



ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН
MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN



Л. Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ
ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ
ЕВРАЗИЙСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Л. Н. ГУМИЛЕВА
GUMILYOV EURASIAN
NATIONAL UNIVERSITY



Студенттер мен жас ғалымдардың
«Ғылым және білім - 2015»
атты X Халықаралық ғылыми конференциясының
БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ
X Международной научной конференции
студентов и молодых ученых
«Наука и образование - 2015»

PROCEEDINGS
of the X International Scientific Conference
for students and young scholars
«Science and education - 2015»

УДК 001:37.0
ББК72+74.04
Ғ 96

Ғ96

«Ғылым және білім – 2015» атты студенттер мен жас ғалымдардың X Халық. ғыл. конф. = X Межд. науч. конф. студентов и молодых ученых «Наука и образование - 2015» = The X International Scientific Conference for students and young scholars «Science and education - 2015». – Астана: <http://www.eni.kz/ru/nauka/nauka-i-obrazovanie-2015/>, 2015. – 7419 стр. қазақша, орысша, ағылшынша.

ISBN 978-9965-31-695-1

Жинаққа студенттердің, магистранттардың, докторанттардың және жас ғалымдардың жаратылыстану-техникалық және гуманитарлық ғылымдардың өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

The proceedings are the papers of students, undergraduates, doctoral students and young researchers on topical issues of natural and technical sciences and humanities.

В сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов и молодых ученых по актуальным вопросам естественно-технических и гуманитарных наук.

УДК 001:37.0
ББК 72+74.04

ISBN 978-9965-31-695-1

©Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия
ұлттық университеті, 2015

Теорема. $f - k[X]$ - тің координатасы болса, онда $\frac{\partial f}{\partial X_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial X_n}$ унимодуляр жол болады, яғни $a_i \in k[X]$ табылып,

$$1 = a_1 \frac{\partial f}{\partial X_1} + a_2 \frac{\partial f}{\partial X_2} + \dots + a_n \frac{\partial f}{\partial X_n}$$

теңдігі орындалады.

Дәлелдеуі. $F = (f, F_2, \dots, F_n): k^n \rightarrow k^n$ керіленетін полиномиалды бейнелеу болсын, онда $f, F_2, \dots, F_n \in k[X]$ -тің координат жүйесі болады. $\det JF \in k^*$ шартынан

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial X_1} & \frac{\partial f}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial f}{\partial X_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial X_1} & \frac{\partial F_2}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial X_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial X_1} & \frac{\partial F_n}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial X_n} \end{vmatrix} = \alpha \in k^*$$

теңдігін аламыз. Енді теңдіктің сол жағындағы анықтауышты бірінші жолы бойынша жіктеп келесі өрнекті аламыз:

$$\frac{\partial f}{\partial X_1} \cdot g_1 + \frac{\partial f}{\partial X_2} \cdot g_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial X_n} \cdot g_n.$$

Ары қарай $\alpha^{-1} \cdot g_i = a_i$ деп алмастырсак, онда ізделінді теңдік шығады.

Осы дәлелдеген тұжырымға мысал ретінде келесі бейнелеуді қарастырайық. k - сипаттамасы 0-ге тең өріс, $F = (f, F_2): k^2 \rightarrow k^2$ бейнелеуі $f = X^n + X + Y$, $F_2 = X^n + Y$ көпмүшелерімен анықталатын болса, онда $G = (G_1, G_2) = (X - Y, Y - (X - Y)^n)$ кері полиномиалды бейнелеу және $f - k[X, Y]$ - тің координатасы болатындығына, ал $\frac{\partial f}{\partial X}, \frac{\partial f}{\partial Y}$ унимодуляр жол екендігіне көз жеткізу қиын емес.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі

1. Van den Essen A. Polynomial automorphisms and the Jacobian Conjecture. Progress in mathematics; Vol. 190. -Basel; Boston; Berlin: Birkhauser, 2000, p. 330
2. Smale S. Mathematical problems for the next century. Math. Intelligencer, 20(1998), №2, p. 7-15.

ӨОЖ 512.55

КӨП АЙНЫМАЛЫДАН ТӘУЕЛДІ КӨПМҮШЕЛІЛЕР САҚИНАСЫНДАҒЫ БӨЛУ АЛГОРИТМІ

Балабеков Мұса

musa_95.2012@mail.ru

Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті механика-математика факультетінің
3-курс студенті, Астана, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі- Ш.Ө.Абуталипова

$k[x_1, \dots, x_n]$ – K өрісіндегі $x_1, \dots, x_n$ айнымалылардан тәуелді көпмүшелер сақинасы болсын. Біз бір айнымалыдан тәуелді көпмүшелер сақинасында бөлу алгоритімін білеміз [3]. Біздің мақсатымыз - $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ көпмүшесін $f_1, \dots, f_n \in k[x_1, \dots, x_n]$ көпмүшелеріне бөлуді үйрену [1]. Яғни f -ті келесі түрде жазу:

$$f = a_1 f_1 + \dots + a_s f_s + r$$

Мұндағы $a_1, \dots, a_s$ «бөлінділері» және r қалдығы $k[x_1, \dots, x_n]$ -ға тиісті. Бөлу алгоритмін қолданғанда ең қиыны қалдықты анықтау, сондықтан біз лексикографиялық реттеуді қолданамыз.

Анықтама 1. $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ болсын. $\alpha \succ_{lex} \beta$ деп айтамыз, егер ең сол жақ шеткі вектор координатасы $\alpha - \beta = \mathbb{Z}^n$ оң сан болса. Егер $\alpha \succ_{lex} \beta$ болса, онда $x^\alpha \succ_{lex} x^\beta$ деп жазамыз. Мысал:

а) $(1, 2, 0) \succ (0, 3, 4)$, себебі $\alpha - \beta = (1, -1, 4)$

б) Алфавитте $a \succ \dots \succ y \succ z$ реттелу болады: $\text{bit} \succ \text{cut}$ т.с.с.

Бұл алгоритмнің идеясы, біз білетін, бір айнымалыдан тәуелді көпмүшелікті бөлу алгоритмі секілді жасалады: мономиалды реттелген f полиномының ең үлкен дәрежелі мүшесін f_i -ге қандай да бір мономға көбейтіп біртіндеп жойып отыруымыз керек. Бұл моном сәйкесінше a_i мүшесі болады. Енді мысалдармен көрсетелік.

Мысал 1. lex -реттеуі $x \succ y$ шарты бойынша реттелген $F = xy^2 + 1$ көпмүшесін $f = xy + 1$ көпмүшесіне бөлелік. Бөлу үшін бір айнымалы жағдайындағыдай схема қолданамыз:

$$\begin{array}{r|l} xy^2 + 1 & xy + 1 \\ \hline xy^2 + y & a: y \\ \hline -y + 1 & \end{array}$$

$$xy^2 + 1 = y(xy + 1)$$

Мысал 2. lex -реттеуі $x \succ y$ шарты бойынша реттелген $F = x^2y + xy^2 + y^2$ көпмүшесін $f_1 = xy - 1$ және $f_2 = y^2 - 1$ көпмүшелеріне бөлуді қарастырайық.

$$a_1: x + y$$

$$a_2:$$

$$\begin{array}{r|l} xy - 1: & x^2y + xy^2 + y^2 \\ y^2 - 1: & x^2y - 1 \\ \hline & xy^2 + x + y^2 \\ & xy^2 - y \\ \hline & x + y^2 + y \end{array}$$

Енді $LT(f_1) = xy$ және $LT(f_2) = y^2$ болғандықтан $LT(x + y^2 + y) = x$ -ті бөле алмайды. Бірақ $x + y^2 + y$ - қалдық емес, себебі y^2 -ты $LT(f_2)$ бөле алады. Сондықтан x -ті қалдыққа жіберсек онда бөлуді жалғастыра аламыз. Ол үшін біз оң жаққа қалдықтарды жазып қою

үшін тағы бір баған орналастырамыз. Біз радикалдан төменде орналасқан, яғни бөлуді жалғастырайын дер отырған полиномды *аралық бөлінгіш* деп аталады. Бөлу үдерісі осы аралық бөлінгіш нөлге тең болғанға дейін жалғасады. Мысалдағы келесі қадам x -ті қалдықтар бағанына жіберемізде бөлуді жалғастыра береміз. Егер біз аралық бөлінгішті $LT(f_1)$ және $LT(f_2)$ бөле алса әдеттегідей қадамдарды орындай береміз, ал олай болмаса үлкен мүшені қалдықтар қатарына жібереміз де т.с.с жалғастыра береміз. Олай болса:

$$\begin{array}{r}
 a_1 \quad x+y \\
 a_2: \quad 1 \\
 \begin{array}{r|l}
 xy-1 & x^2y+xy^2+y^2 \\
 y^2-1 & x^2y-x \\
 \hline
 & xy^2+x+y^2 \\
 & xy^2-y \\
 \hline
 & x+y^2+y \\
 \hline
 & y^2+y \rightarrow x \\
 & y^2-1 \\
 \hline
 & 0 \rightarrow x+y+1
 \end{array}
 \end{array}$$

Осылайша, қалдық $x+y+1$ тең, осыдан

$$x^2y+xy^2+y^2=(x+y) \cdot (xy-1)+1 \cdot (y^2-1)+x+y+1 \quad (1)$$

Бұл мысал арқылы алгоритмді толық сипаттай аламыз. Сонымен қоса қалдықтың да қасиетін анық айқындап тұр: қалдықтың ешқандай мүшесін қандайда бөлгіштің ең үлкен мүшесіне бөлінбеу керек.

Теорема 1 ($k[x_1, \dots, x_n]$ бөлу алгоритмі. $F=(f_1, \dots, f_s)$ – реттелген ($Z_{>0}^n$ дегі $>$ мономиалды реттеуі) $k[x_1, \dots, x_n]$ тізбегі болсын. Онда кез келген $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ полиномы мына түрде жазыла алады:

$$f=a_1 f_1 + \dots + a_s f_s + r \quad (2)$$

Мұндағы $a_i, r \in k[x_1, \dots, x_n]$ және не $r=0$, r -мономдардың сызықты комбинациясы (коэффициенттері k дан алынған), сонымен қоса $LT(f_1), \dots, LT(f_s)$ ең үлкен мүшелерінеде бөлінбейді. F -ті f полиномына бөлгендегі қалған қалдықты r деп атаймыз. $a_i f_i \neq 0$ болса, онда

$$\text{multideg}(f) \geq \text{multideg}(a_i f_i).$$

Дәлелденуі. $a_1, \dots, a_s$ және r полиномдарының бар болуын алгоритмді ашып жазу арқылы көрсетуге болады. Алгоритмнің формальді сипаттауын көрсетелік:

КІРҮ: $f_1, \dots, f, f$

ШЫҒУ: $a_1, \dots, a_s, r$

$a_1 := 0; \dots; a_s := 0, r := 0$

$p := f$

WHILE $p \neq 0$ DO

$i := 1$

$\text{бөлінеді} := \text{false}$

WHILE $i \leq s$ AND $\text{бөлгіші бар} = \text{false}$ DO

IF $LT(f_i)$ бөледі $LT(p)$ THEN

$a_i := a_i + LT(p) / LT(f_i)$

$p := p - (LT(p) / LT(f_i)) f_i$

$\text{бөлгіші бар} := \text{true}$

ELSE $i := i + 1$

IF $\text{бөлгіші бар} = \text{false}$ THEN

$r := r + LT(p)$

$p := p - LT(p)$

Бұл алгоритмде әр қадамдағы p айнымалысы аралық бөлінгіштің, r қалдықтың, ал $a_1, \dots, a_s$ бөліндінің ролін атқарады.

Мысал 3. $F = x^2y + xy^2 + y^2$ көпмүшесін $f_1 = y^2 - 1$ және $f_2 = xy - 1$ көпмүшелеріне бөлейік. Бұл мысал алдыңғы мысал 2 ден тек бөлгіштердің орнынан ғана айырмашылығы бар.

a_1	$x+1$	r
a_2 :	x	
$y^2 - 1$	$\left \begin{array}{l} x^2y + xy^2 + y^2 \\ x^2y - x \end{array} \right.$	
$xy - 1$		
	$xy^2 + x + y^2$	
	$xy^2 - x$	
	$2x + y^2$	

$$\begin{array}{rcl} \hline y^2 & \rightarrow & 2x \\ y^2 - 1 & & \\ \hline 0 & \rightarrow & 2x+1 \end{array}$$

Келесі түрдегі өрнекті аламыз:

$$x^2y + xy^2 + y^2 = (x+1) \cdot (xy-1) + x \cdot (y^2-1) + 2x+1 \quad (3)$$

Егер біз (1) және (3) салыстыратын болсақ, онда біздің қалдықтарымыздың тең емес екеніне көз жеткіземіз.

Бұл мысал r қалдықтың $LT(f_1), \dots, LT(f_s)$ ең үлкен мүшелеріне бөлінбеуі керек деген шартқа біркелкі тәуелді емес екенін аңғаруға болады. Алайда, бұл барлық уақытта да әртүрлі қалдық шығады деген сөз емес. Бізге тек реттеуді сақтап отыру керек.

Көпмүшелер сақинасында бұл бөлу алгоритмі идеалға тиістілігін шешу үшін қолданады. Егер $F = (f_1, \dots, f_s)$ көпмүшесін f көпмүшесіне бөлгенде қалдық $r=0$ болса, яғни

$$f = a_1 f_1 + \dots + a_s f_s$$

Онда $f \in \langle f_1, \dots, f_s \rangle$. Басқаша айтқанда, $r=0$ - бұл идеалға тиісті болудың жеткілікті шарты болады.

Сондай-ақ бұл бөлу алгоритмі геометрияда кез келген қисықтардың теңдеулерінен (екі не одан да көп айнымалыдан тәуелді) теңдеулер жүйесін құрсақ, осы теңдеулер жүйесін шешуге, яғни барлығында бірдей қандай нүктелер жататынын не жатпайтынын көрсете алады.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі

- 1) Cox D. Little J. O'Shea D. Using Algebraic Geometry, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 1998, 687 p.
- 2) Buchberger B. Grebner bases: an algorithmic method in polynomial ideal theory, in: Multidimensional Systems Theory, ed. by Bose N.K., D.Reidel Publishing Company, Dordrecht, 184-232. 1985.
- 3) Винберг Э.Б. Начала алгебры. М.:МЦНМО, МК НМУ, «УРСС», 1998. 192 с.

УДК 517. 52

ОБ УСЛОВИЯХ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ КОСИНУС ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

¹Бекболат Бота, ²Атабаева Айгерим

b.bota90@mail.ru, a.amora@list.ru

¹Магистрант 2-го курса ЕНУ им. Л.Н. Гумилева,

²Студент 4-го курса ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан

Научный руководитель – Н.А.Бокаев