



ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН
MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN



Л. Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ
ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ
ЕВРАЗИЙСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Л. Н. ГУМИЛЕВА
GUMILYOV EURASIAN
NATIONAL UNIVERSITY



Студенттер мен жас ғалымдардың
«Ғылым және білім - 2015»
атты X Халықаралық ғылыми конференциясының
БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ
X Международной научной конференции
студентов и молодых ученых
«Наука и образование - 2015»

PROCEEDINGS
of the X International Scientific Conference
for students and young scholars
«Science and education - 2015»

УДК 001:37.0
ББК72+74.04
Ғ 96

Ғ96

«Ғылым және білім – 2015» атты студенттер мен жас ғалымдардың X Халық. ғыл. конф. = X Межд. науч. конф. студентов и молодых ученых «Наука и образование - 2015» = The X International Scientific Conference for students and young scholars «Science and education - 2015». – Астана: <http://www.eni.kz/ru/nauka/nauka-i-obrazovanie-2015/>, 2015. – 7419 стр. қазақша, орысша, ағылшынша.

ISBN 978-9965-31-695-1

Жинаққа студенттердің, магистранттардың, докторанттардың және жас ғалымдардың жаратылыстану-техникалық және гуманитарлық ғылымдардың өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

The proceedings are the papers of students, undergraduates, doctoral students and young researchers on topical issues of natural and technical sciences and humanities.

В сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов и молодых ученых по актуальным вопросам естественно-технических и гуманитарных наук.

УДК 001:37.0
ББК 72+74.04

ISBN 978-9965-31-695-1

©Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия
ұлттық университеті, 2015

О ТЕСТИРОВАНИИ СЛУЧАЙНЫХ «АЛГЕБРАИЧЕСКИХ» ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ НА РАВНОМЕРНУЮ РАСПРЕДЕЛЕННОСТЬ

Турдахан Кошаман, Жубанышева Ляйля Жанбыршиевна

koshaman@mail.ru

Студент 4 курса специальности «Математика», Магистрант 2 курса специальности «Математика» ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан

Научный руководитель – Н.Ж.Наурызбаев

В математике и информатике актуальна задача (см., например, [1]) получения последовательности случайных обыкновенных дробей, т.е. генерирования целых чисел $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ со значениями от 0 до некоторого m , когда частота попадания конечной последовательности обыкновенных дробей

$$U_n = \frac{X_n}{m} \quad (n=1,2,\dots,N) \quad (1)$$

в любой отрезок $[a,b]$ из $[0,1]$ стремится к его длине $b-a$ при $N \rightarrow \infty$. Данные последовательности называются *равномерно распределенными на $[0,1]$* .

В многомерном случае последовательность $\eta_n^{(s)} (n=1,2,\dots)$ точек из единичного куба $[0,1]^s$ ($s=1,2,\dots$) называют *равномерно распределенной*, если для всякого параллелепипеда $J = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_s, b_s] \subset [0,1]^s$ выполнено равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi_J(\eta_n^{(s)}) = |J| := \prod_{j=1}^s (b_j - a_j), \quad (2)$$

где $\chi_J(x)$ - характеристическая функция множества J .

В статье [2] даны алгоритмы генерирования одномерных случайных чисел на основе s -мерных равномерно распределенных последовательностей. В [3] на основе данного алгоритма построена последовательность из $N = 2648$ чисел:

0,001255; 0,553325; 0,016311; 0,193225; 0,212045; 0,511192; 0,756587; 0,654956; 0,002509;
0,10665; 0,032622; 0,386449; 0,42409; 0,023839; 0,513174; 0,309912; 0,003764; 0,659975;
0,048934; 0,579674; 0,636136; 0,535759; 0,269762; 0,964868; 0,005019; 0,2133; 0,065245;
0,772898; 0,848181; 0,047679; 0,026349; 0,619824; 0,006274; 0,766625; 0,081556; 0,966123;

.....

.....
0,380176; 0,996236; 0,340025; 0,951066; 0,420326; 0,363864; 0,464241; 0,730238;
0,035132; 0,997491; 0,89335; 0,967378; 0,613551; 0,57591; 0,976161; 0,486826; 0,690088;
0,998745; 0,446675; 0,983689; 0,806775; 0,787955; 0,48808; 0,243413; 0,345044; 0; 0; 0; 0; 0; 0;
0; 0; 0.

В [3] данная последовательность была подвергнута тестированию на равномерную распределенность непосредственно по определению (1), где отклонение относительной частоты количества точек случайной последовательности, попадающих в выбранные сегменты не превышала 0,0003. Откуда было сделано заключение о равномерной распределенности последовательности.

Здесь, как нам представляется, можно предложить два сценария исследований.

Первый: Если построенная последовательность прошла тестирование на случайность по одному критерию (в нашем случае непосредственно по определению), то это еще не означает, что она пройдет тест по другому критерию. Однако каждая положительная проверка на случайность, дает большую уверенность, на то, что последовательность является случайной.

Второй сценарий: Теоретически последовательность является случайной, прошла проверку на случайность $K_1, \dots, K_m$ критериями и не проходит тест на случайность K_{m+1} критерия. Тогда вызывает сомнение состоятельность критических границ определяющих равномерную распределенность последовательности K_{m+1} критерия.

Здесь мы будем идти по первому сценарию, проверим построенную последовательность на случайность χ^2 -методом (см.[1, п. 3.3.1 А], см. также [3]):

1-ШАГ. Строим отрезок $\left[\min_{n=1, \dots, N} U_n, \max_{n=1, \dots, N} U_n \right]$ для последовательности чисел $\{U_n\}_{n=1}^N$ ($N = 2648$), подлежащих тестированию.

2-ШАГ. Отрезок $\left[\min_{n=1, \dots, N} U_n, \max_{n=1, \dots, N} U_n \right]$ делим на t равных частей, где t целая часть числа $1 + \log N$.

3-ШАГ. Числа $\{U_n\}_{n=1}^N$ разбиваем на t групп, к каждой группе относят те случайные числа, попадающие в соответствующий k -ый отрезок ($k = 1, 2, \dots, t$). Тогда $p_k = \frac{1}{t}$ ($k = 1, \dots, t$) вероятность того, что случайное число принадлежит k -ому отрезку.

4-ШАГ. Через b_k обозначим количество случайных чисел из $\{U_n\}_{n=1}^N$, принадлежащих k -ому отрезку.

5-ШАГ. Определяем статистику

$$S_t \equiv S_t(U_1, \dots, U_N) = \sum_{k=1}^t \frac{(b_k - Np_k)^2}{Np_k}. \quad (3)$$

6-ШАГ. Ставим гипотезу о равномерном распределении последовательности $\{U_n\}_{n=1}^N$.

Случайная величина S_t при большом объеме выборки N имеет распределение, близкое к χ^2 с $(t-1)$ степенями свободы. Если гипотеза о равномерном распределении последовательности $\{U_n\}_{n=1}^N$ справедлива, то критерий S_t имеет χ^2 -распределение с $t-1$ степенями свободы. Далее задаемся уровнем значимости α и, зная распределение критерия S_t , строим критическую область. Если числовое значение критерия S_t , вычисляемое по формуле (3), попадает в критическую область $(-\infty, -S_{кр, \alpha}) \cup (S_{кр, \alpha}, \infty)$, то делается вывод о неправомерности гипотезы.

В таблицах 1-2 приведены результаты эмпирического тестирования случайной «алгебраической» последовательности $\{U_n\}_{n=1}^{2468}$ χ^2 -методом.

Таблица 1 – Исходные данные для эмпирического тестирования случайной «алгебраической» последовательности $\{U_n\}_{n=1}^{2468}$ χ^2 -методом.

N=	2648
----	------

$1 + \log N =$	8,88156
$t =$	8
$\min_{n=1,2,\dots,N} U_n$	0
$\max_{n=1,2,\dots,N} U_n$	0,996979
$p_k = \frac{1}{t}$	0,125
$t - 1$	7

Таблица 2 - Результаты эмпирического тестирования случайной «алгебраической» последовательности $\{U_n\}_{n=1}^{2468}$ χ^2 -методом.

Группы k	Левый конец k -го отрезка	Правый конец k -го отрезка	b_k	$\frac{(b_k - Np_k)^2}{Np_k}$
1	0	0,124622	336	0,075528701
2	0,12462236	0,249245	328	0,027190332
3	0,24924471	0,373867	328	0,027190332
4	0,37386707	0,498489	328	0,027190332
5	0,49848943	0,623112	336	0,075528701
6	0,62311178	0,747734	328	0,027190332
7	0,74773414	0,872356	328	0,027190332
8	0,8723565	0,996979	336	0,075528701
S_8				0,362537764

При уровне значимости $\alpha = 0,001$, имеем

$$S_{кр,\alpha} = 24,3 > 0,3625 = S_8.$$

Таким образом, последовательность $\{U_n\}_{n=1}^{2468}$ является равномерно распределенной на $[0,1]$ в смысле критерия χ^2 .

Список использованных источников

1. Кнут Д. Искусство программирования. Том 2. Получисленные алгоритмы. 2002. -788 стр.
2. Темиргалиева Ж.Н., Темиргалиев Н. Генерирование случайных «алгебраических» чисел// Вестник Евразийского Национального Университета им. Л.Н.Гумилева, ч.1, 2013, №4(95). С.5-28.
3. Жубанышева А., Наурызбаев Н., Алтан К., Темиргалиев Н. Тестирование случайных «алгебраических» последовательностей на равномерную распределенность χ^2 -методом // Международная конференция «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», посвященная 80-летию со дня рождения профессора К. Ж. Наурызбаева, 9-11 декабря 2014 г., С.86