$.

Задача (3.6) относительно системы Уолша исследовалась в работах K. Yoneda [35]. С.Л. Блюмина и Б.Д. Котляра [36], J.R. Mclaughlin [37], N.G. Fine [38] C.W. Onneveer [39] и др.

Как по тригонометрической системе, так и по системе Уолша задача (3.6) изучалась в предположении

$$\gamma - \frac{\beta}{q} > -1 \left(q = \frac{p}{p-1} \right). \tag{3.7}$$

Для системы Уолша справедлив следующий аналог теоремы 1.

Теорема 2 *Пусть* $1 < p \leq 2, 0 < \beta < p, \gamma = \frac{\beta}{q} - 1 \left(q = \frac{p}{p-1} \right)$ *и* $\lambda \equiv \{\}_{n=1}^{\infty}$ – *последовательность положительных чисел такая, что* $\lambda_n \downarrow 0$ *при* $n \uparrow \infty$. *Тогда если*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\beta/p} \lambda_{2^n}^{\beta} < +\infty,$$

то для каждой функции $f \in E_p(\lambda, W)$ *ряд* (3.6) *сходится.*

Теорема 3 *Пусть* $1 < p \leq 2, 0 < \beta < p, \gamma = \frac{\beta}{q} - 1 \left(q = \frac{p}{p-1} \right)$ *и пусть последовательность* λ_n *такова, что*

$$\lambda_n > 0, \lambda_n \downarrow 0, \lambda_n = O(\lambda_{n^2}),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{\beta}{p}} \lambda_{2^n}^{\beta} = +\infty.$$

Тогда существует функция $f(x) \in E_p(\lambda, W)$, *для которой ряд* (3.6) *расходится.*

Теперь перейдем к рядам по системе $\Phi(p_n)(p_n \geq 2)$. Известны следующие результаты.

Теорема A [40] *Пусть* $2 \leq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} p_n < +\infty, 1 < p \leq 2, 0 < \beta < q, \gamma > \frac{\beta}{q} - 1 \left(q = \frac{p}{p-1} \right)$. *Тогда условие*

$$\sum_{k=0}^{\infty} m_k^{1+1-\frac{\beta}{q}} \omega_k^{\beta}(f)_p < +\infty.$$

влечет сходимость ряда (3.6).

Теорема B [41] *Пусть* $q = \frac{p}{p-1}, \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} p_n = +\infty, 0 < \beta < q, 1 < p \leq 2, \gamma = 0$. *Если* $f(x) \in L^p[0,1]$ *и*

$$\sum_{k=0}^{\infty} m_{k+1}^{1-\frac{\beta}{q}} \omega_k^{\beta}(f)_p < +\infty,$$

то сходится ряд (3.6).

Как можно заметить, приведенные теоремы получены при условиях

$$\gamma - \frac{\beta}{q} > -1, 2 \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} p_n < +\infty (\textit{или } \overline{\lim_{n\to\infty}} p_n = +\infty),$$

а для случаев

$$\gamma - \frac{\beta}{q} = -1, 2 \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} p_n < +\infty (\textit{или } \overline{\lim_{n\to\infty}} p_n = +\infty)$$

вопрос о нахождении необходимых и достаточных условий сходимости ряда (3.6) для классов $E_p(\lambda)$ и H_p^{ω} по системе $\Phi(p_n)$ оставался открытым.

Нами получены следующие результаты.

Теорема 4 *Пусть* $2 \leq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} p_n < +\infty, 1 < p \leq 2, 0 < \beta < p, \gamma = \frac{\beta}{q} - 1 \left(q = \frac{p}{p-1} \right)$ *и* $\lambda \equiv \lambda_n$ – *последовательность положительных чисел такая, что* $\lambda_n \downarrow 0$ *при* $n \uparrow \infty$. *Тогда если*

$$\sum_{n=0}^{\infty} m_n^{1-\frac{\beta}{p}} \lambda_{2^{m_n}}^{\beta} < +\infty,$$

то для каждой функции $f(x) \in E_p(\lambda, \Phi)$ *ряд* (3.6) *сходиться.*

Теорема 5 *Пусть* $2 \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} p_n < +\infty, 1 < p \le 2, 0 < \beta < p, \gamma = \frac{\beta}{q} - 1 \left(q = \frac{p}{p-1}\right)$ *и пусть последовательность* $\{\lambda_n\}$ *такова, что*

$$\lambda_n > 0, \lambda_n \downarrow 0, \lambda_n = O(\lambda_n c)(c > 2),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} m_n^{1-\frac{\beta}{p}} \lambda_{2^{m_n}}^{\beta} = +\infty.$$

Тогда существует функции $f \in E_p(\lambda, \Phi)$, *для которой ряд* (3.6) *рассходится.*

Теорема 6 *Пусть* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} p_n = +\infty, 1 < p \le 2, 0 < \beta < p, \gamma = \frac{\beta}{q} - 1 \left(q = \frac{p}{p-1}\right)$ и $\lambda \equiv \{\lambda_n\}$ *последовательность положиельных чисел такая, что* $\lambda_n \downarrow 0$ *при* $n \uparrow \infty$. *Тогда если*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\beta/p}} \cdot \lambda_n^{\beta} < +\infty,$$

то для каждой функции $f \in E_p(\lambda, \Phi)$ *ряд* (3.6) *сходится.*

Задачи. 1. В случае тригонометрической системы для классов H_p^{ω} и $E_p(\lambda)$ было бы небесполезно выяснить существо дела при оставшихся значениях и соотношениях между параметрами p, β и γ в одномерном случае, а также и в случае многомерном.

2. Рассмотрение сходимости рядов из коэффициентов Фурье по различным ортогональным системам дает неограниченное количество задач.

Исходным для ориентировки в этом круге задач может служить статья П.Л.Ульянова [42] о сходимости ряда

$$\sum_{n} \omega\left(|c_n\left(f\right)|\right)\tau(n),$$

где модуль непрерывности $\omega(\delta)$ ($\omega(\delta) = 0$, $\omega(\delta) \ne 0$ при $0 < \delta < \infty$) удовлетворяет условию $\omega(\delta\eta) \le b\omega(\delta)\omega(\eta)$ при всех $0 \le \delta \le \eta < \infty$ для некоторого $b \ge 1$, положительная последовательность $\{\tau(n)\}$ удовлетворяет условию $\tau(m+n) \le b_1\tau(m) \cdot \tau(n)$ при всех n и m и некотором $b_1 > 0$, а $c_n(f)$ -коэффициенты Фурье функции $f(x)$ по заданной ортогональной системе.

3. Было бы, вероятно, небезынтересно рассмотреть в этой постановке и другие классы, например, обобщенные классы Никольского – Бесова $B_{p,\theta}^{\omega}$.

4. В. Н. Темляковым [43] задача об абсолютной сходимости изучалась в следующей ослабленной форме (когда отдельный коэффициент Фурье заменяется на симметричный «кусок» ряда Фурье с расчетом на интерференцию внутри «куска»): при каких условиях на класс функций $F \subset C(0, 2\pi)$ и последовательность $0 = m_0 < m_1 < \cdots < m_k < \cdots$ для каждой функции $f(x) \in F$ ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} m_k^{\beta} \left| \sum_{n:\, m_k \le |n| < m_{k+1}} \hat{f}(n)\, e^{inx} \right|^r, \quad \hat{f}(n) = \int_0^1 f(x)\, e^{-inx} dx$$

сходится равномерно по x ?

Им же получен утвердительный ответ для класса $F = Lip\alpha$, $0 < \alpha < 1$, $\tau = 1$, $\beta + \gamma < \alpha$ и последовательности $\{m_k\}$, $m_{k+1} - m_k \ge c m_k^{1-2\gamma}$ ($c > 0$).

Можно изучать и другие классы, напр., $F = H_{\infty}^{\omega}$, .

§4. Критерии интегрируемости высших производных

Функция $f(x)$, по определению, *равномерно непрерывна* на отрезке $[a, b]$, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что если $a \le x < y \le b$, $0 \le y - x \le \delta(\varepsilon)$, то $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Если же для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любой системы $a \le x_1 < y_1 \le \cdots x_n < y_n \le b$ с любым n $(n = 1, 2, \dots)$ выполнение неравенства $\sum_{k=1}^{n} (y_k - x_k) \le \delta(\varepsilon)$ влечет неравенство $\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(y_k)| \le \varepsilon$, то функцию $f(x)$ называют *абсолютно (равномерно) непрерывной* на $[a, b]$.

Имеет место

Теорема Ф.Рисса [44] . *Пусть $f(x)$ - абсолютно непрерывная на $[0,1]$ функция. Тогда для того чтобы производная $f'(x)$ принадлежала классу $L^p\,(0,1)\,(1<p<+\infty)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sup\left\{\sum_{k=1}^{n}\left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right|^p\cdot(x_k-x_{k-1})^{-(p-1)}:0=x_0<x_1<\cdots<x_n=1\right\}<\infty.$$

Доказанная в 1910 году, эта теорема впоследствии обобщалась в двух направлениях - переход к высшим производным и переход к более общим классам интегрируемых функций

$$\varphi(L)\equiv\left\{f\in L\,(0,1):\int_0^1\varphi\left(|f\,(x)|\right)dx<+\infty\right\},$$

где $t\leq\varphi(t)$ - возрастающая на $[0,+\infty)$ функция.

Именно, были найдены неулучшаемые условия на разности

$$f\,(x_0,x_1)=(f\,(x_1)-f\,(x_0))\,(x_1-x_0)^{-1},\ldots,$$

$$f\,(x_0,x_1,\ldots,x_m)=(f\,(x_1,\ldots,x_m)-f\,(x_0,\ldots,x_{m-1}))\,(x_m-x_0)^{-1}$$

$(m=2,\ 3,...;\ 0\leq x_0<x_1<\cdots<x_m\leq 2\pi)$, обеспечивающие включение $f^{(m-1)}\in AC$ (где AC есть пространство абсолютно непрерывных функций) и $f^{(m)}\in\varphi(L)$:

Ю.Т. Медведев [45]: $m=\varphi\,(t)$ – любое,

I.J.Schoenberg [46]: $m=1,\ 2,...;p=2$,

J.W.Jerome, L.L.Schumaker [47]: $m=1,2,...;1<p<+\infty$,

Ю.А. Брудный [48]: $m=1,\ 2,...;\quad\varphi\,(2t)=O\left(\varphi\,(t)\right)$.

Имеет место следующая общая теорема.

Теорема (Н.Темиргалиев [49]). *Пусть - $\varphi\,(t)$ четная, непрерывная, выпуклая, неубывающая при $t\geq 0$ функция и такая, что $\varphi\,(0)=0$ и $\varphi\,(t)\,/t\to+\infty$ при $t\to+\infty$, а m произвольное целое положительное число. Тогда, если для 2π - периодической функции $f(x)$ выполнено неравенство*

$$\sum_{i=0}^{n-1}\varphi(m!f\,(x_i,\ldots,x_{i+m}))(x_{i+m}-x_i)\leq C \tag{4.1}$$

где не зависит от n $(n=1,2,...)$ и от разбиения $0\leq x_0<x_1<\cdots<x_{n+m-1}\leq 4\pi$, то

$$f\,(x)\in\overset{0}{H}{}_{\varphi}^{m}\equiv\left\{f:f^{(m-1)}\in AC,\,f^{(m)}\in\varphi\,(L)\,,\,f^{(l)}\,(0)=f^{(l)}\,(2\pi)\,,\,(l=0,\,1,\,...,\,m-1)\right\}.$$

Обратно, если функция $mf\,(x)\in\overset{0}{H}{}_{\varphi}^{m}$, где $\varphi\,(t)$-четная, выпуклая, неубывающая при $t\geq 0$ функция и $\varphi\,(0)=0$, то для функции $f(x)$ справедливо (4.1).

Следствие. Пусть *$\varphi\,(t)$ - четная, непрерывная, выпуклая, неубывающая при $t\geq 0$ функция и такая, что $\varphi\,(0)=0$ и $\varphi\,(t)\,/t\to+\infty$* при *$t\to+\infty$, а m - произвольное целое положительное число. Если, кроме того, $\varphi\,(t)$ такова, что $\varphi\,(2t)=O\left(\varphi\,(t)\right)$ при $t\to+\infty$, то для каждой 2π - периодической функции $f(x)$ имеем*

$$f\in\overset{\circ}{H}{}_{\varphi}^{m}\Leftrightarrow\sum_{i=0}^{n-1}\varphi(f(x_i,...,x_{i+m}))\,(x_{i+m}-x_i)\leq C,$$

где не зависит от n $(n=1,2,...)$ и от разбиения $0\leq x_0<x_1<\cdots<x_{n+m-1}\leq 4\pi$, т.е. требование $f\in\overset{\circ}{H}{}_{\varphi}^{m}$ эквивалентно выполнению неравенства

$$\sum_{i=0}^{n-1}\varphi(f(x_i,...,x_{i+m}))\,(x_{i+m}-x_i)\leq C=const.$$

Отметим, что фигурирующая в теореме М. Рисса 1910 года множество функций есть ничто иное, как то, что в современном звучании есть пространство Соболева $W_p^1\,[0,\,1]$. Сказанное есть еще одно свидетельство того, что называют *"надежностью математической номенклатуры"*.

Задача. Вероятно, было бы небезынтересно получить аналоги приведенных здесь теорем в многомерном случае.

Список литературы

1 Хайрер Э., Ваннер Г. Математический анализ в свете его истории. - М.: Научный мир, 2008. - 396 с.

2 Темірғалиев Н. Математикалық анализ. Т. II. - Алматы: Ана тілі, 1991. - 400 б.

3 Харди Г. Расходящиеся ряды, пер. с англ. -М., 1951.

4 Темиргалиев Н. Теории вложений и приближений в контексте К(В)П и внутренних проблем теории функций// Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика. Информатика. Механика. -2018. -Т.125. -№4. -С.8-68.

5 Ульянов П.Л. Представление функций рядами и классы $\varphi(L)$ // Успехи матем. наук. -1972. -Т. XXVII. –Вып.2. –С. 3-52.

6 Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б. Выпуклые функции и пространства Орлича. - М.: Физматгиз, 1958. - 271 с.

7 Hardy G.H. Notes on some points in the integral calculus // Messenger of Math. - 1928. -V. 58. -P. 50-52.

8 Bellman B. A note on a theorem of Hardy on Fourier constants // Bull. Amer. Math. Soc. -1944. -V. 50. -P. 741-744.

9 Бари Н.К. Тригонометрические ряды. - М.: Физматиз, 1961.

10 Yound Fr. Transformations of Fourier coefficients // PAMS. -1952. -№ 3. -P. 783-791.

11 Конюшков А.А. О классах Липшица // Изв. АН СССР. Сер. матем. -1957. -Т. 21. -С. 423-448.

12 Loo C.T., Am. J. Math. 1949. -V. 71.

13 Peterson G.M. Trans. Roy. Soc., Canada. -1951. -Vol. 45. -Ser. 3.

14 Izumi M., Izumi S. Proc. Japan Acad. -1968. -Vol. 44.

15 Salem R. Essais sur les series trigonometriques, Actual. Sci. et Industr., №862, Paris, 1940.

16 Тиман А. Ф. Замечания о тригонометрических полиномах и рядах Фурье-Стилтьеса// Успехи матем. наук. -1957. -Т. XII. -Вып. 2(74). -С. 175—183.

17 Алшынбаева Е. О преобразованиях коэффициентов Фурье некоторых классов функций // Докл. АН СССР. -1977. -Т. 236. -№ 6. -С. 1293-1295.

18 Алшынбаева Е. О преобразованиях коэффициентов Фурье некоторых классов функций // Матем. заметки. -1979. -Т. 25. -№ 5. -С. 645-651.

19 Каплан М.Б. О чезаровских средних переменного порядка //Изв.ВУЗов. Математика. -1960. -№ 5. -С. 62-73.

20 Темиргалиев Н., Жубанышева А.Ж. Теория приближений, Вычислительная математика и Численный анализ в новой концепции в свете Компьютерного (вычислительного) поперечника // Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева. Серия Математика. Информатика. Механика. –2018. –Т. 124. –№3. –С. 8-88.

21 Никольский С.М. О линейных методах суммирования рядов Фурье//Изв. АН СССР. Сер. матем. -1948. -Т. 12. №3. -С. 259-278.

22 Кахан Ж.П. Абсолютно сходящиеся ряды Фурье. - М.: Мир, 1976.

23 Ульянов П.Л. Метрическая теория функций // Труды Матем. ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР. - 1988. - Т. 182. - С. 180-223.

24 Fredholm Y. Jur une classe d'equations fonctionelles // Acta math. - 1903. -V. 27. -P. 365-390.

25 Бернштейн С.Н. Собрание сочинений. -М.: Изд.АН СССР, 1952. Т. 1.

26 Стечкин С.Б. Об абсолютной сходимости рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. матем. - 1953. - Т. 17. - С. 87-98.

27 Szasz O. Veber den Konvergenzexponent der Fourierschen Reihen // Munch. Sitzungsber. -1922. -P. 135-150.

28 Конюшков А.А. Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье // Матем. сб. -1958. -Т. 44. -С. 53-84.

29 Aganin A.I. and Potapov M.K. On imbedding of function classes into classes// Acta Math. Hungar. - 1995. -Т. 68. -№ 3. - С. 197-220.

30 Даркенбаев С.З. О сходимости рядов из тригонометрических рядов Фурье // Изв. АН Каз.ССР. Сер. физ.-мат. -1985. -№ 5. -С. 22-27.

31 Аскарова А.Ж. Абсолютная сходимость рядов из тригонометрических коэффициентов Фурье функций многих переменных: Канд. дисс. на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01- Математический анализ. -Караганда. -2003.

32 Даркенбаев С.З. О сходимости рядов из коэффициентов Фурье по мультипликативным системам //Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. -1990. -№ 5. -С. 14-17.

33 Голубов Б.И. и др. Ряды и преобразования Уолша: (Теория и приближения). –Москва, 1987. -344 с.

34 Агаев Г.Н. и др. Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. –Баку, 1980. -180 с.

35 Yoneda K. On absolute convergence of Walsh-Fourier series// Math. Jap. -1973. –Vol. 18. -№1. –P. 71-78.

36 Блюмин С.Л. и др. Операторы Гильберта-Шмидта и абсолютная сходимость рядов Фурье// Изв. АН СССР. Сер. Мат. -1970. –Т. 34. -№ 1. –С. 209-217.
37 Mclaughlin J.R. Absolute convergence of series of Fourier coefficients // Trans. Amer. Math. Soc. -1973. –Vol. 184. –P. 291-316.
38 Fine N.J. On the Walsh functions//Ibid. -1949. –Vol. 65. -№ 3. –P. 372-414.
39 Onneweer C.W. On uniform convergence for Walsh –Fourier series //Pacific j. math. -1970. –Vol. 34. -№ 1. –P. 117-122.
40 Mclaughlin J.R. Integrated orthonormal series //Pacific j.math. -1972. –Vol. 42. –P. 469-475.
41 Quck T.S. and Leonard J.H. Jap. Absolute convergence of Vilenkin-Fourier series // J. of Math. Anal. and Appl. -1980. –Vol. 74. –P. 1-14.
42 Ульянов П.Л. Об абсолютной сходимости тригонометрических рядов Фурье // Докл. АН СССР. -1992. -Т. 322. -№ 2. -С. 253-258.
43 Temljakov V.N. On absolute sammation of Fourier series by Subsequences // Analysis Math. -1982. -V. 8. -P. 71-77.
44 Riesz F. Untersuchungen uber Systeme intergrierbarer Funktionen // Math. Ann. -1910. - V. 69. -P. 449- 497.
45 Медведев Ю.Т. Обобщение одной теоремы Ф.Рисса // Успехи матем. наук. -1953. -Т. 8. -№ 6. -С. 115-118.
46 Schoenberg I.J. Spline interpolation and the higher derisatives // Proc. Nat. Acad. Soc. -1964. -V. 51. -P. 24-28.
47 Jerome J.W., Schumaker L.L. Characterisations of function with higher order derivations in Lp // Trans. Amer.Math. Soc. -1969. -V. 143. -P. 363-371.
48 Брудный Ю.А. Критерии существования производных в Lp // Матем. сб. -1967. -Т. 73. -С. 42-64.
49 Темиргалиев Н. Об условиях принадлежности высших производных классам $\varphi(L)$ // Матем. заметки. -1973. -Т. 14. - С. 479-486.

Н. Темірғалиев
Теориялық математика және ғылыми есептеулер институты,
Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұр-Сұлтан, Қазақстан

Тригонометриялық Фурье қатарларының түрлендірулері мен абсолютті жинақталуы

Аннотация: Мақалада тригонометриялық Фурье қатарларының түрлендірулері мен абсолютті жинақталу мәселелері қарастырылған. Және де осы зерттеулерді ары қарай жалғастыру қойылымдары, солардың ішінде П.Л. Ульяновтың да қойылымдары келтірілген.

Түйін сөздер: Орлич кеңістіктері, Фурье қатарларының түрлендірулері, абсолютті жинақталу, шектік жағдай.

N. Temirgaliyev
Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations ot the L. N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan

Transformation and Absolute Convergence of Trigonometric Fourier Series

Abstract: The article is devoted to the problems of the theory of summability and absolute convergence of trigonometric Fourier series with the formulation of problems belonging to P.L. Ulyanov, in the context of the further development of these areas of research.

Keywords: Orlicz space, Fourier series transformation, absolute convergence, limiting case.

References

1 Hajrer Je., Vanner G. Matematicheskij analiz v svete ego istorii [Mathematical analysis in the light of its history](Nauchnyj mir[Scientific world], Moscow, 2008, 396 p.). [in Russian]
2 Temirgaliyev N. Matematikalyk analiz. Tom 2 [Mathematical analysis. Vol 2] (Ana-tili, Almaty, 1991, 400 p.). [in Kazakh]
3 Hardi G., Rashodjashhiesja rjady, per. s angl. [Divergent ranks, trans. from English] (Moscow, 1951).
4 Temirgaliyev N. Embedding and Approximation Theories in the Context of Computational (Numerical) Diameter and Internal Problems of the Theory of Functions// Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics. Computer science. Mechanics series. -2018. -Vol. 125. -№4. -P. 8-68.
5 Ul'janov P.L. Representation of functions by series and classes $\varphi(L)$, Russian Mathematical Surveys, 27(2), 3-52(1972).
6 Krasnosel'skij M. A., Rutickij Ja. B. Vypuklye funkcii i prostranstva Orlicha [Convex functions and Orlicz spaces] (Fizmatgiz, Moscow, 1958, 271 p.). [in Russian]
7 Hardy G.H. Notes on some points in the integral calculus, Messenger of Math., **58**, 50-52(1928).
8 Bellman B. A note on a theorem of Hardy on Fourier constants, Bull. Amer. Math. Soc., **50**, 741-744(1944).
9 Bari N.K. Trigonometricheskie rjady [Trigonometric series] (Fizmatiz, Moscow, 1961).
10 Yound Fr. Transformations of Fourier coefficients, PAMS, (3), 783-791(1952).
11 Konjushkov A.A. O klassah Lipshica[On the Lipschitz classes], Izv. AN SSSR. Ser. matem.[Izv. Academy of Sciences of the USSR. Ser. Math], 21, 423-448(1957).
12 Loo C.T., Am. J. Math. 1949. Vol. 71.

13 Peterson G.M. Trans. Roy. Soc., Canada. 1951. Vol. 45. Ser. 3.
14 Izumi M., Izumi S. Proc. Japan Acad. 1968. Vol. 44.
15 Salem R. Essais sur les series trigonometriques, Actual. Sci. et Industr. Paris. 1940. №862.
16 Timan A. F. Zamechanija o trigonometricheskih polinomah i rjadah Fur'e-Stilt'esa[Remarks on trigonometric polynomials and Fourier-Stieltjes series], Uspehi matem. nauk.[Uspekhi Mat. sciences], 12(2(74)), 1755-183(1957).
17 Alshynbaeva E. O preobrazovanijah kojefficientov Fur'e nekotoryh klassov funkcij[On transformations of the Fourier coefficients of some classes of functions], Dokl. AN SSSR [Dokl. Acad of the USSR], **236**(6), 1293-1295(1977).
18 Alshynbaeva E. Transformations of fourier coefficients of certain classes of functions, Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR, 25(5), 332–335(1979).
19 Kaplan M.B. O chezarovskih srednih peremennogo porjadka[On the Chezar medium variable order], Izv.VUZov. Matematika[Izv.VUZov. Maths], (5), 62-73(1960).
20 Temirgaliyev N., Zhubanysheva A.Zh. Approximation Theory, Computational Mathematics and Numerical Analysis in new conception of Computational (Numerical) Diameter, Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics. Computer Science. Mechanics series, **124**(3), 8-88(2018).
21 Nikol'skij S.M. O linejnyh metodah summirovanija rjadov Fur'e[On linear methods of summation of Fourier series], Izv. AN SSSR. Ser. matem.[Izv. Academy of Sciences of the USSR], 12(3), 259-278(1948).
22 Kahan Zh.P. Absoljutno shodjashhiesja rjady Fur'e [Absolutely convergent Fourier series] (Mir, Moscow, 1976).
23 Ul'yanov P.L. Metric function theory, Trudy Mat. Inst. Steklov., **182**, 180–223(1988).
24 Fredholm Y. Jur une classe d'equations fonctionelles, Acta math., **27**, 365-390(1903).
25 Bernshtejn S.N. Sobranie sochinenij [Collected Works] (Izd.AN SSSR, Moscow, 1952, Vol. 1).
26 Stechkin S.B. On absolute convergence of Fourier series, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 17(2), 87–98(1953).
27 Szasz O. Veber den Konvergenzexponent der Fourierschen Reihen, Munch. Sitzungsber. 1922. P. 135-150.
28 Konyushkov A.A. Best approximations by trigonometric polynomials and Fourier coefficients, Mat. Sb., 44(86(1)), 53–84(1958).
29 Aganin A.I. and Potapov M.K. On imbedding of function classes into classes, Acta Math. Hungar, **68**(3), 197-220(1995).
30 Darkenbaev S.Z. O shodimosti rjadov iz trigonometricheskih rjadov Fur'e [On the convergence of series from trigonometric Fourier series], Izv. AN Kaz.SSR. Ser. fiz.-mat.[Izv. AN Kaz.SSR. Ser. Phys.-Mat.], (5), 22-27(1985).
31 Askarova A.Zh. Absoljutnaja shodimost' rjadov iz trigonometricheskih kojefficientov Fur'e funkcij mnogih peremennyh[Absolute convergence of series of trigonometric Fourier coefficients of functions many variables]: Kand. diss. na soiskanie uchenoj stepeni kandidata fiziko-matematicheskih nauk po special'nosti 01.01.01-Matematicheskij analiz [Cand. diss. for the degree of candidate of physical and mathematical sciences specialty 01.01.01- Mathematical analysis]. Karaganda. 2003.
32 Darkenbaev S.Z. O shodimosti rjadov iz kojefficientov Fur'e po mul'tiplikativnym sistemam[On the convergence of series of Fourier coefficients with respect to multiplicative systems], Izv. AN KazSSR. Ser. fiz.-mat. [Izv. Academy of Sciences of the Kazakh SSR. Ser. Phys.-Mat.], (5), 14-17(1990).
33 Golubov B. I. et al. Rjady i preobrazovanija Uolsha: (Teorija i priblizhenija) [Series and Walsh transformations: (Theory and approximations)] (Moscow, 1987).
34 Agaev G. N. et al. Mul'tiplikativnye sistemy funkcij i garmonicheskij analiz na nul'-mernyh gruppah [Multiplicative systems of functions and harmonic analysis on zero-dimensional groups] (Baku, 1980).
35 Yoneda K. On absolute convergence of Walsh-Fourier series// Math. Jap. -1973. –Vol. 18. -№1. –P. 71-78.
36 Blyumin S. L., Kotlyar B. D. Hilbert–Schmidt operators and the absolute convergence of fourier series // Math. USSR-Izv., 4:1 (1970), 215–223.
37 Mclaughlin J.R. Absolute convergence of series of Fourier coefficients // Trans. Amer. Math. Soc. -1973. –Vol. 184. –P. 291-316.
38 Fine N.J. On the Walsh functions//Ibid. -1949. –Vol. 65. -№ 3. –P. 372-414.
39 Onneweer C.W. On uniform convergence for Walsh –Fourier series //Pacific j. math. -1970. –Vol. 34. -№ 1. –P. 117-122.
40 Mclaughlin J.R. Integrated orthonormal series //Pacific j.math. -1972. –Vol. 42. –P. 469-475.
41 Quck T.S. and Leonard J.H. Jap. Absolute convergence of Vilenkin-Fourier series // J. of Math. Anal. and Appl. -1980. –Vol. 74. –P. 1-14.
42 Ul'janov P.L. Ob absoljutnoj shodimosti trigonometricheskih rjadov Fur'e[On absolute convergence of trigonometric Fourier series], Dokl. AN SSSR[Dokl. Academy of Sciences of the USSR], **322**(2), 253-258(1992).
43 Temljakov V.N. On absolute sammation of Fourier series by Subsequences, Analysis Math., **8**, 71-77(1982).
44 Riesz F. Untersuchungen uber Systeme intergrierbarer Funktionen, Math. Ann., **69**, 449-497(1910).
45 Medvedev Yu.T. Generalization of a theorem of F. Riesz, Uspekhi Mat. Nauk, **8**(6(58)), 115–118(1953).
46 Schoenberg I.J. Spline interpolation and the higher derisatives, Proc. Nat. Acad. Soc., **51**, 24-28(1964).
47 Jerome J.W., Schumaker L.L. Characterisations of function with higher order derivations in L_p , Trans. Amer.Math. Soc., **143**, 363-371(1969).

48 Brudnyi Yu.A. Criteria for the existence of derivatives in l^p , Mathematics of the USSR-Sbornik, 2(1):35(1967).
49 Temirgaliyev N. Conditions under which higher derivatives belong to the classes $\varphi(L)$, Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR, **14**(4), 832–836(1973).

Сведения об авторе:

Темиргалиев Н. – доктор физико-математических наук, профессор, директор Института теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан.

Temirgaliyev N. – -Prof., Doctor of Phys. -Math. Sciences, Director of the Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations ot the L. N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan.

Поступила в редакцию 17.04.2019

«Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Математика. Компьютерлік ғылымдар. Механика сериясы» журналына жіберілетін жұмыстарға қойылатын талаптар

Журнал редакциясы авторларға осы нұсқаулықпен толық танысып, журналға мақала әзірлеу мен дайын мақаланы журналға жіберу кезінде басшылыққа алуды ұсынады. Бұл нұсқаулық талаптарының орындалмауы сіздің мақалаңыздың жариялануын кідіртеді.

1. Автордың қолжазбаны редакцияға жіберуі мақала авторының басып шығарушы, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетіне мақаласын басуға келісімін және кез келген шетел тіліне аударылып қайта басылуына келісімін білдіреді.

2. Баспаға (барлық жариялаушы авторлардың қол қойылған қағаз нұсқасы және электронды нұсқасында) журналдың түпнұсқалы стильдік файлының міндетті қолданысымен LaTeX баспа жүйесінде дайындалған Tex- пен Pdf-файлындағы жұмыстар ұсынылады. Стильдік файлды ***bulmathmc.enu.kz*** журнал сайтынан жүктеп алуға болады.

3. Мақаланың көлемі 6 беттен кем және 18 беттен артық болмауы тиіс. Талап деңгейінен асқан жұмыстар редакциялық алқа отырысында қаралып, баспаға ерекше жағдайда ғана рұқсат етіледі.

4. Жұмыстың мәтіні ХҒТАР (Халықаралық ғылыми-техникалық ақпарат рубрикаторы) кодының көрсеткішімен басталып, кейін автор(лар)дың аты және тегі, жұмыс орнының толық атауы, қаласы, мемлекеті, E-mail-ы, мақаланың толық атауы, аннотациясы көрсетіледі. Аннотация 150-200 сөз көлемінде болуы тиіс, сонымен қатар мәтінде күрделі есептік формулалар болмауы, мақаланың толық аты қайталанбауы, жұмыстың мәтіні мен әдебиеттер тізімінде көрсетілетін сілтемелер болмауы керек. Аннотация мақаланың ерекшеліктерін көрсететін және оның құрылымын (кіріспе, есептің қойылымы, мақсаты, тарихы, зерттеу әдістері, нәтижелер және олардың талқылаулары, қорытынды) сақтайтын мақаланың қысқаша мазмұны болуы тиіс.

5. Жұмыстың мәтінінде кездесетін таблицалар мәтіннің ішінде жеке нөмірленіп, мәтін көлемінде сілтемелер түрінде көрсетілуі керек. Суреттер мен графиктер PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX форматындағы стандарттарға сай болуы керек. Нүктелік суреттер кеңейтілімі 600 dpi кем болмауы қажет. Суреттердің барлығы да айқын әрі нақты болуы керек.

6. Жұмыста қолданылған әдебиеттер тек жұмыста сілтеме жасалған түпнұсқалық көрсеткішке сай (сілтеме беру тәртібінде немесе ағылшын әліпбиі тәртібі негізінде толтырылады) болуы керек. Баспадан шықпаған жұмыстарға сілтеме жасауға тиым салынады.

Сілтемені беруде автор қолданған әдебиеттің бетінің нөмірін көрсетпей, келесі нұсқаға сүйеніңіз дұрыс: тараудың номері, бөлімнің номері, тармақтың номері, теораманың номері (лемма, ескерту, формуланың және т.б.) номері көрсетіледі. Мысалы: «... қараңыз . [3; § 7, лемма 6]», «...қараңыз [2; 5 теорамадағы ескерту]». Бұл талап орындалмаған жағдайда мақаланы ағылшын тіліне аударғанда сілтемелерде қателіктер туындауы мүмкін.

Қолданылаған әдебиеттер тізімін рәсімдеу мысалдары

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. –М: Физматлит, –1994, –376 стр. – **кітап**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики –2014. –Т.54. № 7. –С. 1059-1077. - **мақала**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. – Москва, 2015. –С.141-142. – **конференция еңбектері**

4 Нуртазина К. Рыцарь математики и информатики. –Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. –С.7. – **газеттік мақала**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия –2017. –Т.14. –С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. – URL: http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf. (дата обращения: 08.01.2017). - **электронды журнал**

7. Әдебиеттер тізімінен соң автор өзінің библиографикалық мәліметтерін орыс және ағылшын тілінде (егер мақала қазақ тілінде орындалса), қазақ және ағылшын тілінде (егер мақала орыс тілінде орындалса), орыс және қазақ тілінде (егер мақала ағылшын тілінде орындалса) жазу қажет. Соңынан транслиттік аударма мен ағылшын тілінде берілген әдебиеттер тізімінен соң әр автордың жеке мәліметтері (қазақ, орыс, ағылшын тілдерінде – ғылыми атағы, қызметтік мекенжайы, телефоны, e-mail-ы) беріледі.

8. *Редакцияның мекенжайы*: 010008, Қазақстан, Астана қаласы, Қ.Сәтпаев көшесі, 2, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Бас ғимарат, 408-кабинет. Телефоны: (7172) 709-500 (ішкі 31-428). E-mail: *vest_math@enu.kz*. Сайт: *bulmathmc.enu.kz*.

Provision on articles submitted to the journal
"Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics. Computer Science. Mechanics Series"

The journal editorial board asks the authors to read the rules and adhere to them when preparing the articles, sent to the journal. Deviation from the established rules delays the publication of the article.

1. Submission of articles to the scientific publication office means the authors' consent to the right of the Publisher, L.N. Gumilyov Eurasian National University, to publish articles in the journal and the re-publication of it in any foreign language.

2. The scientific publication office accepts the article (in electronic and printed, signed by the author) in Tex- and Pdf-files, prepared in the LaTeX publishing system with mandatory use of the original style log file. The style log file can be downloaded from the journal website ***bulmathmc.enu.kz***.

3. The volume of the article should not exceed 18 pages(from 6 pages). The article, exceeding this volume is accepted for publication in exceptional cases by a special decision of the journal Editorial Board.

4. The text of the article begins with the IRSTI (International Rubricator of Scientific and Technical Information), then followed by the Initials and Surname of the author (s); full name of organization, city, country; E-mail of the author (s); the article title; abstract. Abstract should consist of 150-250 words, it should not contain cumbersome formulas, the content should not repeat the article title, abstract should not contain references to the text of the article and the list of literature), abstract should be a brief summary of the article content, reflecting its features and preserving the article structure - introduction, problem statement, goals, history, research methods, results with its discussion, conclusion.

5. Tables are included directly in the text of the article; it must be numbered and accompanied by a reference to them in the text of the article. Figures, graphics should be presented in one of the standard formats: PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX. Bitmaps should be presented with a resolution of 600 dpi. All details must be clearly shown in the figures.

6. The list of literature should contain only those sources (numbered in the order of quoting or in the order of the English alphabet), which are referenced in the text of the article. References to unpublished issues, the results of which are used in evidence, are not allowed. Authors are recommended to exclude the reference to pages when referring to the links and guided by the following template: chapter number, section number, paragraph number, theorem number (lemmas, statements, remarks to the theorem, etc.), number of the formula. For example, "..., see [3, § 7, Lemma 6]"; "..., see [2], a remark to Theorem 5". Otherwise, incorrect references may appear when preparing an English version of the article.

Template

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. -М: Физматлит, -1994, -376 стр.-**book**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики -2014. -Т.54. № 7. -С. 1059-1077. - **journal article**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященная 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. - Москва, 2015. -С.141-142. - - **Conferences proceedings**

4 Нуртазина К. Рыцарь математики и информатики. -Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. -С.7. **newspaper articles**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия -2017. -Т.14. -С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. - URL: http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf. (дата обращения: 08.01.2017). - **Internet resources**

7. At the end of the article, after the list of references, it is necessary to indicate bibliographic data in Russian and English (if the article is in Kazakh), in Kazakh and English (if the article is in Russian) and in Russian and Kazakh languages (if the article is English language). Then a combination of the English-language and transliterated parts of the references list and information about authors (scientific degree, office address, telephone, e-mail - in Kazakh, Russian and English) is given.

8. *Address:* 010008, Republic of Kazakhstan, Astana, Satpayev St., 2., L.N. Gumilyov Eurasian National University, Main Building, room 408). E-mail: *vest_ math@enu.kz.* Сайт: *bulmathmc.enu.kz.*

Правила представления работ в журнал
"Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика. Компьютерные науки. Механика"

Редакция журнала просит авторов ознакомиться с правилами и придерживаться их при подготовке работ, направляемых в журнал. Отклонение от установленных правил задерживает публикацию статьи.

1. Отправление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на право Издателя, Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева, издания статьи в журнале и переиздания их на любом иностранном языке.

2. В редакцию (в бумажном виде, подписанном всеми авторами и в электронном виде) представляются Tex- и Pdf-файлы работы, подготовленные в издательской системе LaTeX, с обязательным использованием оригинального стилевого файла журнала. Стилевой файл можно скачать со сайта журнала *bulmathmc.enu.kz.*

3. Объем статьи не должен превышать 18 страниц (от 6 страниц). Работы, превышающие указанный объем, принимаются к публикации в исключительных случаях по особому решению Редколлегии журнала.

4. Текст работы начинается с рубрикатора МРНТИ (Международный рубрикатор научно-технической информации), затем следуют инициалы и фамилия автора(ов), полное наименование организации, город, страна, E-mail автора(ов), заглавие статьи, аннотация. Аннотация должна состоять из 150-250 слов, не должна содержать громоздкие формулы, по содержанию не должна повторять название статьи, не должна содержать ссылки на текст работы и список литературы, должна быть кратким изложением содержания статьи, отражая её особенности и сохранять структуру статьи - введение, постановка задачи, цели, история, методы исследования, результаты с их обсуждением, заключение, выводы.

5. Таблицы включаются непосредственно в текст работы, они должны быть пронумерованы и сопровождаться ссылкой на них в тексте работы. Рисунки, графики должны быть представлены в одном из стандартных форматов: PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX. Точечные рисунки необходимо выполнять с разрешением 600 dpi. На рисунках должны быть ясно переданы все детали.

6. Список литературы должен содержать только те источники (пронумерованные в порядке цитирования или в порядке английского алфавита), на которые имеются ссылки в тексте работы. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются.

Авторам рекомендуется при оформлении ссылок исключить упоминание страниц и руководствоваться следующим шаблоном: номер главы, номер параграфа, номер пункта, номер теоремы (леммы, утверждения, замечания к теореме и т.п.), номер формулы. Например, "..., см. [3; § 7, лемма 6]"; "..., см. [2; замечание к теореме 5]". В противном случае при подготовке англоязычной версии статьи могут возникнуть неверные ссылки.

Примеры оформления списка литературы

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. -М: Физматлит, -1994, -376 стр. - **книга**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики -2014. -Т.54. № 7. -С. 1059-1077. - **статья**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. - Москва, 2015. -С.141-142. - **труды конференции**

4 Нуртазина К. Рыцарь математики и информатики. -Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. -С.7. - **газетная статья**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия -2017. -Т.14. -С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. - URL: http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf. (дата обращения: 08.01.2017). - **электронный журнал**

7. После списка литературы, необходимо указать библиографические данные на русском и английском языках (если статья оформлена на казахском языке), на казахском и английском языках (если статья оформлена на русском языке) и на русском и казахском языках (если статья оформлена на английском языке). Затем приводится комбинация англоязычной и транслитерированной частей списка литературы и сведения по каждому из авторов (научное звание, служебный адрес, телефон, e-mail - на казахском, русском и английском языках).

8. *Адрес редакции:* 010008, Казахстан, г. Астана, ул. Сатпаева, 2, Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, учебно-административный корпус, каб. 408. Тел: (7172) 709-500 (вн. 31-428). E-mail: *vest_math@enu.kz.* Сайт: *bulmathmc.enu.kz.*

Бас редактор: Н. Темірғалиев

Жауапты редактор: А.Ж. Жұбанышева

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің
хабаршысы. Математика. Компьютерлік ғылымдар. Механика сериясы.
- 2019. 2(127)- Нұр-Сұлтан: ЕҰУ. 70-б.
Шартты б.т. - 3,88. Таралымы - 30 дана.

Мазмұнына типография жауап бермейді

Редакция мекен-жайы: 010008, Қазақстан Республикасы, Нұр-Сұлтан қ.,
Сәтпаев көшесі, 2.
Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті
Тел.: +7(7172) 70-95-00 (ішкі 31-428)

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің баспасында басылды