

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ



Студенттер мен жас ғалымдардың
«ҒЫЛЫМ ЖӘНЕ БІЛІМ - 2016» атты
XI Халықаралық ғылыми конференциясының
БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ
XI Международной научной конференции
студентов и молодых ученых
«НАУКА И ОБРАЗОВАНИЕ - 2016»

PROCEEDINGS
of the XI International Scientific Conference
for students and young scholars
«SCIENCE AND EDUCATION - 2016»

2016 жыл 14 сәуір
Астана

**ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ**

**Студенттер мен жас ғалымдардың
«Ғылым және білім - 2016»
атты XI Халықаралық ғылыми конференциясының
БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ**

**СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ
XI Международной научной конференции
студентов и молодых ученых
«Наука и образование - 2016»**

**PROCEEDINGS
of the XI International Scientific Conference
for students and young scholars
«Science and education - 2016»**

2016 жыл 14 сәуір

Астана

ӘӨЖ 001:37(063)

КБЖ 72:74

Ғ 96

Ғ96 «Ғылым және білім – 2016» атты студенттер мен жас ғалымдардың ХІ Халық. ғыл. конф. = ХІ Межд. науч. конф. студентов и молодых ученых «Наука и образование - 2016» = The XI International Scientific Conference for students and young scholars «Science and education - 2016» . – Астана: [http://www.enu.kz/ru/nauka/ nauka-i-obrazovanie/](http://www.enu.kz/ru/nauka/nauka-i-obrazovanie/), 2016. – б. (қазақша, орысша, ағылшынша).

ISBN 978-9965-31-764-4

Жинаққа студенттердің, магистранттардың, докторанттардың және жас ғалымдардың жаратылыстану-техникалық және гуманитарлық ғылымдардың өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

The proceedings are the papers of students, undergraduates, doctoral students and young researchers on topical issues of natural and technical sciences and humanities.

В сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов и молодых ученых по актуальным вопросам естественно-технических и гуманитарных наук.

ӘӨЖ 001:37(063)

КБЖ 72:74

ISBN 978-9965-31-764-4

©Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия
ұлттық университеті, 2016

БІРФАЗАЛЫ БІРАЙНЫМАЛЫ СТЕФАН ЕСЕБІНІҢ АУЫСПАЛЫ ФАЗАНЫҢ ЖАЛПЫЛАНҒАН ШЕШІМІНІҢ ҚҰРЫЛЫМЫ

Мұқанов Сұлтан Тлеулиевич

Sultan78@mail.ru

Л. Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің 2 курс магистранты

Астана, Қазақстан

Ғылыми жетекші – З.Н. Сыздыкова

Таза затта фазалық ауысудың шекарасы мен температурасының өрісін анықтау есебі Стефан есебі деп аталады. Ол бұрыннан былай шартталған: зерттелген Ω облысы $t > 0$ уақыт моментінде оның қатты және сұйық фазалары орналасқан екі $\Omega^+(t)$ және $\Omega^-(t)$ анықталуға тиіс ішкі облыстарға қандайда бір $\Gamma(t)$ тегіс жазықтықпен бөленеді. Қатты және сұйық фазаның анықтамасы қатаң түрде берілмеген. Егер тұрақты θ_* зерттелетін заттың балку температурасы болса, ортаның температурасы сұйық фазада θ_* -дан аз емес, ал қатты фазада көп емес деп есептеледі. $\Omega^\pm(t)$ облысының әрқайсысында ортаның $\theta(x, t)$ температурасы жылу өткізгіштіктің

$$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} = \operatorname{div}(\chi \nabla \theta) + f \quad (1)$$

тендеуін қанағаттандырады. Мұндағы $f(x, t)$ - жылу көзін сипаттайтын функция, ρ - ортаның тығыздығы, χ - жылу өткізгіштік коэффициенті, c - тұрақты көлемдегі жылу сыйымдылық коэффициенті.

Әдетте, бұл коэффициенттер сұйық және қатты фазаларда әртүрлі және сәйкесінше тұрақты болып алынады. Мысалы, сұйық фазада $c = c_L$, қатты фазада $c = c_S$. Барлық жерде c_L, c_S, χ_L, χ_S , температураның белгілі қатаң оң функциялары деп есептеледі [1].

Ізделінетін фазалық ауысу $\Gamma(t)$ бетінде, балку температурасы мен ортаның температурасының

$$\theta(x, t) = \theta_* \quad (2)$$

теңдігінен басқа, Стефан шарты орындалады:

$$-\rho L V_\nu = \left[\chi \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \right] \quad (3)$$

мұндағы V_ν - фазалық ауысу бетінің $\Gamma(t)$ оған жүргізілген ν нормалының бағытымен орын ауыстыру жылдамдығы. $[\varphi]$ символымен қатты және сұйық фазалар жағынан фазалық ауысу бетіне жақындағандағы φ шамасының айырымы белгіленген:

$$[\varphi] = \lim_{(x, t) \rightarrow \Gamma(t), \theta < \theta_*} \varphi(x, t) - \lim_{(x, t) \rightarrow \Gamma(t), \theta > \theta_*} \varphi(x, t)$$

Оң тұрақты L жасырын меншікті балку (кристалдану) жылуы деп аталады, ол балку температурасына тең өзгермейтін температурада қарастырылған заттың бірлік массасын қатты күйден сұйыққа айналдыруға қажет энергияның минимал мөлшеріне тең [2].

1960 жылы С.Л.Каменомостская мен О.А.Олейник Стефан есебінің жаңа тұжырымдамасын ұсынды. Атап айтқанда, Стефан есебін $\theta = \theta_*$ нүктесінде бірінші текті үзілісті болатын және осы нүктеде бірімәнсіз анықталған:

$$U \in [-L, 0] \quad \theta = \theta_*,$$

$$U = \int_0^\theta c_S d\tau - L \quad \theta < \theta_*, \quad U = \int_0^\theta c_L d\tau \quad \theta > \theta_*$$

болғанда, үзілісті $U = \Phi(\theta)$ функциялы

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \operatorname{div}(\chi \nabla \theta) + f \quad (4)$$

теңдеуін $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$ облысының барлық жерінде қанағаттандыратын үзіліссіз $\theta(x, t)$ функцияны анықтау туралы бастапқы - шеткі есеп ретінде қарастыруға болады. Сонда (4)

теңдеуі жалпыланған $\frac{\partial U}{\partial t}$ функцияның жалпыланған $\operatorname{div}(\chi \nabla \theta) + f$ функциясына тең болуы туралы үлестірілу теориясы мағынасында орындалады. Сонымен, егер Ω облыстың шекарасында $t = T$ болғанда $\varphi(x, t)$ нөлге айналатын жеткілікті тегіс функция болса, онда (4) теңдеуі жоғарыда көрсетілген қасиеттері бар кез келген φ функциясы үшін дұрыс болатын

$$\int_{\Omega_T} \{ \chi \nabla \theta \nabla \varphi - U \frac{\partial \varphi}{\partial t} - f \varphi \} dx dt = \int_{\Omega} U \varphi|_{t=0} dx \quad (5)$$

интегралдық тепе - теңдікке эквивалентті.

Соңғы жылдары Стефан есебінің ауыспалы фаза деп аталатын сұрағы көп қарастырылған. Жұмыста бастапқы уақыт моментінде болмайтын ауыспалы фазаның жалпыланған шешімі құрылған.

Бірайнымалы кеңістікті қарастырайық. Ω облысы $(-1, 1)$ интервалы болсын, және

$$\Omega_T^+ = \{(x, t): -1 < x < R^-(t), 0 < t < T\}$$

облысы қатты фазамен

$$\Omega_T^- = \{(x, t): R^+(t) < x < 1, 0 < t < T\}$$

облысы қатты фазамен,

$$\Omega_T^* = \{(x, t): R^-(t) < x < R^+(t), 0 < t < T\}$$

облысы ауыспалы фазамен толған процес өтеді делік. $R^-(t)$ және $R^+(t)$ функциялары үздіксіз дифференциалданады деп жорамалданған. Күшті үзілісті қозғалыстың анықтамасы бойынша $x = R^-(t)$ және $x = R^+(t)$ сызығынан тыс барлық жерде қозғалыс үзіліссіз, яғни Ω_T^+ және Ω_T^- облыстарда (1) теңдеуі (4) теңдеуіне, ал Ω_T^* облыста

$$\frac{\partial U}{\partial t} = f \quad (6)$$

теңдеуіне эквивалентті және θ мен U сәйкес тұйық облыстарда (1) немесе (4) және (6) теңдеулерге кіретін үзіліссіз туындылары бар функциялар. Сонымен қатар, θ және U функцияларының көрсетілген облыстарда тегістігі χ , s және f функциялардың анық тегіс екендігін атап кеткен жағдайда, (4) теңдеудің шешімінің құрылымы мен параболалық теңдеулер шешімдерінің дифференциалдық қасиеттері туралы болжамнан шығады.

Егер $x = R(t)$ фазалық ауысу бетінің жылдамдығы $R(t)$ функциясының уақыт бойынша туындысы, ал меншікті ішкі энергия сұйық фаза жағынан алғанда $x = R^+(t)$ сызығында нөлге тең, қатты фаза жағынан алғанда $x = R^-(t)$ сызығында $-L$ - ге тең екенін ескерсек, онда

$$[F(\nu - V_\nu) - G\nu] = 0 \quad (7)$$

өрнектен (онда $\nu = 0$, $F = U$, $G = \chi \frac{\partial \theta}{\partial x}$) келесі қатынастар шығады

$$(U(R^-(t) + 0) + L) \frac{dR^-}{dt}(t) = \chi_s \frac{\partial \theta}{\partial x}(R^-(t) - 0, t), \quad (8)$$

$$U(R^+(t) - 0, t) \frac{dR^+}{dt}(t) = \chi_L \frac{\partial \theta}{\partial x}(R^+(t) + 0, t), \quad (9)$$

Бұл шарттар және $t = 0$ бастапқы шартпен $x = \pm 1$ шекаралық шарттарды қоса алғанда математикалық модельді тұйықтау үшін жеткіліксіз. Яғни, қосымша болжамдар қажет.

$$R^-(0) = R^+(0) = x_0 \text{ және } t > 0 \text{ болғанда } R^-(t) < R^+(t) \quad (10)$$

ауыспалы фазаның болатынын зерттейік.

Осы жағдайда берілген есепке қойылған нақты шарттар орындалғанда (8) немесе (9) шеттік шарт екі тәуелсіз шартқа, ал алғашқы есептің өзі тізбектей шешілетін үш автономдық есепке бөлінеді екен.

Айталық, $f(x, t)$ үзіліссіз және $f(x_0, 0) > 0$ болсын делік. θ_* балку температурасын нөлге тең деп есептеуге болады. Ұйғарым бойынша, Ω_T^- облысында θ температура оң емес, ал оның $x = R^-(t)$ оң жақ шекарасында нөлге тең.

Демек,

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}(R^-(t) - 0, t) \geq 0 \quad (11)$$

Осы сияқты

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}(R^+(t) + 0, t) \geq 0 \quad (12)$$

Анықтамасы бойынша ауыспалы фазада меншікті ішкі энергия $(-L, 0)$ интервалынан мәндер қабылдайды басқаша айтқанда,

$$U(R^-(t) + 0) + L \geq 0, U(R^+(t) - 0) + L \geq 0 \quad (13)$$

(9) өрнекті (12) пен (13) өрнектермен салыстырып,

$$\frac{dR^+}{dt}(t) \leq 0$$

болатының көреміз. Бірақ онда (10) – ден ең болмағанда аз уақыт интервалында

$$\frac{dR^-}{dt}(t) < 0$$

болатыны шығады. (8), (11) және (13) – тең соңғы теңсіздік тек

$$U(R^-(t) + 0) + L = 0, \frac{\partial \theta}{\partial x}(R^-(t) - 0, t) = 0 \quad (14)$$

орындалғанда ғана бар болуы мүмкін. Сонымен қатар, (8), (11) және (13) өрнектерден $R^-(t)$ – кемімейтін функция, ал (10) өрнектен және соңғы фактіден $-R^+(t)$ қатаң өспелі функция болатыны – екінші нұсқа да болуы мүмкін.

Бірақ, бұл тек

$$U(R^+(t) - 0, t) = 0, \frac{\partial \theta}{\partial x}(R^+(t) + 0, t) = 0 \quad (15)$$

орындағанда ғана дұрыс болады.

Қашан қандай нұсқа орындалатының білу үшін $\theta(R^-(t) - 0, t) = 0$ теңдеуін уақыт бойынша дифференциалдаймыз:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}(R^-(t) - 0, t) \frac{dR^-}{dt}(t) + \frac{\partial \theta}{\partial t}(R^-(t) - 0, t) = 0.$$

Егер (14) қатынас орындалса, онда (14) – тің екінші теңдеуінен, соңғы теңдіктен, (1) теңдеуден

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}(R^-(t) - 0, t) = -\frac{1}{\chi} f(R^-(t), t)$$

екені шығады.

$\theta(x, t)$ функциясы үшін әрбір белгіленген t мәнінде $x < R^-(t)$ болғанда мына өрнек дұрыс болады:

$$\theta(x,t) = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} (R^-(t) - 0, t) \cdot \frac{|x - R^-(t)|^2}{2} + o(|x - R^-(t)|^2).$$

Соңғы екі қатынасты және $x < R^-(t)$ болғанда температураның қатаң теріс болатынын ескеріп, $f(x_0, 0) > 0$ болғанда бірінші варианттың ((14)-теңдеу) орындалатынын көреміз. Осыған ұқсас $f(x_0, 0) < 0$ болған жағдайда екінші вариант ((15)-теңдеу) орындалады.

Болжауымызда (14) шарттары орындалсын. Онда Ω_T^- облысты анықтайтын $R^-(t)$ функция және осы облыстағы θ температура (1), (2) шарттардан, (14) – қатынастың екінші шартынан, $x = -1$ шекарасындағы шеттік шарттан және $t = 0$ болғандағы бастапқы шарттан табылады. Осы модель тұйық болады.

Айталық, $R^-(t)$ функциясы табылды делік. Онда (6) теңдеуді интегралдау арқылы және (14) өрнектің бірінші шартын қолданып, $x = R^-(t)$ қисығынан жоғары барлық жерде $U(x, t)$ функциясын анықтаймыз:

$$U = -L + \int_{r^-(x)}^t f(x, \tau) d\tau, \quad (16)$$

мұндағы $t = r^-(x)$ сол $x = R^-(t)$ қисығының өзін анықтайды.

Ω_T^+ облысты анықтайтын $R^+(t)$ функция және осы облыстағы θ температура (1) теңдеуден, (2) және (9) шарттардан, $x = 1$ болғандығы шеттік шарттан және $t = 0$ болғандағы бастапқы шарттан анықталады. (9) шеттік шартта U функциясы (16) қатынаспен берілген [3].

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Рубинштейн Л.И. Проблема Стефана - Рига: Звайгзне, 1967, 457 с.
2. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. –М.: Москва, 1968, 427 с.
3. Мейрманов А.М. Задача Стефана. – Новосибирск: Наука, 1986, 239 с.

УДК 517.946

ИНТЕГРАЛДЫҚ ГЕОМЕТРИЯНЫҢ БІР ЖАЗЫҚ ЕСЕБІ ШЕШІМІНІҢ ЖАЛҒЫЗДЫҒЫ

Наурызбай Аружан Наурызбайқызы

aruzhan.nn@mail.ru

Қорқыт Ата атындағы Қызылорда мемлекеттік университеті
политехника факультетінің студенті, Қызылорда, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі – Т.Б. Ділман

Дифференциалдық теңдеулер үшін қойылған кері есептер депосы теңдеулердің шешімі туралы белгілі мәліметтер бойынша дифференциалдық теңдеудің өзін анықтауды айтады [1-3]. Көптеген қолданбалы мәселелер дифференциалдық теңдеулер үшін қойылған кері есептерге келтіреді. Дифференциалдық теңдеулердің көпөлшемді кері есептері Адамар мағынасында корректілі емес. Сондықтан кері есеп шешімінің жалғыздығы мәселесінің маңызы зор. Корректілі емес кері есептердің Тихонов мағынасындағы шартты корректілігін анықтау қажет [3-5].

Кері есептер бірінші текті операторлық теңдеулерге келтіреді. Дербес жағдайда, гиперболалық теңдеулер үшін қойылған кейбір кері есептер бірінші текті Вольтерра типіндегі интегралдық теңдеулерді зерттеуге редукцияланады. Сондықтан бірөлшемді кері