ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН
MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ
ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ
ЕВРАЗИЙСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Л.Н. ГУМИЛЕВА
GUMILYOV EURASIAN
NATIONAL UNIVERSITY

ЖАС ҒАЛЫМДАР КЕҢЕСІ

Студенттер мен жас ғалымдардың «Ғылым және білім - 2015» атты X Халықаралық ғылыми конференциясының БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ X Международной научной конференции студентов и молодых ученых «Наука и образование - 2015»

PROCEEDINGS of the X International Scientific Conference for students and young scholars «Science and education - 2015»

УДК 001:37.0
ББК72+74.04
Ғ 96

Ғ96

«Ғылым және білім – 2015» атты студенттер мен жас ғалымдардың Х Халық. ғыл. конф. = Х Межд. науч. конф. студентов и молодых ученых «Наука и образование - 2015» = The X International Scientific Conference for students and young scholars «Science and education - 2015». – Астана: http://www.enu.kz/ru/nauka/nauka-i-obrazovanie-2015/, 2015. – 7419 стр. қазақша, орысша, ағылшынша.

ISBN 978-9965-31-695-1

Жинаққа студенттердің, магистранттардың, докторанттардың және жас ғалымдардың жаратылыстану-техникалық және гуманитарлық ғылымдардың өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

The proceedings are the papers of students, undergraduates, doctoral students and young researchers on topical issues of natural and technical sciences and humanities.

В сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов и молодых ученых по актуальным вопросам естественно-технических и гуманитарных наук.

УДК 001:37.0
ББК 72+74.04

ISBN 978-9965-31-695-1

УДК 519.257

НЕСМЕЩЕННОЕ ОЦЕНИВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СУММ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН, ПРИ НЕНАБЛЮДАЕМЫХ ЭЛЕМЕНТАХ ВЫБОРКИ

Шалкенов Жаслан Ерланұлы
zhaslanhamza@mail.ru
студент специальности 5В010900 Математика ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан
Научный руководитель – А.С. Искакова

Многомерные вероятностные модели, как отражение существующей реальности, оказываются совершенно необходимыми для описания очень многих явлений и ситуаций, встречающихся в повседневной жизни. В последние годы было разработано значительное количество вероятностных моделей. Тем не менее остается много не решенных проблем, когда пронаблюдать возможно только суммы компонентов, которые в результате наблюдений невозможно выявить. До настоящего времени вероятностные модели, описывающие подобные ситуации, не рассматривались. Исключительным актуальным примером применения подобной модели является рекламная индустрия, когда необходимо увязать распределение потребительских интересов с соответствующей рекламой в различных источниках. Аналогичные проблемы очень часто встречаются в метеорологии и в других областях. В этой работе представляются статистические оценки распределения сумм случайных значений

$L_1, \dots, L_d$,

когда

$L_1, \dots, L_d$

не наблюдаемы, а наблюдаемы только их суммы. Тем самым результаты предложенной работы позволяют решить многие из вышеперечисленных проблем.

Предположим, что урна содержит шары, и каждый шар в урне помечен некоторым значением L_α. Также допустим, что число возможных L_α есть d.

Пусть элементы вектора

$p=(p_1, \dots, p_d)$

определяют вероятности извлечения из урны шара, помеченного соответственными значениями

$L_1, \dots, L_d$,

Причем

$$\sum_{\alpha=1}^{d} p_\alpha = 1.$$

Производится последовательное извлечение n шаров из урны с возвращением, причем неизвестно, какие именно шары были вынуты из урны. Известно только значение u, которое представляет сумму значений на n вынутых из урны шаров. Для изучения данной ситуации требуется построение распределения вероятности u.

Допустим, что V_u представляет число возможных сочетаний

$r_{1vu}L_1, \dots, r_{d\,vu}L_d$,

которые в сумме образовали u, где

$r_{1vu}, \dots, r_{dvu}$

определяют возможное количество вынутых шаров, которые помечены соответствующими

$L_1, \dots, L_d$.

Иначе говоря, из работы [1] следует, что V_u есть число разбиений u на части

$L_1, \dots, L_d$.

Из результатов работ [2-9] следует следующее утверждение. Вероятность, что случайная величина U примет значение u, есть

$$P(U=u)=\sum_{v_u}^{V_u} n!\prod_{\alpha=1}^{d}\frac{p_\alpha^{r_{\alpha_{v_u}}}}{r_{\alpha_{v_u}}!}. \qquad (1)$$

Теорема. Функция, которая определяется в (1.1), является распределением вероятностей.

Пусть

$\mathbf{X}=(X_1, ..., X_k)$

представляет выборку объема k из распределения (1) и

$\mathbf{x}=(x_1, ..., x_k)$

есть наблюдавшиеся значения $\mathbf{X}$, где элементы x_i (i=1, …, k) представляют сумму значений на n шарах, последовательно вынутых из урны с возвращением. Для каждого i=1, ..., k определим V_i число разбиений $\underline{x_i}$ на значения

$L_1, \dots ,L_d$.

Векторы

$\mathbf{r}_{1i}=(r_{11i},\dots, r_{d1i}), \dots, \mathbf{r}_{Vi}=(r_{1Vi},\dots, r_{dVi})$,

определяющие эти разбиения, при v_i=1,..., V_i, являются решениями следующей системы уравнений

$$\begin{cases}\sum_{\alpha=1}^{d}\mathbf{L}_\alpha r_{\alpha_{v_i}}=\mathbf{x}_i,\\ \sum_{\alpha=1}^{d} r_{\alpha_{v_i}}=n.\end{cases} \qquad (2)$$

Пусть для каждого j=1,…, μ, где

$$\mu=\prod_{i=1}^{k}V_i,$$

существует вектор $\mathbf{z}_j=(z_{1j},..., z_{dj})$, определяемый как

$$\mathbf{z}_j=\sum_{i=1}^{k}\mathbf{r}_{v_i},$$

причем индексы в правой и левой части связаны между собой взаимно однозначным соответствием, которое не единственно.

Лемма. a) Если какой – то элемент реализации выборки $\mathbf{x}=(x_1, \dots , x_k)$ из распределения (1) имеет более одного разбиения на представленные части, то решения $\mathbf{z}_1, \dots , \mathbf{z}_\mu$, основанные на наблюдении, не являются реализациями достаточных статистик.

b) Если все элементы реализации выборки $\mathbf{x}=(x_1, \dots , x_k)$ из распределения (1) имеют не более одного разбиения на представленные части, то решение $\mathbf{z}_1$, основанное на наблюдении, является единственным и представляет реализацию полной достаточной статистики.

Следующая теорема, приводимая в работах [6-9], позволяет определить множество несмещенных оценок для вероятности исследуемого распределения.

Теорема. Элементы множества

$W(\mathbf{u}, \mathbf{z})=\{W(\mathbf{u}, \mathbf{z}_1), \dots, W(\mathbf{u}, \mathbf{z}_\mu)\}$

являются несмещенными оценками для вероятности $P(\mathbf{U}=\mathbf{u})$ распределения (1.1), которые при

j=1, …, μ

определяются как

$$W(\mathbf{u},\mathbf{z}_j)=\frac{\sum_{v_\mathbf{u}=1}^{V_\mathbf{u}}\prod_{\alpha=1}^{d}\binom{z_{\alpha_j}}{r_{\alpha_{v_\mathbf{u}}}}}{\binom{n\,k}{n}}, \qquad (3)$$

где $V_\mathbf{u}$ –число разбиений $\mathbf{u}$ на части $L_1,\dots, L_d$; для каждого разбиения $r_{1v\mathbf{u}},\dots, r_{dv\mathbf{u}}$ определяют возможное количество вынутых шаров, которые помечены соответствующими

$L_1, \ldots, L_d$; $k \geq 1$
и
$z_{\alpha j} \geq r_{\alpha v \mathbf{u}}$,
при
$\alpha=1, \ldots, d$, $v_{\mathbf{u}}=1, \ldots, V_{\mathbf{u}}$.
Рассмотрим следующие следствия данной теоремы.
Следствие 1. Элементы множества
$H(\mathbf{u}, \mathbf{z})=\{H(\mathbf{u}, \mathbf{z}_1), \ldots, H(\mathbf{u}, \mathbf{z}_\mu)\}$
являются несмещенными оценками для квадрата $P^2(\mathbf{U}=\mathbf{u})$, которые при $j=1,\ldots, \mu$ определяются как

$$H(\mathbf{u}, \mathbf{z}_j) = \sum_{v_{\mathbf{u}}=1}^{V_{\mathbf{u}}} \frac{\prod_{\alpha=1}^{d} \binom{z_{\alpha_j}}{r_{\alpha_{v_{\mathbf{u}}}}}}{\binom{n}{n}k} \sum_{w_{\mathbf{u}}=1}^{V_{\mathbf{u}}} \frac{\prod_{\alpha=1}^{d} \binom{z_{\alpha_j} - r_{\alpha_{v_{\mathbf{u}}}}}{r_{\alpha_{w_{\mathbf{u}}}}}}{\binom{n - kn}{n}}, \tag{8}$$

где $V_{\mathbf{u}}$ –число разбиений величины $\mathbf{u}$ на части $L_1,\ldots,L_d$; для каждого разбиения $r_{1v\mathbf{u}}, \ldots, r_{dv\mathbf{u}}$ определяют возможное количество вынутых шаров, которые помечены соответствующими величинами $L_1,\ldots, L_d$; $k \geq 1$ и $z_{\alpha j} \geq (r_{\alpha v \mathbf{u}} + r_{\alpha w \mathbf{u}})$, при $\alpha=1, \ldots, d$, $v_{\mathbf{u}}=1, \ldots, V_{\mathbf{u}}$, $w_{\mathbf{u}}=1, \ldots, V_{\mathbf{u}}$.
Следствие 2. Элементы множества
$S(\mathbf{u}, \mathbf{z})=\{S(\mathbf{u}, \mathbf{z}_1), \ldots, S(\mathbf{u}, \mathbf{z}_\mu)\}$,
определяемые при $j= 1, \ldots,$ □ как

$$S(\mathbf{u}, \mathbf{z}_j) = W^2(\mathbf{u}, \mathbf{z}_j) - H(\mathbf{u}, \mathbf{z}_j), \tag{9}$$

где $W(\mathbf{u}, \mathbf{z}_j)$ – несмещенная оценка вероятности распределения (1), определяемая в (4) и $H(\mathbf{u}, \mathbf{z}_j)$ – несмещенная оценка квадрата вероятности распределения (1), определяемая в (5) являются несмещенными оценками для дисперсии соответствующих элементов множества несмещенных оценок $W(\mathbf{u}, \mathbf{z})=\{W(\mathbf{u}, \mathbf{z}_1),\ldots, W(\mathbf{u}, \mathbf{z}_\mu)\}$.
Следствие 3. Элементы множества
$\tilde{\mathbf{p}} = \left\{\tilde{\mathbf{p}}_1, \tilde{\mathbf{p}}_2, \ldots, \tilde{\mathbf{p}}_\mu\right\}$
являются несмещенными оценками для параметров $\mathbf{p}=(p_1,\ldots, p_d)$ распределения (1), которые при $j=1, \ldots, \mu$ определяются как

$$\tilde{\mathbf{p}}_j = \frac{\mathbf{z}_j}{nk}, \tag{10}$$

где $k \geq 1$.
Из решения системы уравнений (2) видно, что при $i=1,\ldots, k$ величина x_i разбивается на
$L_1,\ldots, L_d$
V_i□1 способами. В случае, если $V_i>1$, то не известно, каким вариантом $v_i=1, \ldots, V_i$ сложений произведений на соответствующих значениях
$r_{1vi}, \ldots, r_{dvi}$
получили величину x_i. В связи с этим, имеем множество решений
$\mathbf{z} = \{\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_\mu\}$,
основанных на наблюдении, и множество несмещенных оценок для вероятности распределения (1)
$W(\mathbf{u}, \mathbf{z}) = \{W(\mathbf{u}, \mathbf{z}_1), \ldots, W(\mathbf{u}, \mathbf{z}_\mu)\}$.
Для определения наиболее подходящего решения z_g из множества $\mathbf{z}$ и соответствующей оценки $W(\mathbf{u}, z_g)$ из множества несмещенных оценок $W(\mathbf{u}, \mathbf{z})$ рассмотрим следующие определения.
Определение. Решение z_g, основанное на наблюдении, является наиболее подходящим из множества $\mathbf{z}=\{z_1, \ldots, z$□$\}$, если

$$\prod_{i=1}^{k} W\left(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_g\right) = \max_{j=1,\dots,\mu} \prod_{i=1}^{k} W\left(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_j\right), \tag{11}$$

где при i=1, … , k элементы множества

$W(\mathbf{x}_i, \mathbf{z})=\{ W(x_i, z_1), \dots , W(x_i, z_{\mu})\}$

являются несмещенными оценками для вероятности P(**U**=**u**) распределения (1), определенными в (3).

Определение. Несмещенная оценка $W(\mathbf{u}, \mathbf{z}_g)$ для вероятности P(**U**=**u**) распределения (1) является наиболее подходящей из всего множества несмещенных оценок

$W(\mathbf{u}, \mathbf{z})=\{ W(\mathbf{u}, \mathbf{z}_1), \dots , W(\mathbf{u}, \mathbf{z}_{\mu})\}$,

определяемых в (3), если z_g – наиболее подходящее решение, основанное на наблюдении.

Следующее замечание, приводимое в работах [6-9], указывает на асимптотические свойства наиболее подходящих несмещенных оценок.

Теорема. Наиболее подходящая несмещенная оценка $W(\mathbf{u}, \mathbf{z}_g)$ для вероятности P(**U**=**u**) модели (1) является состоятельной, асимптотически нормальной и асимптотически эффективной.

Анализ проведенных в настоящей работе исследований позволяет сформулировать следующие основные результаты.

1. Предложено и изучено новое распределение вероятностей, порождаемых урновой схемой с шарами, помеченными числами, в случае когда наблюдаемы только их суммы.
2. Получено множество несмещенных оценок для распределения вероятностей предлагаемой модели и дисперсии этих оценок.
3. Введено новое понятие наиболее подходящей оценки из множества несмещенных оценок, обладающих асимптотическими свойствами.

Список использованных источников

1. Боровков А.А. Математическая статистика. Оценка параметров. Проверка гипотез.– М.: Наука. 1984.– 472 с.
2. Боровков А.А. Теория вероятностей.- М.: Наука. 1986.–431 с.
3. Воинов В.Г., Никулин М.С. Несмещенные оценки и их применения.– М.: Наука. 1989. – 440 с.
4. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Математическая статистика. – М.: Высшая школа. 1984. – 248 с.
5. Искакова А.С. Об одном классе многомерных дискретных распределений, порождаемых урновой схемой с шарами, помеченными прямоугольными матрицами. // Вестник КазГУ, сер. матем., мех., информатика. 2000 г. №1(94). С. 16-20.
6. Искакова А.С. Построение несмещенных оценок вероятностей распределения сумм независимых одинаково распределенных случайных матриц. // Вестник КазГУ, сер. матем., мех., информатика. 2001 г. №4(97). С. 16-20.
7. Искакова А.С. Об одном методе статистического оценивания вероятности оправдываемости прогноза в метеорологии. // Научный журнал Министерства образования и науки Республики Казахстан “Ізденіс” – “Поиск”, сер. естественных наук. 2001 г. № 4, 5. С.182-188.
8. Искакова А.С. Об одном классе многомерных дискретных распределений вероятностей сумм прямоугольных матриц. // Известия МОН РК, НАН РК. 2001 г. № 5. С.85–89.
9. Искакова А.С. Определение наиболее подходящей несмещенной оценки вероятности оправдываемости прогноза в метеорологии. // Сибирский журнал индустриальной математики. 2002 г.Том V, 1(9). С.79-84.