УДК 517.951

ОБ ОДНОМ ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ФУНКЦИЙ ЦЕЛОЙ, НЕЦЕЛОЙ ГЛАДКОСТИ

Мурат Гулнар
muratgulnar1988@gmail.com
докторант второго года обучения специальности Математика
ЕНУ им. Л. Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
Научный руководитель – Л. К. Кусаинова

Пусть Ω - n -мернаяобласть с непустойграницей $\partial\Omega$. Пусть I^n - множествокубов

$$Q = Q_h(x) = \{y \in R^n : \left|y_j - x_j\right| < h/2; 1 \le j \le n\}$$

Положим

$$h(x) = \sup\{h > 0 : Q_h(x) \subset \Omega\}.$$

Понятно, что $Q_{h(x)}(x) \subset \Omega$ и $\overline{Q_h}(x) \subset \partial\Omega \neq 0$.

Имеют место следующие тривиально доказываемые свойства:

$$2^{-1}h(x) \le dist(x, \partial\Omega) \le 2^{-1}\sqrt{n}h(x).$$

Если $Q = Q_d(x), \overline{Q} \subset \Omega$, то

$$d < h(x) \text{ и } \overline{\lambda Q} \subset \Omega \text{ для } 1 < \lambda < h(x)/d .$$

Справедливы также оценки

$$\xi h(x) \le h(y) \le \xi^{-1}h(x) \text{, если } y \in (1-\xi)Q_{h(x)}(x) . \tag{1}$$

Положим $Q(x) = Q_{h(x)}(x), \rho(x) = h^{\mu}(x)$ $(\mu < 0)$, $v_s(x) = \rho(x)h^{-s}(x)$ $(s > 0)$. Веса ρ, v_s удовлетворяют условиям: существует такое $\kappa = \kappa(\mu, n) > 1$, что

$$\frac{1}{\kappa} \le \frac{\rho(y)}{\rho(x)}, \frac{v_s(y)}{v_s(x)} \le \kappa \text{, если } \tilde{Q}(x) = \frac{3}{4}Q(x).$$

В силу условия (1) на функцию $h(\cdot)$ из семейства кубов $\{\hat{Q}(x), x \in \Omega\}$, $(\hat{Q}(x) = 3/4\tilde{Q}(x)$, можно извлечь такое κ_1-кратное и κ_2- разделимое покрытие $\{\hat{Q}^j, j \in J\}$ $(\hat{Q}^j = \hat{Q}(x^j))$, что семейство $\{\tilde{Q}^j, j \in J\}$ будет $\tilde{\kappa}_1$-кратным и $\tilde{\kappa}_2$- разделимым, а именно $\{\tilde{Q}^j, j \in J\}$ распадается на подсемейства $\{\tilde{Q}^j, j \in J_k\}$, состоящие из попарно не пересекающихся кубов. При этом κ_i $\tilde{\kappa}_i$ зависят только от n и κ.

Данному покрытию можно соотнести семейство функций $\{\psi_j, j \in J\}$, $\psi_j \in D$ таких что: $supp(\psi_j) \subset \overline{\tilde{Q}^j}$, $0 \le \psi_j \le 1$, $\sum \psi_j = 1$ в Ω, $\psi_j = 1$ на $\hat{Q}^j$, $\max\limits_{\tilde{Q}^j} |D^{\alpha}\psi_j| \le ch(x^j)^{-m}$ $(|\alpha| = m)$ и $D^{\alpha}u(y) = \sum\limits_{j \in J} D^{\alpha}(u\psi_j)(y)$ [1].

Пусть $s > 0, 1 < p < \infty$, $D(\Omega)$- пространство бесконечно дифференцируемых и финитных в Ω функций, H_p^s пополнение $D = D(R^n)$ по норме:

$$\|f : H_p^s\| = \|J_s f\|_p ,$$

где $(J_s f)(x) = (F^{-1}(1+\xi^2)^{s/2} Ff)(x)$; $(\xi^2 = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j^2)$,

F - оператор Фурье. Положим

$$\|f : H_p^s(\rho, v_s)\| = \left[\sum_{j \ge 1} (\rho^p(x^j) \|\psi_j f; H_p^s\|^p + v_s^p(x^j) \|\psi_j f\|_p^p) \right]^{1/p} . \tag{2}$$

Утверждение 1. Пусть $\{\hat{Q}(x^j),\tilde{Q}(x^j)\}\{j\in J\}$ и $\{\hat{Q}(t^k),\tilde{Q}(t^k)\}\,(k\in K)$ - двойные покрытия Ω, $\{\psi_j\}$ и $\{\varphi_k\}$ соответственно соотнесенные им разбиение единиц. Тогда, если одна из сумм

$$\|f\|_{(1)}^p=\sum_{j\ge1}(\rho^p(x^j)\|\psi_j f\|_{s,p}^p+v_s^p(x^j)\|\psi_j f\|_p^p)$$

или

$$\|f\|_{(2)}^p=\sum_{k\ge1}(\rho^p(t^k)\|\varphi_k f\|_{s,p}^p+v_s^p(t^k)\|\varphi_k f\|_p^p)$$

конечно, то конечна и вторая.

На основании утверждения 1 корректно введение пространства $H_p^s(\rho,v_s)$ как пополнение класса $D(\Omega)$ по норме (2).

Если $s=m>0$ - целое, то $H_p^s(\rho,v_s)=W_p^m(\rho,v_m)$ есть весовое пространство Соболева с эквивалентной нормой

$$\|f;W_0^m(\rho,v_m)\|=\left[\int_\Omega\left(|\rho(x)\nabla_m f|^p+|v_m(x)f|^p\right)dx\right]^{1/p}.$$

Пусть $0<m_1<m_0$ - целые, $0<\theta<1$, $s=(1-\theta)m_0+\theta m_1$ - нецелое, $[s]=m$ - целая часть s , $\{s\}=s-m.$ Обозначим через $W_p^s(\rho,v^s)$ пополнение класса $D(\Omega)$ по норме

$$\|u;W_p^s(\rho,v^s)\|=\left[\sum_{|\alpha|=[s]}\int_{\Omega\times\Omega}\frac{\left|\rho(x)\left(D^\alpha u(y)-D^\alpha u(x)\right)\right|^p}{|y-x|^{n+\{s\}p}}\right]+\left(\int_\Omega|v_s(x)u|^p dx\right)^{1/p}.$$

Пусть далее B_s - единичный шар пространства $W_2^s(\rho,v^s)$,

$$d_k(B_s)=\inf_{\substack{\Lambda\subset L_2(\Omega)\\ \dim\Lambda\le K}}\sup_{u\in B_s}\inf_{f\in\Lambda}\|u-f\|_{L_2(\Omega)}$$

- k-поперечник по Колмогорову шара B_s - в гильбертовом пространстве L_2 с нормой

$$\|f;L_2(\Omega)\|=\left(\int_\Omega|f(x)|^2dx\right)^{1/2}.$$

Теорема.Пусть

$$K_i=\int_\Omega\rho^{-n/m_i}(x)dx<\infty,\ i=0,1.$$

Тогда шар B_s предкомпакт в $L_2(\Omega)$ и справедлива оценка

$$\sup_{k\geq 0}(k+1)^{s/n}d_k(B_s)\leq cK_0^{(1-\theta)m_0/n}K_1^{\theta m_1/n}.$$

Список использованных источников

1. Кусаинова Л.К. Об интерполяции весовых пространств Соболева. Известия МН-АН РК, серия физ.-мат. №5, 1997, С33-51.
2. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы, М.: Мир, 1980.