

УДК 517.958

**ПОВЕРХНОСТИ, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ СОЛИТОННЫМ УРАВНЕНИЯМ
СИНУС-ГОРДОНА**

Студент 4 курса Механико-математического факультета
Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева

Сариева Фариза Фатиховна
s.fatri.97@gmail.com

Научный руководитель – Нугманова Г.Н., к.ф.-м.н., асс. профессор

В данной работе исследование псевдосферических поверхностей ставится в более широком контексте гиперболических поверхностей через нелинейную систему [1]. Основные информации, необходимые для изложения материала приводятся из классической дифференциальной геометрии кривых и поверхностей [2], [3].

Обозначим через $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ положение точки P на поверхности Σ в $\mathbb{R}^3$. Нормаль вектор определяется как
формы для поверхности Σ определяются в виде

$$\vec{N} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}. \quad (1)$$

I и II фундаментальные формы:

$$I = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \quad II = -d\vec{r} \cdot d\vec{N} = edu^2 + 2fdudv + gdv^2, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} E &= \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u, \quad F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v, \quad G = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v, \quad e = -\vec{r}_u \cdot d\vec{N}_u = \vec{r}_{uu} \cdot \vec{N}, \\ g &= -\vec{r}_v \cdot d\vec{N}_v = \vec{r}_{vv} \cdot \vec{N}, \quad f = -\vec{r}_u \cdot d\vec{N}_v = -\vec{r}_v \cdot d\vec{N}_u = \vec{r}_{uv} \cdot \vec{N}. \end{aligned} \quad (3)$$

Множество коэффициентов $\{E, F, G; e, f, g\}$ определяет поверхность Σ вплоть до ее положения в пространстве [4].

Уравнения Гаусса, связанные с поверхностью Σ имеют следующий вид [3]:

$$\vec{r}_{uu} = \Gamma_{11}^1 \vec{r}_u + \Gamma_{11}^2 \vec{r}_v + e\vec{N}, \quad \vec{r}_{uv} = \Gamma_{12}^1 \vec{r}_u + \Gamma_{12}^2 \vec{r}_v + f\vec{N}, \quad \vec{r}_{vv} = \Gamma_{22}^1 \vec{r}_u + \Gamma_{22}^2 \vec{r}_v + g\vec{N}, \quad (4)$$

в то время как уравнения Вейнгартена задаются как

$$\vec{N}_u = \frac{fF - eG}{H^2} \vec{r}_u + \frac{eF - fE}{H^2} \vec{r}_v, \quad \vec{N}_v = \frac{gF - fG}{H^2} \vec{r}_u + \frac{fF - gE}{H^2} \vec{r}_v, \quad (5)$$

где

$$H^2 = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v|^2 = EG - F^2. \quad (6)$$

Здесь Γ_{jk}^i в (4) - обычные символы Кристоффеля, заданные отношениями

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{g^{il}}{2} (g_{jl,k} + g_{kl,j} - g_{jk,l}), \quad (7)$$

где $x^1 = u$, $x^2 = v$, $I = g_{jk} dx^j dx^k$, и $g^{jk} g_{kl} = \delta_l^j$.

Применение условий совместности $(\vec{r}_{uu})_v = (\vec{r}_{uv})_u$ и $(\vec{r}_{uv})_v = (\vec{r}_{vv})_u$ к линейной системе Гаусса (4) создает нелинейную систему Майнард-Годацци

$$\begin{aligned} \left(\frac{e}{H}\right)_v - \left(\frac{f}{H}\right)_u + \frac{e}{H} \Gamma_{22}^2 - 2 \frac{f}{H} \Gamma_{12}^2 + \frac{g}{H} \Gamma_{11}^2 &= 0, \\ \left(\frac{g}{H}\right)_u - \left(\frac{f}{H}\right)_v + \frac{e}{H} \Gamma_{22}^1 - 2 \frac{f}{H} \Gamma_{12}^1 + \frac{g}{H} \Gamma_{11}^1 &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

или, эквивалентно,

$$\begin{aligned} e_v - f_u &= e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2, \\ f_v - g_u &= e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Гауссова кривизна предоставляется выражением

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \quad (10)$$

или в представлении Лиувилля

$$K = \frac{1}{H} \left[\left(\frac{H}{E} \Gamma_{11}^2 \right)_v - \left(\frac{H}{E} \Gamma_{12}^2 \right)_u \right]. \quad (11)$$

Если полная кривизна Σ отрицательна, т. е. если Σ является гиперболической поверхностью, то асимптотические линии на Σ можно принять за параметрические кривые. В случае $e=g=0$ уравнения Майнарди-Кодацци (8) сводятся к виду

$$\left(\frac{f}{H}\right)_u + 2\Gamma_{12}^2 \frac{f}{H} = 0, \quad \left(\frac{f}{H}\right)_v + 2\Gamma_{12}^1 \frac{f}{H} = 0, \quad (12)$$

в то время как кривизна примет вид

$$K = -\frac{f^2}{H^2} = -\frac{1}{\rho^2} \quad (13)$$

и

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{GE_v - FG_u}{2H^2}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{EG_u - FE_v}{2H^2}. \quad (14)$$

Угол ω между параметрическими линиями таков, что

$$\cos \omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \quad \sin \omega = \frac{H}{\sqrt{EG}}. \quad (15)$$

Так как $E, G > 0$, мы можем взять без потери общности

$$E = \rho^2 a^2, \quad G = \rho^2 b^2. \quad (16)$$

Откуда I и II сводятся к виду

$$\begin{aligned} I &= \rho^2 (a^2 du^2 + 2ab \cos \omega dudv + b^2 dv^2), \\ II &= 2\rho ab \sin \omega dudv. \end{aligned} \quad (17)$$

Уравнения Майнард-Кодацци (9) теперь показывают, что

$$a_v + \frac{1}{2} \frac{\rho_v}{\rho} a - \frac{1}{2} \frac{\rho_u}{\rho} b \cos \omega = 0, \quad b_u + \frac{1}{2} \frac{\rho_u}{\rho} b - \frac{1}{2} \frac{\rho_v}{\rho} a \cos \omega = 0, \quad (18)$$

в то время как представление (10) для полной кривизны дает

$$\omega_{uv} + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_u}{\rho} \frac{b}{a} \sin \omega \right)_u + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_v}{\rho} \frac{a}{b} \sin \omega \right)_v - ab \sin \omega = 0. \quad (19)$$

В частном случае, когда $K = -1/\rho^2 < 0$ постоянная, Σ называется псевдосферической поверхностью. А уравнения Майнард-Кодацци (19) дают $a = a(u)$, $b = b(v)$. Теперь, когда Σ параметризована длиной дуги вдоль асимптотических линий (соответствующих преобразованию $du \rightarrow du' = \sqrt{E(u)} du, dv \rightarrow dv' = \sqrt{G(v)} dv$), то при отбрасывании простых чисел фундаментальные формы становятся

$$I = du'^2 + 2 \cos \omega du' dv' + dv'^2, \quad II = \frac{2}{\rho} \sin \omega du' dv', \quad (20)$$

в то время как (19) сводится к знаменитому уравнению синус-Гордон

$$\omega_{uv} = \frac{1}{\rho^2} \sin \omega. \quad (21)$$

Соответствующие уравнения Гаусса примут вид

$$\begin{aligned} r_{uv} &= \omega_u \cot \omega r_u - \omega_u \operatorname{cosec} \omega r_v, \\ r_{uv} &= \frac{1}{\rho} \sin \omega N, \\ r_{vv} &= -\omega_v \operatorname{cosec} \omega r_u + \omega_v \cot \omega r_v, \end{aligned} \quad (22)$$

А уравнения Вайнгартена:

$$N_u = \frac{1}{\rho} \cot \omega r_u - \frac{1}{\rho} \operatorname{cosec} \omega r_v, \quad N_v = -\frac{1}{\rho} \operatorname{cosec} \omega r_u + \frac{1}{\rho} \cot \omega r_v. \quad (23)$$

Теперь уравнения Гаусса-Вейнгартена (22), (23) можно использовать для получения выражений для производных от A, B и C по u и v , а именно

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_u = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_u & 0 \\ \omega_u & 0 & 1/\rho \\ 0 & -1/\rho & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}, \quad (24)$$

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (1/\rho) \sin \omega \\ 0 & 0 & -(1/\rho) \cos \omega \\ -(1/\rho) \sin \omega & (1/\rho) \cos \omega & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}.$$

Эта линейная система совместима тогда и только тогда, когда удовлетворяет уравнению синус-Гордона (21).

Для построения псевдосферических поверхностей, соответствующих солитонным решениям уравнения синус-Гордона, используем метод преобразования Бэклунда. В этом контексте удобно параметризовать псевдосферические поверхности в терминах координат кривизны

$$x = u + v, \quad y = u - v. \quad (25)$$

Если полагаем $\omega = 2\theta$, то I и II фундаментальные формы (21) станут

$$I = \cos^2 \theta dx^2 + \sin^2 \theta dy^2, \quad (26)$$

$$II = \frac{1}{\rho} \sin \theta \cos \theta (dx^2 - dy^2). \quad (27)$$

Таким образом, ортонормированная триада может быть введена согласно

$$A^* = \frac{r_x}{\cos \theta}, \quad B^* = \frac{r_y}{\sin \theta}, \quad C^* = N, \quad (28)$$

и тогда уравнения Гаусса-Вейнгартена (22) и (23) дают

$$\begin{pmatrix} A^* \\ B^* \\ C^* \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} 0 & \theta_y & \frac{1}{\rho} \sin \theta \\ -\theta_y & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\rho} \sin \theta & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^* \\ B^* \\ C^* \end{pmatrix}, \quad (29)$$

$$\begin{pmatrix} A^* \\ B^* \\ C^* \end{pmatrix}_y = \begin{pmatrix} 0 & \theta_x & 0 \\ -\theta_x & 0 & -\frac{1}{\rho} \cos \theta \\ 0 & \frac{1}{\rho} \cos \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^* \\ B^* \\ C^* \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Эта линейная система в $\{A^*, B^*, C^*\}$ совместима тогда и только тогда, когда

$$\theta_{xx} - \theta_{yy} = \frac{1}{\rho^2} \sin \theta \cos \theta. \quad (31)$$

Эта версия уравнения синус-Гордона в координатах кривизны является наиболее распространенной в физических приложениях.

Далее покажем, что стационарное односолитонное решение уравнения (31)

$$\theta = 2 \tan^{-1} \left[\exp \left(\frac{x}{\rho} + \alpha \right) \right] \quad (32)$$

соответствует псевдосферической поверхности вращения, известной как псевдосфера Бельтрами [3]. Чтобы установить связь между стационарным односолитонным решением

(32) и псевдосферой, следует напомнить, что радиус вектор $\mathbf{r}$ поверхности вращения, создаваемый вращением плоской кривой $z = \phi(r)$ вокруг оси z , задается

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r \cos \eta \\ r \sin \eta \\ \phi(r) \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Здесь круги $r = \text{const}$ являются параллелями, а кривые $\eta = \text{const}$ известны как меридианы. Теперь I и II квадратичные формы, связаны с поверхностью (33) будут иметь вид

$$I = [1 + \phi'(r)^2] dr^2 + r^2 d\eta^2, \quad II = \frac{\phi''(r) dr^2}{\sqrt{1 + \phi'(r)^2}} + \frac{r \phi'(r) d\eta^2}{\sqrt{1 + \phi'(r)^2}}. \quad (34)$$

Таким образом, $F = f = 0$, так что координатные линии $r = \text{const}$, $\eta = \text{const}$, а именно параллели и меридианы, соответственно, являются линиями кривизны на поверхности вращения. Если мы напишем

$$I = d\xi^2 + r^2 d\eta^2, \quad (35)$$

где

$$d\xi = \sqrt{1 + \phi'(r)^2} dr, \quad r = r(\xi), \quad (36)$$

тогда Гауссова кривизна (10) преобразуется к виду

$$K = -\frac{1}{r} \frac{d^2 r}{d\xi^2}, \quad (37)$$

откуда общая псевдосферическая поверхность вращения принимает форму

$$r = c_1 \cosh \frac{\xi}{\rho} + c_2 \sinh \frac{\xi}{\rho}, \quad (38)$$

где ρ является постоянной величиной. В частности, в случае $C_1 = C_2 = C$, соответствующего так называемым параболическим псевдосферическим поверхностям вращения, меридианы определяются как

$$r = c e^{\xi/\rho}, \quad (39)$$

в то время

$$z = \phi(r) = \int \sqrt{1 - (c^2 / \rho^2) e^{2\xi/\rho}} d\xi. \quad (40)$$

Подстановка $\sin \psi = \frac{c}{\rho} e^{\xi/\rho}$ в (40) дает

$$z = \rho \left(\cos \psi + \ln \left| \tan \frac{\psi}{2} \right| \right), \quad (41)$$

откуда $dz = \cot \psi dr$ так, что ψ - это угол между касательной к меридианеи осью z . Расстояние $d = r \operatorname{cosec} \psi$ от общей точки на меридиане до оси z , измеренное вдоль касательной, рассматривается как ρ и, следовательно, является константой. Следовательно, параболическая псевдосферическая поверхность вращения создается вращением вокруг оси z (трактрис). Эта поверхность известна как псевдосфера.

Чтобы определить решение уравнения синус-Гордона (31), соответствующего псевдосфере, последняя должна быть параметризована согласно (26) и (27). В терминах ψ и η радиус вектор псевдосферы определяется выражением

$$r = \begin{pmatrix} \rho \operatorname{sech}\left(\frac{x}{\rho} + \alpha\right) \cos\left(\frac{y}{\rho}\right) \\ \rho \operatorname{sech}\left(\frac{x}{\rho} + \alpha\right) \sin\left(\frac{y}{\rho}\right) \\ \rho \left[\frac{x}{\rho} + \alpha - \tanh\left(\frac{x}{\rho} + \alpha\right) \right] \end{pmatrix}, \quad (42)$$

откуда

$$\begin{aligned} I &= \rho^2 \cot^2 \psi d\psi^2 + \rho^2 \sin^2 \psi d\eta^2, \\ II &= \rho \cot \psi d\psi^2 - \rho \sin \psi d\eta^2. \end{aligned} \quad (43)$$

Если мы введем x и y в соответствии с

$$dx = \rho \operatorname{sech} \psi d\psi, \quad y = \rho \eta, \quad (44)$$

тогда I и II фундаментальные формы в (43) принимают вид (26) и (27) соответственно с $\theta = \psi$. Интегрирование (44) дает односолитонное решение (32).

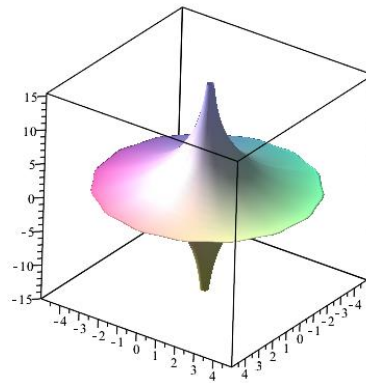


Рисунок 1. Псевдосфера Бельтрами

В терминах линий параметров кривизны x и y радиус вектор псевдосферы равен

$$r(x, y) = \begin{pmatrix} \rho \sin \psi \cos \eta \\ \rho \sin \psi \sin \eta \\ \rho \left(\cos \psi + \ln \left| \tan \frac{\psi}{2} \right| \right) \end{pmatrix}. \quad (45)$$

Здесь координатные линии $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$ являются параллелями и меридианами, соответственно. Псевдосфера, построенная с использованием координатного вектора (42), показана на Рисунке 1.

Список использованных источников

1. L.Bianchi, *Lezioni di geometriadifferenziale* **1-4**, Zanichelli, Bologna (1923-1927).
2. M.P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey (1976).
3. D.J.Struick, *Lectures on Classical Differential Geometry*, 2nded, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass. (1961).
4. O. Bonnet, Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée, *J. l'Ecole Polytech.* **41**, 201-230 (1865) ; *J. l'Ecole Polytech.* **42**, 1-151 (1867).