

УДК624.07

РАСЧЕТ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ БАЛКИ МЕТОДОМ ТИМОШЕНКО

Акмаканова Асель Жаналыковна

assel.akmakanova@gmail.com

Докторант 2 курса специальности 8D07329 «Строительство»

ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан

Научный руководитель – д.т.н., профессор Т.Т. Мусабаяв

Метод теории изгиба Тимошенко учитывает деформацию и вращательные изгибы, что делает её применимой для описания поведения толстых балок. В отличие от модели изгиба балки Эйлера-Бернулли модель Тимошенко приводит к уравнению четвертого порядка, которое также содержит частные производные второго порядка.

Если модуль сдвига материала балки принять равным бесконечности (исследовать запретить балку испытывать деформации) и если пренебречь эффектами инерции вращение, то модель Тимошенко сводится к обычной теории изгиба балки. В качестве примера рассмотрим балку, показанную на рисунке 1.

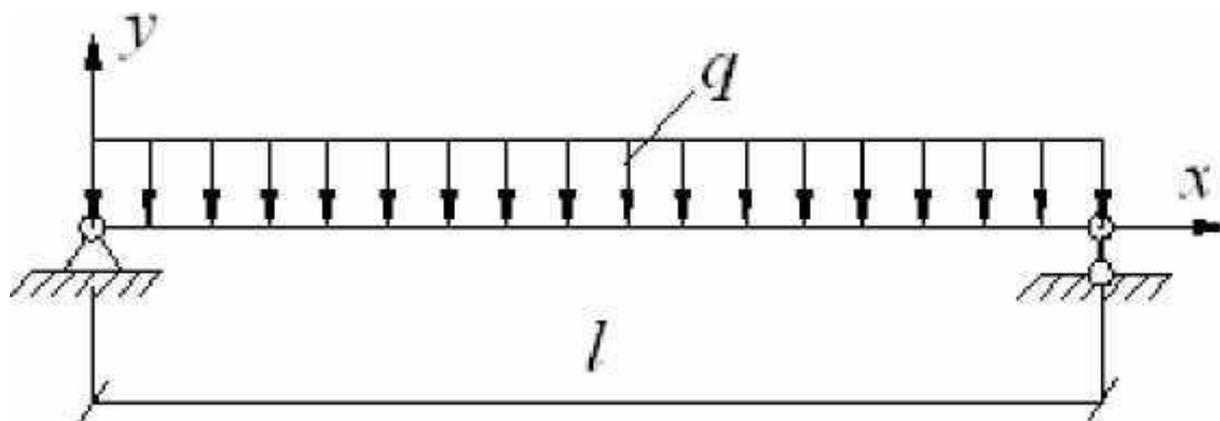


Рисунок 1 - Балка равномерно нагруженная

При численном решении нелинейных задач изгиба балок различными методами рассмотрена железобетонная балка сечением 400x600 мм, длиной $l = 6$ м, нагруженная равномерно распределенной нагрузкой $q = 25$ т/м, что позволит сравнить эффективность различных методов расчета. В приведенном примере имеем довольно несложный вариант нагружения балки. Используется распределенная нагрузка. Рассматриваем случай простого нагружения.

В качестве аппроксимирующей функции возьмем уравнение прогиба упругой балки при заданной нагрузке и заданных граничных условиях. Прогиб нелинейно-упругой балки будем искать в виде $v(x) = a\varphi(x)$.

Переходим к решению задачи. Координатные функции должны соответствовать следующим требованиям.

Обязательно удовлетворять кинематическим граничным условиям $v(0)=0, v(l)=0$

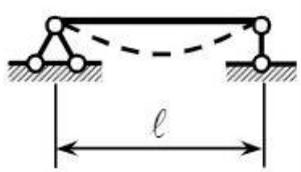
Удовлетворять статическим граничным условиям.

$$M_z(0)=0 \rightarrow v''(0)=0$$

$$M_z(l)=0 \rightarrow v''(l)=0$$

Функции, рекомендуемые для различных условий опирания однопролетных стержней, приведены в таблице 1. Для стержней переменного по длине поперечного сечения в качестве координатных функций выбирают функции прогибов стержней постоянного сечения при тех же условиях опирания и загрузки [3].

Таблица 1 - Схемы функции прогибов

Схема	Функции прогибов
	$v(x) = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + a_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots$ $v(x) = a_1 x(l-x) + a_1 x^2(l-x)^2 + \dots$

Функционал полной потенциальной энергии

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_0^l EJ_z [v''(x)]^2 dx - \int_0^l q \cdot v(x) dx = \frac{EJ_z}{2} \int_0^l [v''(x)]^2 dx - q \int_0^l v(x) dx \quad (1)$$

Решение функции прогибов:

$$v_1(x) = \sum_{i=1}^n a_i \sin \frac{(2i-1)\pi x}{l} \quad (2)$$

Находим первую и вторую производную:

$$v'_1(x) = a_i \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi x}{l}, v''_1(x) = -a_i \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sin \frac{\pi x}{l} \quad (3)$$

Заданная функция $v'_1(x)$ удовлетворяет не только кинематическим граничным условиям, но и статическим $v''_1(0) = 0, v''_1(l) = 0$

Находим предварительные интегралы:

$$\int_0^l \sin^2 \left(\frac{\pi x}{l}\right) dx = \left(\frac{x}{2} - \frac{l}{4\pi} \sin \left(\frac{2\pi x}{l}\right)\right) \Big|_0^l = \frac{l}{2} - \frac{l}{4\pi} \sin(0) = \frac{l}{2}$$

$$\int_0^l \sin \left(\frac{\pi x}{l}\right) dx = \left(-\frac{l}{\pi} \cos \left(\frac{\pi x}{l}\right)\right) \Big|_0^l = -\frac{l}{\pi} (\cos(\pi) - \cos(0)) = \frac{2l}{\pi}$$

$$\frac{EJ_z}{2} \int_0^l [v''(x)]^2 dx = \frac{EJ_z}{2} a_1^2 \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \int_0^l \sin^2 \left(\frac{\pi x}{l}\right) dx = \frac{EJ_z a_1^2}{2} \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \frac{l}{2}$$

$$q \int_0^l v_1(x) dx = q a_1 \int_0^l \sin \left(\frac{\pi x}{l}\right) dx = \frac{2ql a_1}{\pi}$$

Функция полной потенциальной энергии:

$$\mathfrak{E}(a_1) = \frac{EJ_z a_1^2}{2} \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \frac{l}{2} - \frac{2ql a_1}{\pi} \quad (4)$$

Находим производную $\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial a_1}$ и приравниваем ее нулю:

$$\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial a_1} = \frac{EJ_z}{2} \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \frac{l}{2} 2a_1 - \frac{2ql}{\pi} = 0.$$

Из этого уравнения находим неизвестное:

$$a_1 = \frac{2ql}{\pi} \frac{2l^3}{EJ_z \pi^4} = \frac{4ql^4}{\pi^5 EJ_z} \quad (5)$$

Функция прогиба $v_1(x) = \frac{4ql^4}{\pi^5 EJ_z} \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$.

Прогиб балки посередине пролета при $x = \frac{l}{2}$ равен:

$$v_1\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{4ql^4}{\pi^5 EJ_z} = 0,0131 \frac{ql^4}{EJ_z}$$

Точное решение

$$v\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{5ql^4}{384EJ_z} = 0,0130 \frac{ql^4}{EJ_z}$$

Решение, полученное методом конечных разностей с разбиением пролета на четыре части, составило:

$$v_1\left(\frac{l}{2}\right) = 0,0137 \frac{ql^4}{EJ_z}$$

Таким образом решение задачи сводится к подставке числовых данных в готовые формулы. Отличие от точного решения составило 0,8% (метод Ритца) и 5,4% (Метод Ритца–Тимошенко).

В данной статье приведен пример расчета железобетонной балки на шарнирных опорах с заданными параметрами. Для решения задачи по изгибу балки использовался метод Ритца–Тимошенко. Расчет конструкций выполнен с учётом физической нелинейности на примере решения изгибаемой балки. Данный метод применим к расчёту любых конструкций с использованием более общих физических соотношений.

Список использованных источников

1. Тухфатуллин Б.А. Численные методы расчета строительных конструкций: Учебное пособие – Томск: Издательство ТГАСУ, 2017. – 100с.
2. Петров В.В. Методы расчета конструкций из нелинейно-деформируемого материала/М.: Издательство АСУ. 2009. – 208с.
3. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости/М.: Издательство Наука, 1975. – 576с.