Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics, computer science, mechanics series, 2025, Vol. 150, №1, P. 17-24.
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

Статья
МРНТИ: 27.43.51

СРЕДНИЕ КВАДРАТИЧЕСКИЕ ПОГРЕШНОСТИ ПО МЕРЕ БАНАХА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНЫМИ СУММАМИ ЧЛЕНОВ ИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ФУРЬЕ[1]

Н.Наурызбаев, А.Шоманова*, Н.Темиргалиев
Институт теоретической математики и научных вычислений Евразийского науионального университета имени Л.Н. Гумилева, ул. Кажымукана, 13, Астана, 010008, Казахстан
**corresponding author: anarshomanova71@gmail.com,*

Аннотация. В данной статье изучается задача восстановления функций конечными суммами членов их тригонометрических рядов Фурье относительно вероятностных мер на функциональных классах, особенностью которых является невозможность нахождения «*спектра больших коэффициентов*», чем и объясняется рассмотрение произвольных «*конечных сумм из членов рядов Фурье*».

Проблема вероятностного мероввведения на классах с индивидуальными оценками на тригонометрические коэффициенты Фурье была решена на основе фундаментального характера свойства "*Функция может быть задана двояко: либо как правило, либо как полный набор тригонометрических коэффициентов Фурье*" из монографии В.М.Тихомирова, остальное было "делом техники".

Переход к последовательностям коэффициентов Фурье с применением теоремы А.Н.Колмогорова о продолжении мер с конечных размерностей пространств на бесконечномерную, позволил ввести вероятностную меру на классах со взвешенными коэффициентами Фурье с доведением до окончательного, впервые построенного Стефаном Банахом в Приложении к книге Станислава Сакса "Теория интеграла". Здесь также предложены некоторые конструктивные детали процесса вероятностного мероввведения.

Ключевые слова: тригонометрические ряды Фурье- Лебега, задание функции посредством полного набора его коэффициентов Фурье, вероятностное мероввведение на классах функции, востановление функций в среднем квадратическом.

DOI: https://doi.org/10.32523/bulmathenu.2025/1.2

2000 Mathematics Subject Classification: 41A65

1. ВВЕДЕНИЕ

В современной математике существуют два подхода в задачах восстановления: теоретико-функциональный и теоретико-вероятностный. Первый подход заключается, по существу, в нахождении наилучших в том или ином смысле агрегатов приближения, когда за меру действенности вычислительных агрегатов на каком-либо функциональном компакте принимается максимальное уклонение. Однако может получиться так, что «плохо»

[1]Работа выполнена в рамках проекта No. AP19680525, финансируемого Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан

восстанавливаемых функций «мало», но они дают «большую» погрешность – этот эффект на примере поведения положительной непрерывной числовой функции на отрезке ясным образом демонстрирует Теорема о среднем значении функции в Курсе математического анализа. Что в переносе с отрезка на функциональный компакт приводит ко второму подходу, своеобразие которого состоит в том, что сами утверждения об отклонении вычислительных агрегатов от истинного значения приближаемого объекта имеют совершенно иной вид.

Именно, оценивается интеграл по вероятностной мере от погрешности отклонения вычислительных агрегатов от истинного значения приближаемого объекта, в котором в качестве переменной интегрирования выступает функция, пробегающая заданный компакт (см. [1-8] и имеющуюся в них библ.).

Ранее изучалась эффективность квадратурных формул относительно меры Винера и некоторых других мер на классах функций, в контексте сравнения с методом Монте-Карло, здесь же задача восстановления функций.

2. НЕОБХОДИМЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Пусть даны число $s\,(s=1,2,\dots)$ и положительная последовательность $g\equiv\{g_{m_1,\dots,m_s}\}_{(m_1,\dots,m_s)\in Z^s}$. Определим класс $W(g)$ суммируемых и 1-периодических по каждой из s переменных функций $f(x)=f(x_1,\dots,x_s)$ таких, что

$$\sum_{(m_1,\dots,m_s)\in Z^s}\left|\widehat{f}\,(m_1,\dots,m_s)\right|^2 g^2_{m_1,\dots,m_s}\le 1, \tag{1}$$

где $(m,x)=x_1m_1+\dots+x_sm_s$,

$$\widehat{f}\,(m)=\widehat{f}\,(m_1,\dots,m_s):=\int_0^1\dots\int_0^1 f\,(x_1,\dots,x_s)\,e^{-2\pi i(m,x)}dx_1\dots dx_s$$

– тригонометрические коэффициенты Фурье- Лебега.

Сразу же отметим, что в случае сходимости ряда

$$\sum_{m\in Z^s} g_m^{-2}$$

класс $W(g)$ состоит из непрерывных функций с абсолютно сходящимися тригонометрическими рядами Фурье

$$\sum_{m\in Z^s}\left|\widehat{f}(m)\right|\le\left(\sum_{m\in Z^s}\left|\widehat{f}\,(m)\right|^2 g_m^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{m\in Z^s} g_m^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Приведем примеры классических классов, содержащихся в $W(g)$.

Полагая здесь и всюду ниже $\overline{m}_j=max\{|m_j|\,;1\}$, при $g_m=\left(\overline{m}_1^2+\dots+\overline{m}_s^2\right)^{\frac{r}{2}}$ получаем

Класс Соболева $W_2^r\,(0,1)^s\,(r>0,s=1,2,\dots)$, по определению, есть множество всех 1-периодических по каждой переменной функций $f(x)=f(x_1,\dots,x_s)$ таких, что

$$\sum_{m\in Z^s}\left|\widehat{f}(m)\right|^2\left(\overline{m}_1^2+...+\overline{m}_s^2\right)^r\le 1.$$

Случай $g_m=(\overline{m}_1\cdot\ldots\cdot\overline{m}_s)^r$ порождает

Класс Соболева с доминирующей смешанной производной $SW_2^r\,(0,1)^s\,(r>0,s=1,2,\dots)$, по определению, есть множество всех 1- периодических по каждой переменной функций $f(x)=f(x_1,\dots,x_s)$, для каждой из которых выполнено неравенство

$$\sum_{m\in Z^s}\left|\widehat{f}(m)\right|^2(\overline{m}_1\cdot\ldots\cdot\overline{m}_s)^{2r}\leq 1.$$

Установим взаимооднозначное соответствие

$$\widehat{f}\,(m)=\int\limits_{[0,1]^s}f\,(x)\,cos2\pi\,(m,x)\,dx+i\int\limits_{[0,1]^s}f\,(x)\,sin2\pi\,(m,x)\,dx\equiv a_m+ib_m\leftrightarrow y_m=(a_m,b_m)\in R^2 \tag{2}$$

между множествами $W\,(g)$ и при $|y_m|^2=a_m^2+b_m^2$

$$\Omega\,(g)=\left\{\{y_m\}_{m\in Z^s}:\sum_{m=(m_1,\ldots,m_s)\in Z^s}|y_m|^2\,g_m^2\leq 1\right\}. \tag{3}$$

Определим меру Банаха на множестве s-мерных последовательностей $\Omega\,(g)$, стало быть, в силу (2), и на функциональном классе $W\,(g)$.

Пусть $\Gamma\equiv\{\Gamma_k\}_{k=1}^{+\infty}$ есть возрастающая последовательность непустых конечных множеств $\Gamma_k\subset Z^s$, объединение которых есть все Z^s. Через $\nu_k=:|\Gamma_k|$ обозначим число точек в Γ_k.

Пусть $j(m)$ есть последовательное фиксированное упорядочение Γ_1, затем $\Gamma_2\setminus\Gamma_1,\ldots,\Gamma_k\setminus\Gamma_{k-1},\ldots$. Тогда каждый набор ($s$-мерную последовательность)

$$y=\{y_m\}_{m\in Z^s} \tag{4}$$

комплексных чисел, с учетом равенства $y_m=a_{j(m)}+ib_{j(m)}$, будем считать представленной в виде числовой последовательности

$$y=(a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n\,,\ldots). \tag{5}$$

Через $\Omega(g;\Gamma)$ обозначим множество всех наборов (1)-(5) таких, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)\cdot g_n^2\leq 1,$$

где $\{g_n\}_{n=1}^{+\infty}$ есть подобное (4)- (5) разложение $\{g_{m_1,\ldots,m_s}\}_{(m_1,\ldots,m_s)\in Z^s}$ в числовую одномерную последовательность по $\{\Gamma_k\}_{k=1}^{+\infty}$.

Пусть

$$M_k=\left\{(a_1,b_1,\ldots,a_{\nu_k},b_{\nu_k})\in R^{2\nu_k}:\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)\cdot g_n^2\leq 1\right\},$$

а $L\,(M_k,\mu_k)$ есть σ-алгебра всех измеримых в смысле $2\nu_k$-мерной меры μ_k подмножеств E_k множества $M_k\subset R^{2\nu_k}$.

Измеримое пространство $\Omega(g;\Gamma)$ определим как наименьшую σ-алгебру в $\Omega(g)$, содержащую σ-алгебру $L\,(M_k,\mu_k)$ цилиндрических множеств $(k=0,1,2,\ldots,E_k\in L\,(M_k,\mu_k))$

$$S\,(E_k)=\{(a_1,b_1,\ldots,a_{\nu_k},b_{\nu_k},\ldots)\in\Omega(g):(a_1,b_1,\ldots,a_{\nu_k},b_{\nu_k})\in E_k\}.$$

Согласно Общей теореме Колмогорова о продолжении меры [9],

Каждая из вероятностных мер μ *на измеримом пространстве* $\Omega(g;\Gamma,\mu)$ *однозначно определяется заданием последовательности вероятностных мер* μ_k *на* M_k *таких, что для всех* $k(k=0,1,2,\ldots)$ *и всех* $E_k\in L\,(M_k,\mu_k)$ *наряду с равенством*

$$\mu\left(S\left(E_k\right)\right)=\mu_k\left(E_k\right)$$

выполнено следующее условие согласованности $(l=1,2,...)$:

$$\mu_k\left(E_k\right)=\mu_{k+l}\left\{\left(a_1,b_1,...,a_{\nu_{k+l}},b_{\nu_{k+l}}\right)\in R^{2\nu_{k+l}}:\left(a_1,b_1,...,a_{\nu_k},b_{\nu_k}\right)\in E_k,\sum_{n=0}^{\nu_{k+l}}\left(a_n^2+b_n^2\right)g_n^2\leq 1\right\}. \tag{6}$$

Далее, в случае абсолютно непрерывных, относительно лебеговой, мер μ_k условия (6) приобретают более обозримый вид, позволяющий эффективно строить соответствующие меры.

Именно, в силу теоремы Радона-Никодима для каждого k найдутся определенные на M_k измеримые в смысле $2\nu_k$ -мерной меры Лебега неотрицательные функции $\varphi_k\left(a_1,b_1,...,a_{\nu_k},b_{\nu_k}\right)$ такие, что

$$\mu_k\left(E_k\right)=\int_{E_k}\varphi_k, \tag{7}$$

и тогда для μ_k -измеримых множества $T\subset M_k$ и функции $\psi: M_k\mapsto R^1$

$$\int_T\psi\left(a_1,b_1,...,a_{\nu_k},b_{\nu_k}\right)d\mu_k\left(a_1,b_1,...,a_{\nu_k},b_{\nu_k}\right)=$$
$$=\int_T\psi\left(a_1,b_1,...,a_{\nu_k},b_{\nu_k}\right)\varphi_k\left(a_1,b_1,...,a_{\nu_k},b_{\nu_k}\right)da_1db_1...da_{\nu_k}db_{\nu_k}. \tag{8}$$

Легко видеть, что тогда условия согласованности (6) перейдут в условия

$$\varphi_k\left(a_1,b_1,...,a_{\nu_k},b_{\nu_k}\right)=\int_{A_k}\varphi_{k+1}\left(a_1,b_1,...,a_{\nu_{k+1}},b_{\nu_{k+1}}\right)da_{\nu_k+1}db_{\nu_k+1}\dots da_{\nu_{k+1}}db_{\nu_{k+1}}, \tag{9}$$

где

$$A_k{=}A_k\left(a_1,b_1,...,a_{\nu_k},b_{\nu_k}\right){=}\left\{\left(a_{\nu_k+1},b_{\nu_k+1},\dots,a_{\nu_{k+1}},b_{\nu_{k+1}}\right):\sum_{n=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}}\left(a_n^2+b_n^2\right)g_n^2\leq 1-\sum_{n=1}^{\nu_k}\left(a_n^2+b_n^2\right)g_n^2\right\}.$$

В свою очередь, функции φ_k, удовлетворяющие условиям (7) и (9), можно задать посредством функций $t_k\left(a_1,b_1,...,a_{\nu_k},b_{\nu_k}\right)$ таких, что

$$\int_{A_k}t_{k+1}\left(a_1,b_1,...,a_{\nu_{k+1}},b_{\nu_{k+1}}\right)da_{\nu_k+1}db_{\nu_k+1}\dots da_{\nu_{k+1}}db_{\nu_{k+1}}=1 \tag{10}$$

для почти всех $\left(a_1,b_1,...,a_{\nu_k},b_{\nu_k}\right)\in M_k$, тогда

$$\varphi_k\left(a_1,b_1,...,a_{\nu_k},b_{\nu_k}\right)=\prod_{n=1}^{k}t_n\left(a_1,b_1,...,a_{\nu_n},b_{\nu_n}\right), \tag{11}$$

причем выполнение условий (7), (9) эквивалентно выполнению условий (10) -(11).

В итоге, вероятностное меровведение на классе функций на основе понимания функции как полного набора тригонометрических коэффициентов Фурье-Лебега проводится по схеме (1)-(11).

При заданных $\{g_m\}_{m\in Z^s}$, $\Gamma\equiv\{\Gamma_k\}_{k=1}^{+\infty}$ с $\Gamma_k\subset\Gamma_{k+1}\subset Z^s$, мощность $|\Gamma_k|=\nu_k$, $\bigcup_{k=1}^{\infty}\Gamma_k=Z^s$, $\Phi\equiv\left\{\varphi_k\left(a_1,b_1,...,a_{\nu_k},b_{\nu_k}\right)\right\}_{k=1}^{+\infty}$ от функции $f(x)$ как соответствия по правилу f эквивалентным образом переходим к последовательностям $\left\{\widehat{f}\left(m^{(n)}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ и $\left\{\left(a_n(f),b_n(f)\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$:

$$f(x)\leftrightarrow\left\{\widehat{f}(m)\right\}_{m\in Z^s}\xleftrightarrow{\Gamma\equiv\{\Gamma_k\}_{k=1}^{+\infty}}\left\{\widehat{f}\left(m^{(n)}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}\leftrightarrow\left(\widehat{f}\left(m^{(1)}\right),\ldots,\widehat{f}\left(m^{(\nu_1)}\right),\right.$$
$$\widehat{f}\left(m^{(\nu_1+1)}\right),\ldots,\widehat{f}\left(m^{(\nu_2)}\right),\widehat{f}\left(m^{(\nu_2+1)}\right),\ldots,\widehat{f}\left(m^{(\nu_k+1)}\right),\ldots,$$
$$\left.\widehat{f}\left(m^{(\nu_{k+1})}\right),\ldots\right)\xleftrightarrow{\widehat{f}(m^{(n)})=a_n(f)+b_n(f)}\left\{\left(a_n(f),b_n(f)\right)\right\}_{n=1}^{\infty}=$$
$$=\left(a_1(f),b_1(f),\ldots,a_n(f),b_n(f),\ldots\right)=\left(a_1(f),b_1(f),\ldots,a_{\nu_1}(f),b_{\nu_1}(f),\ldots,\right.$$
$$\left.a_{\nu_k+1}(f),b_{\nu_k+1}(f),...,a_{\nu_{k+1}}(f),b_{\nu_{k+1}}(f),\ldots\right),$$

далее к интегралам

$$\int\limits_{W(g;\Gamma,\Phi)}\psi(f)\,d\mu_W(f)=\int\limits_{\Omega(g;\Gamma,\Phi)}\psi\left(\widehat{f}\left(m^{(1)}\right),\ldots,\widehat{f}\left(m^{(n)}\right),\ldots\right)d\mu_\Omega\left(\widehat{f}\left(m^{(1)}\right),\ldots,\widehat{f}\left(m^{(n)}\right),\ldots\right)=$$
$$=\int\limits_{\substack{\Omega(g;\Gamma,\Phi)=\{(a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n,\ldots):\\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)\cdot g_n^2\le 1\}}}\psi\left(a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n,\ldots\right)d\mu_\Omega\left(a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n,\ldots\right)=$$
$$=\lim_{k\to+\infty}\int\limits_{\substack{\Omega_k(g;\Gamma,\Phi)=\\ =\{(a_1,b_1,\ldots,a_{\nu_k},b_{\nu_k}):\\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)\cdot g_n^2\le 1\}}}\psi\left(a_1,b_1,\ldots,a_{\nu_k},b_{\nu_k},0,\ldots,0,\ldots\right)d\mu_{k,\Omega}\left(a_1,b_1,\ldots,a_{\nu_k},b_{\nu_k},0,\ldots,0,\ldots\right)=$$
$$=\lim_{k\to+\infty}\int\limits_{\substack{M_k=\left\{(a_1,b_1,\ldots,a_{\nu_k},b_{\nu_k})\in R^{2\nu_k}:\right.\\ \left.\sum_{j=1}^{\nu_k}\left(a_j^2+b_j^2\right)\cdot g_j^2\le 1\right\}}}\psi\left(a_1,b_1,\ldots,a_{\nu_k},b_{\nu_k},0,\ldots,0,\ldots\right)\varphi_k\left(a_1,b_1,\ldots,a_{\nu_k},b_{\nu_k}\right)$$
$$da_1db_1\ldots da_{\nu_k}db_{\nu_k}. \tag{12}$$

Таким образом, задание целого положительного s, s-мерной положительной последовательности $g\equiv\{g_{m_1,\ldots,m_s}\}_{(m_1,\ldots,m_s)\in Z^s}$, возрастающей к Z^s последовательности непустых конечных множеств $\Gamma\equiv\{\Gamma_k\}_{k=1}^{+\infty}$ и последовательность функций $\Phi\equiv\{\varphi_k\}_{k=1}^{+\infty}$, порождающие согласованные меры $\mu_k(E):=\int_E\varphi_k$ функциональный класс $W(g)$ превращает в пространство с мерой Банаха, которую обозначим через $W(g;\Gamma,\Phi)$.

Отметим, что случай, когда $t_k\left(a_1,b_1,\ldots,a_{\nu_k},b_{\nu_k}\right)$ не зависит от $\left(a_{\nu_{k-1}+1},b_{\nu_{k-1}+1},...,a_{\nu_k},b_{\nu_k}\right)$ изучался С. Банахом [6] (см. также [7-8]).

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Через $\Lambda_k(x;f)=\sum_{m\epsilon\Gamma_k}\widehat{f}(m)\,e^{2\pi i(m,x)}$ обозначим конечную сумму, составленную из членов тригонометрического ряда Фурье-Лебега суммируемой и 1-периодической по каждой из s переменных функции $f(x)$.

Справедлива

Основная теорема. *Предположим, что задано функциональное пространство* $W(g;\Gamma,\Phi)$ *с мерой Банаха* $\mu\equiv\mu_{g,\Gamma,\Phi}=\mu_W$. Тогда для среднего квадратического по мере Банаха $L^2(0,1)^s$ - *уклонения функции* $f(x)$ *от конечной суммы* $\Lambda_k(x;f)$ *членов ее тригонометрического ряда Фурье имеет место равенство* $(g_i=\tilde{g}_{2i-1}=\tilde{g}_{2i})$

$$\int\limits_{W(g;\Gamma,\Phi)}\left\|f(x)-\Lambda_k(x;f)\right\|^2_{L^2(0,1)^s}d\mu_{g,\Gamma,\Phi}(f)=$$

$$= \sum_{t=k+1}^{\infty} \sum_{\substack{n = 2\nu_{t-1}+1 = \\ = 2|\Gamma_{t-1}|+1}}^{2\nu_t = 2|\Gamma_t|} \int \cdots \int_{A_t} x_n^2 \varphi_t (x_1, \ldots, x_{2\nu_t})\, dx_1 \ldots dx_{2\nu_t},$$

где $A_t = \left\{ (x_1, \ldots, x_{2\nu_t}) : \sum\limits_{i=1}^{2\nu_t} x_i^2 \tilde{g}_i^2 \le 1 \right\}$.

Доказательство. Применяя теорему Парсеваля, получаем

$$\|f(x) - \Lambda_k(x; f)\|^2_{L^2(0,1)^s} = \left\| \sum_{n \epsilon Z^s \setminus \Gamma_k} \widehat{f}(n)\, e^{2\pi i (n,x)} \right\|^2_{L^2(0,1)^s} = \sum_{n \epsilon \epsilon Z^s \setminus \Gamma_k} \left| \widehat{f}(n) \right|^2.$$

Отсюда

$$\int\limits_{W(g;\Gamma,\Phi)} \|f(x) - \Lambda_k(x; f)\|^2_{L^2(0,1)^s}\, d\mu_W(f) = \int\limits_{W(g;\Gamma,\Phi)} \sum_{n \epsilon \epsilon Z^s \setminus \Gamma_k} \left| \widehat{f}(n) \right|^2 d\mu_W(f) =$$

$$= \int\limits_{W(g;\Gamma,\Phi)} \sum_{t=k+1}^{\infty} \sum_{n \epsilon \Gamma_t \setminus \Gamma_{t-1}} \left| \widehat{f}(n) \right|^2 d\mu_W(f) = \sum_{t=k+1}^{\infty} \int\limits_{W(g;\Gamma,\Phi)} \sum_{n \epsilon \Gamma_t \setminus \Gamma_{t-1}} \left| \widehat{f}(n) \right|^2 d\mu_W(f) =$$

$$\overset{(12)}{=} \sum_{t=k+1}^{\infty} \sum_{\substack{n = 2\nu_{t-1}+1 = \\ = 2|\Gamma_{t-1}|+1}}^{2\nu_t = 2|\Gamma_t|} \int \cdots \int_{\substack{(x_1, \ldots, x_{2\nu_t}) : \\ \sum_{i=1}^{2\nu_t} x_i^2 \tilde{g}_i^2 \le 1}} x_n^2 \varphi_t (x_1, \ldots, x_{2\nu_t})\, dx_1 \ldots dx_{2\nu_t}.$$

Теорема доказана.

Отсюда, в частности, в случаях $g_m = \left(\overline{m}_1^2 + \ldots + \overline{m}_s^2\right)^{\frac{r}{2}}$ и $g_m = (\overline{m}_1 \cdot \ldots \cdot \overline{m}_s)^r$ следуют соответствуюшие результаты для классов $W_2^r(0,1)^s$ и $SW_2^r(0,1)^s$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье представлена схема вероятностного меровведения на классах функций с более подробным изложением в конструктивных деталях, вынесенных в Основную теорему, которая допускает многочисленные конкретизации, включая приведенные здесь классы W и SW.

Вклад авторов: вклад авторов равный.

Список литературы

1 Сульдин А.В. Мера Винера и ее приложения к приближенным методам // Изв. ВУЗов. Математика-I:-1959. -№ 6. -С. 145-158; II: - 1960. -№ 5. -С.165-179.

2 Воронин С.М., Скалыга В.И. О квадратурных формулах // Докл. АН СССР. - 1984. - Т. 246. - № 5. - С. 1038-1041.

3 Smale S. On the efficiency of algorithms of analysis // Bull.Amer.Math.Soc. - 1985. - V.13. - № 2. - P. 87-121.

4 Traub J.F., Wasilkovski G.W, Wozniakovski H. Information-Based Complexity. - New York: Academic Press, 1988.

5 Темиргалиев Н. Концепция С.М.Воронина в проблеме сравнений детерминированных и случайных вычислений в одних и тех же терминах // Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева. Серия Математика. Компьютерные науки. Механика. -2019. -Т. 128. № 3. -С. 8-33.

6 Банах С. Интеграл Лебега в абстрактном пространстве// в кн. Сакс С. Теория интеграла. - М.: ИЛ, 1949. - С. 463-477.

7 Воронин С.М., Темиргалиев Н. Об одном приложении меры Банаха к квадратурным формулам // Матем. заметки. - 1986. -Вып. 1. - Т. 39. - С. 52-59.

8 Темиргалиев Н. О построении вероятностных мер на функциональных классах // Труды Матем. ин-та им. В.А. Стеклова РАН. - 1997. - Т. 218. - С. 397-402.

9 Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. - М.: Наука, 1974.

Функцияларды тригонометриялық Фурье қатарларының мүшелерінің ақырлы қосындылары арқылы жуықтаудың Банах өлшемі бойынша орташа квадраттық қателіктері

Н. Наурызбаев, А. Шоманова, Н. Темірғалиев
Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің Теориялық математика және ғылыми есептеулер институты, Қажымұқан көш., 13, Астана, 010008, Қазақстан

Аннотация. Мақалада функцияларды олардың тригонометриялық Фурье қатарларының ақырлы қосындылары арқылы «*үлкен коэффициенттер спектрін*» анықтау мүмкін еместігінен Фурье қатарларының кез келген «*ақырлы қосындыларын*» зерттеу қажеттілігімен ерекшеленетін функциялар класстарында анықталған ықтималдық өлшемдер бойынша жуықтау мәселесі қарастырылады.

Тригонометриялық Фурье коэффициенттеріне жеке бағалар берілген функциялар класстарында ықтималдық өлшемдерді енгізу мәселесі В.М. Тихомировтың монографиясындағы «*Функциялар екі түрлі тәсілмен беріледі: бірі – ереже түрінде болса, екіншісі – тригонометриялық Фурье коэффициенттерінің толық жиыны арқылы*» деген қағидасын негізге алады. Қалғаны – "техникалық мәселе" ғана.

Фурье коэффициенттерінің тізбектеріне өту және А.Н. Колмогоровтың өлшемдерді ақырлы өлшемді кеңістіктерден ақырсыз өлшемді кеңістікке дейін жалғастыру туралы теоремасын қолдану арқылы Фурье коэффициенттері салмақталған класстарда ықтималдық өлшем енгізуге мүмкіндік берілді, оны алғаш рет Стефан Банах Станислав Сакстың "Интегралдар теориясы" кітабындағы қосымшада құрды. Сонымен қатар, мақалада ықтималдық өлшемді енгізу процесінің кейбір конструктивті қырлары да ұсынылған.

Түйінді сөздер: Фурье- Лебег тригонометриялық қатарлары, функцияны оның Фурье коэффициенттерінің толық жиыны арқылы беру, функциялар класстарында ықтималдық өлшемін енгізу, орташа квадраттық мағынада функцияны жуықтау.

Average Square Errors by Banach Measure of Recovery of Functions by Finite Sums of Terms of Their Trigonometric Fourier Series

N. Nauryzbaev, A. Shomanova, N. Temirgaliyev
Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Kazhymukan str., 13, Astana, 010008, Kazakhstan

Abstract. The paper considers the problem of recovering functions using finite sums of terms of their trigonometric Fourier series with respect to probability measures on function classes characterized by the inability to determine a "*spectrum of large coefficients*". This difficulty motivates the consideration of arbitrary "*finite sums of terms from the Fourier series*".

The problem of defining probability measures on classes with individual estimates for trigonometric Fourier coefficients was resolved based on the fundamental nature of the property "*A function can be defined in two ways: either by a rule or by the complete set of its trigonometric Fourier coefficients*", as discussed in the monograph by V.M. Tikhomirov, The remaining steps were largely a matter of technical execution.

The transition to sequences of Fourier coefficients, using A.N. Kolmogorov's extension theorem (on the extension of measures from finite-dimensional to infinite-dimensional spaces), allowed the introduction of a probability measure on classes with weighted Fourier coefficients, ultimately leading to the Banach measure – first constructed by Stefan Banach in the appendix to Stanisław Saks' book "Theory of the Integral". This paper also proposes some constructive details of the process of probabilistic measure

Keywords: Fourier-Lebesgue trigonometric series, defining a function employing a complete set of its Fourier coefficients, probabilistic measurement on function classes, recovery of functions in average square.

Список литературы

1 Suldin A.V. Mera Vinera i eye prilozheniya k priblizhennym metodam [Wiener's measure and its appli- cations to approximate methods], Izv. VUZov[Izv. Universities]. Matematika-I: (6), 145-158(1959); II: (5), 165-179(1960).

2 Voronin S.M.. Skalyga V.I. O kvadraturnykh formulakh [On quadrature formulas], Dokl. AN SSSR [Dokl. USSR Academy of Sciences], 246(5), 1038-1041(1984).

3 Smale S. On the efficiency of algorithms of analysis, Bull. Amer. Math. Soc., 13(2), 87-121(1985).

4 Traub J.F., Wasilkovski G.W, Wozniakovski H. Information-Based Complexity. (Academic Press, New York, 1988).

5 Temirgaliyev N. The concept of S.M.Voronin in the problem of comparisons of deterministic and random computation in the same terms, Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University.Mathematics. Computer Science. Mechanics Series. 2019. Vol. 128. № 3. P. 8-33.

6 Banakh S. Integral Lebega v abstraktnom prostranstve [The Lebesgue integral in abstract space]// v kn. Saks S. Teoriya integrala [in the book. Saks S. Theory of the integral]. Moscow, IL. 1949. P. 463-477

7 Voronin S.M., Temirgaliev N. Application of Banach measure to quadrature formulas, Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR, 39(1), 30-34(1986).

8 Temirgaliyev N. O postroyenii veroyatnostnykh mer na funktsionalnykh klassakh[On the construction of probability measures on functional classes], Trudy Matem. in-ta im. V.A. Steklova RAN [Proceedings of a mathematical institute V.A. Steklov RAS.],218, 397-402(1997).

9 Kolmogorov A.N. Basic concepts of probability theory [Osnovnyye ponyatiya teorii veroyatnostey]. (Nauka, Moscow, 1974).

Сведения об авторах:

Наурызбаев Нурлан Жумабаевич – PhD, Старший научный сотрудник Института теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Кажымукана, 13, Астана, 010008, Казахстан.

Шоманова Анар Аманаевна – Автор для корреспонденции, Старший научный сотрудник Института теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Кажымукана, 13, Астана, 010008, Казахстан.

Темиргалиев Нурлан – доктор физико-математических наук, профессор, директор Института теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Кажымукана, 13, Астана, 010008,Казахстан

Nauryzbaev Nurlan – PhD, Senior Researcher, Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Kazhymukan str., 13, Astana, 010008, Kazakhstan.

Shomanova Anar – Corresponding author, Senior Researcher, Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Kazhymukan str., 13, Astana, 010008, Kazakhstan.

Temirgaliyev Nurlan – Prof., Doctor of Phys. -Math. Sciences, Director of the Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Kazhymukan str., 13, Astana, 010008, Kazakhstan.

Поступила: 13.01.2025. После редакции: 23.02.2025.
Одобрена: 13.03.2025. Доступна онлайн: 31.03.2025.