ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН
MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ
ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ
ЕВРАЗИЙСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Л.Н. ГУМИЛЕВА
GUMILYOV EURASIAN
NATIONAL UNIVERSITY

ЖАС ҒАЛЫМДАР КЕҢЕСІ

Студенттер мен жас ғалымдардың «Ғылым және білім - 2015» атты X Халықаралық ғылыми конференциясының БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ X Международной научной конференции студентов и молодых ученых «Наука и образование - 2015»

PROCEEDINGS of the X International Scientific Conference for students and young scholars «Science and education - 2015»

УДК 001:37.0
ББК72+74.04
Ғ 96

Ғ96

«Ғылым және білім – 2015» атты студенттер мен жас ғалымдардың Х Халық. ғыл. конф. = Х Межд. науч. конф. студентов и молодых ученых «Наука и образование - 2015» = The X International Scientific Conference for students and young scholars «Science and education - 2015». – Астана: http://www.enu.kz/ru/nauka/nauka-i-obrazovanie-2015/, 2015. – 7419 стр. қазақша, орысша, ағылшынша.

ISBN 978-9965-31-695-1

Жинаққа студенттердің, магистранттардың, докоранттардың және жас ғалымдардың жаратылыстану-техникалық және гуманитарлық ғылымдардың өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

The proceedings are the papers of students, undergraduates, doctoral students and young researchers on topical issues of natural and technical sciences and humanities.

В сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов и молодых ученых по актуальным вопросам естественно-технических и гуманитарных наук.

УДК 001:37.0
ББК 72+74.04

ISBN 978-9965-31-695-1

$$\int_a^b \vartheta^+(t)|f(t)|^p dt \le pq^{p-1}\sup_{a<t<b}\left(\int_{\Delta^+(t_0)}\vartheta^+(s)ds\right)\left(\int_{\Delta^-(t_0)}\rho^{1-p}(s)ds\right)^{p-1}\|f\|_{W_p^1(\Delta^+(t_0))}+$$

$$+\left(p^{1-q}q+2\right)^{p-1}\sup_{a<t<b}\left(\int_{\Delta^+(t_0)}\vartheta^+(s)ds\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\Delta^-(t_0)}\rho^{1-p}(s)ds\right)^{\frac{1}{q}}\|f\|_{W_p^1(\Delta(t_k))}\le$$

$$\sup_{a<t<b}\left(\int_{\Delta^+(t_0)}\vartheta^+(s)ds\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\Delta^-(t_0)}\rho^{1-p}(s)ds\right)^{\frac{1}{q}}\left(pq^{p-1}\|f\|_{W_p^1(\Delta^+(t_0))}+\left(p^{1-q}q+2\right)^{p-1}\|f\|_{W_p^1(\Delta(t_k))}\right)\le$$

$$\le\max\left\{pq^{p-1},\left(p^{1-q}q+2\right)^{p-1}\right\}\sup_{a<t<b}\left(\int_{\Delta^+(t_0)}\vartheta^+(s)ds\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\Delta^-(t_0)}\rho^{1-p}(s)ds\right)^{\frac{1}{q}}\|f\|_p$$

$$\int_a^b \vartheta^+(t)|f(t)|^p dt\le 2^{p-1}\max\left\{pq^{p-1},2^{p-1}\right\}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^p\min\left\{\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{q}},\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}\|f\|_{W_p^1(\Delta(t_k))}=$$

$$\frac{1}{2}\max\left\{pq^{p-1},2^{p-1}\right\}\cdot\min\left\{\frac{1}{pq^{p-1}},\frac{1}{2^{p-1}}\right\}\|f\|_p<1\cdot\|f\|^p_{W_p^1(\Delta(t_k))}$$

Отсюда

$$\int_a^b \vartheta^+(s)|f(s)|^p dt<\|f\|^p_{W_p^1(\Delta(t_k))}\Rightarrow\int_a^b \vartheta^+(s)|f(s)|^p dt<\int_a^b\left[\rho(s)|f'(s)|^p+\vartheta^-(s)|f(s)|^p\right]ds.$$

Теорема доказана.

Список использованных источников

1. Dosly O. Methods of oscillation theory of half – linear second order differential equations. // Czech. Math. J. 50(125)(2000), p. 657 – 671.
2. Ойнаров Р., Мырзатаева К.Р. Неосцилляторность полулинейного дифференциального уравнения второго порядка. // Математический журнал. Алматы. 2007. том 7. №2 (24). С. 72 – 82.

УДК 517.1

ТОЧНЫЙ ПОРЯДОК L_2-ДИСКРЕПАНСА СЕТКИ СМОЛЯКА

Жубанышева Ляйля

Lyailya92@mail.ru

Магистрант 2 курса ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан

Научный руководитель – Н.Ж.Наурызбаев

Сеткой Смоляка [1-2] называют множество ($s=1,2,\dots;\ q=2,3,\dots;\ N=N(s,q)\succ\prec 2^q q^{s-1}$)

$$\{\sigma_k\}_{k=1}^N\equiv\bigcup_{t=0}^q\bigcup_{\nu_1+\dots+\nu_s=t}\left\{\left(\frac{2l_1-1}{2^{\nu_1}},\frac{2l_2-1}{2^{\nu_2}},\dots,\frac{2l_s-1}{2^{\nu_s}}\right):1\le l_j\le 2^{\nu_j-1},\ j=1,2,\dots,s\right\}. \qquad (1)$$

Количественным показателем свойства равномерности распределения сетки $\xi_1,\dots,\xi_N$ на единичном кубе $[0,1]^s$ является ее L_2-дискрепанс

$$L_2(\xi_1,\dots,\xi_N)=\left(\int_{[0,1]^s}\left(\frac{A_{(x_1,1]\times\dots\times(x_s,1]}}{N}-(1-x_1)\cdot\dots\cdot(1-x_s)\right)^2\right)^{1/2}=\left(\int_{[0,1]^s}\left(\frac{1}{N}\sum_{k-1}^N\chi_{(x_1,1]\times\dots\times(x_s,1]}(\xi_k)-\int_{[0,1]^s}\chi_{(x_1,1]\times\dots\times(x_s,1]}(t)dt\right)^2\right)^{1/2},$$

(2)

где $\chi_{\Omega}(x)$- характеристическая функция множества Ω, A_J-количество точек $\xi_1,...,\xi_N$, содержащихся в J.

L_2-дискрепанс часто используется для сравнения качества квадратурных формул, широко известных под названиями «метод квази Монте-Карло» (последовательности с малым дискрепансом) и «метод псевдо Монте-Карло (последовательности, полученные посредством генераторов случайных чисел). Поэтому представляет интерес нахождение L_2-дискрепанса системы узлов квадратурных формул (в данной работе, это квадратурные формула Смоляка).

Из результатов К. Рота [3] следует, что для всяких s (s=1, 2, …) и N(N=1, 2, …), всякой конечной последовательности $\xi_1,...,\xi_N$ из $[0,1]^s$ и некоторого положительного c_s выполнено неравенство

$$L_2(\xi_1,...,\xi_N)\geq c_s\frac{(\ln N)^{\frac{s-1}{2}}}{N}.$$

В связи с этим, последовательность сеток $\{\eta_k^{(N_t)}\}_{k=1}^{N_t}$ из $[0,1]^s$, для которых имеет место неравенство

$$L_2\left(\eta_1^{(N_t)},...,\eta_s^{(N_t)}\right)\underset{s}{<<}\frac{\ln^{\beta(s)}N_t}{N_t} \tag{3}$$

при некотором $\beta(s)>0$ и достаточно плотной возрастающей последовательности из целых N_t, называют *равномерно распределенной.*

Сетки с условием (3) существуют и их исследованию посвящена обширная литература (см., напр., [4-14] и имеющуюся в них библ.).

Целью настоящей работы является нахождение порядка убывания L_2-дискрепанса сетки Смоляка.

Интерес к сеткам Смоляка обусловлен тем фактом, что посредством подбора весов можно получать квадратурные формулы, эффективные на классах функций с доминирующей смешанной производной (см. [1-2]).

Имеет место

Теорема. *Для сетки Смоляка* $\{t_k\}_{k=1}^N$ *из* $[0,1]^2$ *имеет место двусторонняя оценка*

$$L_2\left(\{t_k\}_{k=1}^N\right)\succ\prec\log^{-1}N\ \left(q\geq 2, N=N(q)=2^q(q+2)\right). \tag{4}$$

В связи с соотношением (4) заметим, что согласно определению (2) дискрепанс $L_2\left(\{t_k\}_{k=1}^N\right)$ не может иметь хорошие свойства, поскольку к интегралу $\int\limits_{[0,1]^2}\chi_{(x_1,1]\times(x_2,1]}(t)dt$ применяется не квадратурная формула Смоляка, оптимальная в степенной шкале, а иная – с той же сеткой, но с другими, а именно, равными весами. В данной теореме, по существу, выясняется величина потери от замены весов.

Наметим основные моменты доказательства теоремы.

Оценивается величина

$$N^2L_2^2\left(\{\sigma_k\}_{k=1}^N\right)=\int\limits_{[0,1]^2}\left(\sum_{k-1}^N\chi_{(x,1]\times...\times(y,1]}(\sigma_k)-N\int\limits_{[0,1]^2}\chi_{(x,1]\times(y,1]}(t)dt\right)^2$$

Здесь, полагая $N=N_2(q)=\sum\limits_{\lambda=0}^{q}2^{\lambda}\left[2^{q-\lambda-1}+1/2\right]=2^{q-1}(q+2)$ (см. [14])

$$N^2L_2^2\left(\{\sigma_k\}_{k=1}^N\right)=\int_0^1\int_0^1\left(\sum_{\lambda=0}^{q}\left(2^{\lambda}-\left[x2^{\lambda}\right]\right)\left(\left[2^{q-\lambda-1}+\frac{1}{2}\right]-\left[y2^{q-\lambda-1}+\frac{1}{2}\right]\right)-N(1-x)(1-y)\right)^2dxdy=$$

$$=\int_0^1\int_0^1\left\langle\sum_{\lambda=0}^{q}\left(\{2^{\lambda}x\}\left(\left[2^{q-\lambda-1}+\frac{1}{2}\right]-\left[2^{q-\lambda-1}+\frac{1}{2}\right]y\right)-\left(2^{\lambda}-\left[x2^{\lambda}\right]\right)\left(\left[y2^{q-\lambda-1}+\frac{1}{2}\right]-\left[2^{q-\lambda-1}+\frac{1}{2}\right]y\right)\right)\right\rangle^2dxdy=$$

$$=\int_0^1\int_0^1\left\langle\sum_{\lambda=0}^{q}\left(A_{\lambda}(x,y)-B_{\lambda}(x,y)\right)\right\rangle^2dxdy\,, \qquad (5)$$

где $A_{\lambda}(x,y)=\{2^{\lambda}x\}\left(\left[2^{q-\lambda-1}+\frac{1}{2}\right]-\left[2^{q-\lambda-1}+\frac{1}{2}\right]y\right)$,

$$B_{\lambda}(x,y)=\left(2^{\lambda}-\left[x2^{\lambda}\right]\right)\left(\left[y2^{q-\lambda-1}+\frac{1}{2}\right]-\left[2^{q-\lambda-1}+\frac{1}{2}\right]y\right).$$

Пологая $\Phi_{\lambda}(x,y)=A_{\lambda}^2(x,y)-2A_{\lambda}(x,y)A_{\lambda}(x,y)+B_{\lambda}^2(x,y)$, сумма (5) записывается в виде

$$\sum_{\lambda=0}^{q}\int_0^1\int_0^1\Phi_{\lambda}(x,y)dxdy=\sum_{\lambda=0}^{q-2}\int_0^1\int_0^1\Phi_{\lambda}(x,y)dxdy+\int_0^1\int_0^1\Phi_{q-1}(x,y)dxdy+\int_0^1\int_0^1\Phi_{q}(x,y)dxdy.=S_1+S_2+S_3\,.$$

Сумма $S_1=\sum_{\lambda=0}^{q-2}\int_0^1\int_0^1\Phi_{\lambda}(x,y)dxdy$ оценивается следующим образом:

$$S_1=\sum_{\lambda=0}^{q-2}\sum_{t=0}^{2^{\lambda}-1}\int_{t2^{-\lambda}}^{(t+1)2^{-\lambda}}\left(\int_0^{\frac{1}{2^{q-\lambda}}}\Phi_{\lambda}(x,y)dy+\sum_{\tau=1}^{2^{q-\lambda-1}-1}\int_{\frac{2\tau-1}{2^{q-\lambda}}}^{\frac{2\tau-1}{2^{q-\lambda}}}\Phi_{\lambda}(x,y)dy+\int_{1-\frac{1}{2^{q-\lambda}}}^{1}\Phi_{\lambda}(x,y)dy\right)dx=S_1'+S_1''+S_1'''.$$

$$S_1'=\frac{3\cdot\left(2^{q-1}-1\right)}{16}+\frac{5\left(2^{-3}-2^{-(q+2)}\right)}{72}+\frac{2^{q-1}-1}{3}+\frac{2^{2q-5}-2^{-q-2}}{126}+\frac{2^{q-3}-2^{-q-3}}{9}+\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{12}-\frac{2^{-(q+2)}}{3}\right)\cdot(q-1)\succ\prec 2^{2q}$$

,

$$S_1''=\sum_{\lambda=0}^{q-2}\left\langle\frac{2^{2\lambda-2}}{3}-\frac{2^{\lambda-3}}{3}+\frac{1}{36}+\frac{1}{24}+\frac{2^{2q-\lambda-2}}{3}+\frac{2^{q-\lambda-1}}{3}\right\rangle\succ\prec 2^{2q}\,,$$

$$S_1'''=\frac{5\cdot\left(2^{-3}-2^{-q-2}\right)}{18}+\frac{2^{2q-2}-2^{-q-2}}{18}-\frac{2^{q-5}-2^{-q-3}}{9}\succ\prec 2^{2q}\,,$$

Таким образом,

$$S_1\succ\prec 2^{2q}\,. \qquad (6)$$

Далее,

$$S_2=\int_0^1\int_0^1\Phi_{q-1}(x,y)dxdy=\sum_{t=0}^{2^{q-1}-1}\int_{t2^{1-q}}^{(t+1)2^{1-q}}\left(\int_0^{1/2}\Phi_{\lambda}(x,y)dy+\int_{1/2}^{1}\Phi_{\lambda}(x,y)dy\right)dx=$$

$$=\left(\frac{7}{72}+\frac{2^{2(q-1)}}{24}+\frac{\left(2^{q-2}-2^{-1}\right)}{18}\right)+\left(\frac{1}{72}+\frac{2^{2(q-1)}}{24}+\frac{\left(2^{q-1}-1\right)}{24}\right)\succ\prec 2^{2q}\,. \qquad (7)$$

И наконец,

$$S_3=\int_0^1\int_0^1\Phi_{q}(x,y)dxdy=\sum_{t=0}^{2^{q}-1}\int_{t2^{-q}}^{(t+1)2^{-q}}\left(\int_0^{1}\Phi_{\lambda}(x,y)dy\right)dx=\frac{1}{9}-\frac{2^{q}}{6}+\frac{2^{q-1}}{6}-\frac{1}{12}+\frac{2^{2q}}{3}\succ\prec 2^{2q}\,. \qquad (8)$$

В итоге, в силу (6), (7), (8), имеем

$$L_2\left(\{\sigma_k\}_{k=1}^N\right)=\frac{1}{N}\left(\sum_{\lambda=0}^{q}\int_0^1\int_0^1\Phi_\lambda(x,y)dxdy\right)^{1/2}\succ\prec\frac{(S_1+S_2+S_3)^{1/2}}{N}\succ\prec\frac{2^q}{2^q q}=\frac{1}{q}\succ\prec\frac{1}{\ln N}.$$

Теорема доказана.

Список использованных источников

1. Смоляк С.А. Квадратурные и интерполяционные формулы на тензорных произведениях некоторых классов функций // Докл. АН СССР. 1963. Т.148, №5. С. 1042-1045.
2. Смоляк С.А. Об оптимальном восстановлении функций и функционалов // Дисс… канд. физ.-мат. наук. Москва: Орг. п /я 2325, 1965.
3. Roth R.F. On irregularities of distribution //Mathematika. 1954. V.1, №2. P.73-79.
4. Коробов Н.М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.
5. Hlawka E., FirneisF., Zinterhof P. ZahlentheoretischeMethoden in der numerischenMatheatik. Wien; M□nchen; Oldenbourg, 1981.
6. Hua Loo Keng, Wang Yuan. Application of Number Theory of Numerical Analysis. Berlin; Heidelberg: NewYork: SpringerYerlag, 1981.
7. Кейперс Л., Нидеррейтер Г. Равномерное распределение последовательностей. М.: Наука, 1985.
8. Beck J. So's V. T. Discrepancy theory. Handbook of Combinatorics / eds. Graham R., Grötschel M., Lo'vasz L. Amsterdam: Elsevier. – 1995. -P. 1405–1446.
9. Tezuka S. Uniform Random Numbers: Theory and Practice. -Boston: Kluwer Academic Publishers, 1995. -209 p.
10. Drmota M., Tichy R. F. Sequences, DiscrepanciesandApplications. Lect. NotesMath. – Berlin: Springer, - 1997. -Vol. 1651. - 512 p.
11. Matous'ek J. The exponent of discrepancy is at least 1.0669 // J. Complexity. – 1998. №14. - P. 448-453.
12. Dick J., Pillichshammer F. Digital Nets and Sequences. Discrepancy Theory and Quasi-Monte Carlo Integration. -Cambridge: Cambridge University Press, 2010. -618 p.
13. Сихов М. Б, Темиргалиев Н. Об алгоритме построения равномерно распределенных сеток Коробова //Матем. замет. -2010. - Т. 87, №6. - Р. 948-950.
14. Nauryzbayev N., Temirgaliyev N. An Exact Order of Discrepancy of the Smolyak Grid and Some General Conclusions in the Theory of Numerical Integration // Found Comput Math. -2012. -№12, -P. 139-172.

УДК 517.92

ОСЦИЛЛЯЦИЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЭМДЕМ – ФОУЛЕРА

Жұмағұл А.Ә.
Akbota_samga@mail.ru
магистрант механико-математического факультета,
Евразийский Национальный университет имени Л.Н.Гумилева
Астана,Казахстан

Вопросы поведения решений дифференциальных уравнений впервые были исследованы в известных работах Штурма, и в настоящее время в этой области имеется множество различных результатов,смотрите,например, [1-3] и приведенные ссылки .