ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН
MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ
ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ
ЕВРАЗИЙСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Л.Н. ГУМИЛЕВА
GUMILYOV EURASIAN
NATIONAL UNIVERSITY

ЖАС ҒАЛЫМДАР КЕҢЕСІ

Студенттер мен жас ғалымдардың «Ғылым және білім - 2015» атты X Халықаралық ғылыми конференциясының БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ X Международной научной конференции студентов и молодых ученых «Наука и образование - 2015»

PROCEEDINGS of the X International Scientific Conference for students and young scholars «Science and education - 2015»

УДК 001:37.0
ББК72+74.04
Ғ 96

Ғ96
«Ғылым және білім – 2015» атты студенттер мен жас ғалымдардың Х Халық. ғыл. конф. = Х Межд. науч. конф. студентов и молодых ученых «Наука и образование - 2015» = The X International Scientific Conference for students and young scholars «Science and education - 2015». – Астана: http://www.enu.kz/ru/nauka/nauka-i-obrazovanie-2015/, 2015. – 7419 стр. қазақша, орысша, ағылшынша.

ISBN 978-9965-31-695-1

Жинаққа студенттердің, магистранттардың, докторанттардың және жас ғалымдардың жаратылыстану-техникалық және гуманитарлық ғылымдардың өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

The proceedings are the papers of students, undergraduates, doctoral students and young researchers on topical issues of natural and technical sciences and humanities.

В сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов и молодых ученых по актуальным вопросам естественно-технических и гуманитарных наук.

УДК 001:37.0
ББК 72+74.04

ISBN 978-9965-31-695-1

// Журн. выч. матем. и матем. физ.-1963.-Т.3.-С.370-376.
3. Ульянов П.Л. О классах бесконечно дифференцируемых функций // Матем.сб. -1990.-Т.181, №5.-С.589-609.
4. Темиргалиев Н. Классы $U_s(\beta,\theta,\alpha;\psi)$ и квадратурные формулы // Докл. РАН. 2003. Т. 393. № 5. С. 605-608.

УДК 517.9

ОЦЕНКА БЫСТРОТЫ СХОДИМОСТИ ПРОЦЕССА ШВАРЦА ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО АНАЛОГА УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Есенбеков Болат Талғатұлы
ebtmath@mail.ru
магистрант ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан
Научный руководитель – Базарбеков А.Б.

Сходимость процесса Шварца для весьма общего обыкновенного дифференциального уравнения. Мы рассмотрим одномерный аналог уравнения Гельмгольца

$$y''-k^2 y=f(x), \qquad (1)$$

где $k=const\neq 0$ и рассмотрим для него краевую задачу первого рода

$$y(a)=A,\ y(b)=B, \qquad (2)$$

здесь a, b, A, B - заданные числа, где $a<b$ и $f(x)\in C[a,b]$ - заданная функция.
Функция Грина задачи (1.2.1), (1.2.2) имеет вид [43]

$$G(x,\xi)=\frac{1}{k\ sh k\ (b-a)}\begin{cases} sh k\ (\xi-b)\cdot sh k\ (x-a), & a\le x\le \xi,\\ sh k\ (\xi-a)\cdot sh k\ (x-b), & \xi\le x\le b.\end{cases}$$

Следовательно, единственное решение
$y(x)\in C^2[a,b]$ краевой задачи (1), (2) запишется в виде

$$y(x)=A\frac{sh k\ (x-b)}{sh k\ (a-b)}+B\frac{sh\ k\ (x-a)}{sh\ k\ (b-a)}+$$
$$+\frac{sh\ k\ (x-b)}{k\ sh\ k\ (b-a)}\int_a^x sh\ k\ (\xi-a)\ f(\xi)\,d\xi+\frac{sh\ k\ (x-a)}{k\ sh\ k\ (b-a)}\int_x^b sh\ k\ (\xi-b)\ f(\xi)\,d\xi. \qquad (3)$$

Пусть c и d - два числа, удовлетворяющие неравенствам $a<c<d<b$.
С помощью формул

$$-u''_{i+1}+q(x)u_{i+1}=f(x),\quad x\in(a,d),$$
$$u_{i+1}(a)=A,\ u_{i+1}(d)=v_i(d) \qquad (*)$$
и
$$-v''_{i+1}+q(x)v_{i+1}=f(x),\ x\in(c,b),$$
$$v_{i+1}(c)=u_{i+1}(c),\ v_{i+1}(b)=B, \qquad (*')$$

предыдущего параграфа построим альтернирующий процесс Шварца для уравнения (1) и установим быстроту сходимости этого процесса.

Мы знаем, что погрешности приближенных решений

$$g_i(x) = y(x) - u_i(x) \quad \text{и} \quad h_i(x) = y(x) - v_i(x) \tag{4}$$

являются решениями следующих задач:

$$-g''_{i+1} + k^2 g_{i+1} = 0, \quad x \in (a, d), \tag{5}$$
$$g_{i+1}(a) = 0, \quad g_{i+1}(d) = h_i(d) \tag{6}$$

и

$$-h''_{i+1} + k^2 h_{i+1} = 0, \quad x \in (c, b) \tag{7}$$
$$h_{i+1}(c) = g_{i+1}(c), \quad h_{i+1}(b) = 0. \tag{8}$$
$(i = 0, 1, 2, 3, \ldots)$

Начальное приближение $h_0(d)$ заранее задается произвольным образом.

Далее с помощью формулы (3) определяется $g_1(x)$ и затем вычисляется $g_1(c)$. После этого опять с помощью формулы (3) определяется $h_1(x)$ и затем вычисляется $h_1(d)$. Аналогичным образом вычисляются $g_2(c)$ и $h_2(d)$. Продолжая этот процесс бесконечно, мы получим две последовательности функций $\{g_n(x)\}$ и $\{h_n(x)\}$, определенных соответственно на отрезках $[a, d]$ и $[c, b]$, и вычисляемые по формулам

$$g_n(x) = h_{n-1}(d)\frac{sh\ k\ (x-a)}{sh\ k\ (d-a)}, \ x \in [a,d], \quad n = 1, 2, 3, \ldots; \tag{9}$$
$$h_n(x) = g_n(c)\frac{sh\ k\ (x-b)}{sh\ k\ (c-b)}, \ x \in [c,b] \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{10}$$

Оценим погрешности приближенных решений. Для этого покажем, что функции $g_n(x)$ и $h_n(x)$ принимают свои максимальные и минимальные значения на концах отрезка интегрирования.

Предположим, что $\xi \in (a,d)$ - точка максимума функции $g_n(x)$. Это означает, что $g_n(\xi) \geq g_n(x)$ для всех точек $x \in [a,d]$. В частности, для $x = a$ имеем $g_n(\xi) \geq g_n(a) = 0$. При $g_n(\xi) = 0$ точкой максимума будет являтся точка $\xi = a$, что противоречит с нашим предположением. Поэтому будем считать, что $g_n(\xi) > 0$. А это противоречит с утверждением предложения 1.1.2 предыдущего подраздела. Следовательно, $g_n(x)$ достигает максимального значения в концевых точках.

Аналогично можно показать, что $g_n(x)$ достигает минимального значения на концах отрезка $[a,d]$.

Таким образом, если $g_n(d)$ отрицательно, то

$$g_n(d) \leq g_n(x) \leq 0, \ x \in [a,d];$$

и если $g_n(d)$ положительно, то

$g_n(d) \le g_n(x) \le 0$, $x \in [a,d]$.

Поэтому справедливо неравенство

$-|g_n(d)| \le g_n(x) \le |g_n(d)|$, $x \in [a,d]$;

Или

$|g_n(x)| \le |g_n(d)|$, $x \in [a,d]$; (11)

Точно также можно получить неравенство и для погрешности $h_n(x)$:

$|h_n(x)| \le |h_n(c)|$, $x \in [c,b]$. (12)

Согласно граничным значениям (6) , (8) и только что полученным неравенствам (11), (12)

$$|g_n(x)| \le |g_n(d)| = |h_{n-1}(d)|,\ x \in [a,d];$$

$|h_n(x)| \le |h_n(c)| = |g_n(c)|$, $x \in [c,b]$. (13)

Заметим, что имеют место следующие рекуррентные соотношения

$g_n(c) = M \cdot g_{n-1}(c)$, (14)

$h_n(d) = M \cdot h_{n-1}(d)$, (15)

где

$$M = \frac{sh\ k\ (d-b)}{sh\ k\ (c-b)} \cdot \frac{sh\ k\ (c-a)}{sh\ k\ (d-a)}, \tag{16}$$

которые получены при двухкратном применении формул (9), (10).

Заметим, что из (16) и свойств функции гиперболического синуса следует, что $0 < M < 1$.

Наконец, применим формулы (14), (15), и тогда неравенства (13) примут вид:

$$|g_n(x)| \le |h_{n-1}(d)| = M \cdot |h_{n-2}(d)| = M^2 |h_{n-3}(d)| = ... = M^{n-1} |h_0(d)|,\ x \in [a,d];$$

$$|h_n(x)| \le |g_n(c)| = M \cdot |g_{n-1}(c)| = M^2 |g_{n-2}(c)| = ... = M^{n-1} |g_1(c)| \le M^{n-1} |g_1(d)| =$$

$= M^{n-1} |h_0(d)|$, $x \in [c,b]$,

где $h_0(d)$ - некоторое число, взятое произвольным образом (начальное приближение).

Перейдем к пределу в последних неравенствах

$\lim\limits_{n\to\infty} |g_n(x)| \le \lim\limits_{n\to\infty} \left(M^{n-1} \cdot |h_0(d)|\right) = 0$,

$\lim\limits_{n\to\infty} |h_n(x)| \le \lim\limits_{n\to\infty} \left(M^{n-1} \cdot |h_0(d)|\right) = 0$.

Так как модуль не может быть отрицательным, то приходим к соотношениям:

$\lim\limits_{n\to\infty} |g_n(x)| = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} |h_n(x)| = 0$.

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0,\ \lim_{n\to\infty} h_n(x) = 0.$$

Итак, мы приходим к следующей теореме.

Теорема 1 Построенные выше в процессе Шварца последовательности функций $\{g_n(x)\}$ и $\{h_n(x)\}$ сходятся равномерно на соответствующих отрезках $[a, d]$ и $[c, b]$ к нулю со скоростью бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем M, где M определяется формулой (1.2.13), причем имеют место оценки:

$$|g_n(x)| \le M^{n-1}|h_0(d)|,\ x \in [a,d];$$

$$|h_n(x)| \le M^{n-1}|h_0(d)|,\ x \in [c,b],$$

здесь $h_0(d)$ - некоторое число, взятое произвольным образом.

Проведем исследование функции M как функции от параметров и сделаем соответствующие выводы о процессе Шварца.

Если $a \to -\infty$ или $b \to +\infty$, а другие параметры остаются постоянными, то M возрастает и сходимость процесса Шварца ухудшается.

Если длина области налегания $l = d - c$ отрезков $[a, d]$ и $[c, b]$ стремится к нулю, то сходимость процесса Шварца также ухудшается.

Пусть $d - c = p = const$, тогда обозначая $c = x$ (следовательно, $d = p + x$), имеем

$$M(x) = \frac{sh\ k\ (x-a)}{sh\ k\ (p+x-a)} \cdot \frac{sh\ k\ (b-p-x)}{sh\ k\ (b-x)}.$$

Производная этой функции обращается в нуль в точке $x = \frac{a+b-p}{2}$ и в этой точке функция $M(x)$ достигает максимума.

Это означает, что для фиксированного p наихудший случай сходимости проявляется, когда

$$c = \frac{a+b-p}{2},\ d = \frac{a+b+p}{2},$$

т.е. когда точки c и d расположены симметрично относительно центра отрезка $[a, b]$.

Приведенные выше факты дают связь между геометрическим характером области декомпозиции и характером скорости сходимости процесса Шварца.

Список использованных источников

1. Темирбеков Н.М. Численное моделирование задач гидродинамики в сложных областях: диссертация на соискание ученой степени доктора физико–математических наук. – Алматы, 2001. – 247 с.

2. Базарбекова А.А. О сходимости альтернирующего процесса Шварца для двумерного случая // Вычислительные технологии. – 2008. – Т.13 (совместный выпуск). – Вестник

3. 81 Базарбекова А.А., Базарбеков А.Б. Решение первой краевой задачи методом разделения области // Вычислительные технологии. – 2008. – Т.13. – (совместный выпуск). – Вестник КазНУ им. аль–Фараби. Серия математика, механика, информатика. – 2008. – №3(58). – Ч.1. – С.180–181.

4. Базарбекова А.А., Базарбеков А.Б. О сходимости альтернирующего метода Шварца // Вестник КазНУ им. аль–Фараби. Серия математика, механика, информатика. – 2007. – №1(52). – С.54–58.