ӘОЖ 517.929

АҚЫРСЫЗ ФУНКЦИОНАЛЬ-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІНІҢ КОШИ МАТРИЦАСЫ

Мұқашева Тоғжан Дидарқызы
togjan.95.08@mail.ru
Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ 6М060100-математика мамандығының 2-курс магистранты, Нур-Султан, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі – А.Ибатов

$\Im : D_p^\infty \to L_p^\infty$ сызықты анықталу облысы D_p^∞ кеңістігіне тығыз орналасқан тұйық оператор болсын.

$$\Im x = f \tag{1}$$

теңдеуін қарастырайық.

$x \in D_p^\infty$ болғандықтан

$$x(t) = \int_a^t \dot{x}(s)ds + x(a)$$

теңдігі орындалады. Осы теңдікті пайдаланып (1) теңдеуді

$$\Im\left(\int_a^t \dot{x}(s)ds + x(a)\right) = f(t), t \in [a,b]$$

немесе

$$(Q\dot{x})(t) = +A(t)x(a) = f(t), t \in [a,b] \tag{2}$$

түрінде жазуға болады [1], [2].

Мұндағы

$Q : L_p^\infty \to L_p^\infty$ бейнелейтін, әсері

$$(Qy)(t) = (\Im\Gamma y)(t), (\Gamma y)(t) = \int_a^t y(s)ds$$

арқылы анықталатын оператор. Оны $\Im$ операторының "бас бөлігі" деп атайды.
$A : R^{\infty} \to L_p^{\infty}$ бейнелейтін, әсері

$$(A\alpha)(t) = (\Im\alpha)(t) = A(t)x(a), \alpha = x(a)$$

арқылы анықталатын оператор
$Q \in V_{\varphi}$ болсын. Егер $Q : L_p^{\infty} \to L_p^{\infty}$ оператор қайтымды болса, онда

$$\Im x = f, x(a) = 0 \quad (3)$$

жартылай біртекті Коши есебінің шешімін

$$x(t) = \int_a^t \left(Q^{-1} f\right)(s) ds \quad (4)$$

түрінде жаза аламыз. Егер Q^{-1} - вольтерлік, яғни

$$\forall \tau \in [a,b], y \in L_p^{\infty} : \{ y(t) = 0, t \in [a,\tau]\} \Rightarrow \{(Q^{-1} y)(t) = 0, t \in [a,\tau]\}$$

шартын қанағаттандыратын оператор болса, онда (4) теңдігін

$$x(t) = \int_a^t C(t,s) f(s) ds \quad (5)$$

түрінде жазуға болады [1]. Мұндағы $C(t,s)$ - $a \le s \le t \le b$ үшбұрышында анықталған ақырсыз матрица [3].
$Q^{-1} : L_p^{\infty} \to L_p^{\infty}$ операторының шенелгендігінен $C(t,s)$ матрицасының әрбір жолы нөлден өзгеше саны ақырлы элементтерді қамтитындығы шығады. Ақырлы өлшем жағдайындағыдай $C(t,s)$ матрицасын (1) теңдеудің Коши матрицасы деп атайтын боламыз. Әрі қарай ыңғайлы болу үшін $a \le t < s \le b$ болғанда $C(t,s) = 0$ деп есептейтін боламыз.

Коши матрицасының қасиетін зерттеу $C(t,s)$ - қандай да бір аргументі бойынша бір айнымалы функция ретінде шешім болатын теңдеумен байланысты жүргізіледі.

$Q^{-1} \in V_{\psi}$ болсын. Мұндағы
$\psi : N \to N, \psi(N)$ бейнесінде қайтымды және $\alpha \le \psi(\alpha)$ теңсіздігін қанағаттандыраты функция. L_p^{∞} кеңістігіндегі жартылай нормалар жүйесінің монотондылығын және (5) теңдіктк ескеріп мынандай қорытынды жасауға болады: жартылай нормалар жүйесінің нөмірі $\psi(\alpha) \in N$ арқылы анықталатын $\tilde{L}_p^{\infty}$ кеңістігі жартылай нормалар жүйесінің нөмірі $\alpha \in N$ арқылы анықталатын L_p^{∞} кеңістігіне эквивалент болады.

Теорема ([5] қараңыз). Егер $Q' - Q : \tilde{L}_p^{\infty} \to L_p^{\infty}$ операторна V_{φ} түйіндес оператор болса, онда (1) теңдеудің $C(t,s)$ Коши матрицасы әрбір бекітілген $t \in [a,b]$ үшін

$$Q'[\chi(t,\cdot)C(t,\cdot)](s) = \chi(t,s) I \quad (6)$$

V_{φ} түйіндес теңдеудің шешімі болады.
Мұндағы I бірлік матрица;

$$\chi(t,s) - \{(t,s) \in [a,b] \times [a,b] : a \le s \le t \le b\}$$

жиынының характеристикалықфункциясы; Q' операторы $[\chi(t,\cdot)C(t,\cdot)]$ матрицасының жолына әсер етеді.

Дәлелдеуі.

$$\forall t \in [a,b] : \int_a^t C(t,s) f(s) ds = \int_a^t (Q^{-1} f)(s) ds (\forall f \in L_p^{\infty})$$

болғандықтан $Q: L_p^\infty \to L_p^\infty$ операторының анықталу облысынан алынған кез-келген y үшін

$$\int_a^t C(t,s)(Qy)(s)ds = \int_a^t y(s)ds,\ t\in(a,b]$$

теңдігі орындалады. Онда

$$\forall\alpha\in N: \int_a^b \chi(t,s)C_{\alpha\psi(\alpha)}(t,s)(K_{\psi(\alpha)}[L_p^\infty](Qy))(s)ds =$$

$$= \int_a^b \chi(t,s)I_{\alpha\alpha}(t,s)(K_\alpha[L_p^\infty](y))(s)ds,\ t\in(a,b] \qquad (7)$$

Мұндағы $C_{\alpha\psi(\alpha)}$ - сол жақ жоғарғы бұрышында $C(t,s)$ матрицасы тұратын $\alpha\times\psi(\alpha)$ өлшемді матрица, $I_{\alpha\alpha} - \alpha\times\alpha$ -өлшемді бірлік матрица.

(7) теңдіктің сол жағы әрбір $t\in(a,b]$ үшін $[L_p^\infty]^{(\alpha)}$ кеңістігінде анықталған сызықты шенелген вектор-функционалды анықтайды. Сондықтан

$$\int_a^b \chi(t,s)C_{\alpha\psi(\alpha)}(t,s)(K_{\psi(\alpha)}[L_p^\infty](Qy))(s)ds = \int_a^b \chi(t,s)C_{\alpha\psi(\alpha)}(t,s)(Q_{\psi(\alpha)}K_{\varphi(\psi(\alpha))}[L_p^\infty](y))(s)ds =$$

$$= \int_a^b Q^*_{\psi(\alpha)}[\chi(t,\cdot)C_{\alpha\psi(\alpha)}(t,\cdot)](s)(K_{\varphi(\psi(\alpha))}[L_p^\infty](y))(s)ds,$$

мұндағы

$Q^*_{\psi(\alpha)}[\chi(t,\cdot)C_{\alpha\psi(\alpha)}(t,\cdot)]$- әрбір жолы сәйкес $[\chi(t,\cdot)C_{\alpha\psi(\alpha)}(t,\cdot)]$ жолына $Q^*_{\psi(\alpha)}$ түйіндес операторын қолдану арқылы алынған $\alpha\times\varphi(\psi(\alpha))$ өлшемді оператор. (7) теңдіктен $Q: L_p^\infty \to L_p^\infty$ операторының анықталу облысынан алынған кез-келген y үшін

$$\int_a^b Q^*_{\psi(\alpha)}[\chi(t,\cdot)C_{\alpha\psi(\alpha)}(t,\cdot)](s)(K_{\varphi(\psi(\alpha))}[L_p^\infty](y))(s)ds =$$

$$= \int_a^b \chi(t,s)I_{\alpha\varphi(\psi(\alpha))}(K_{\varphi(\psi(\alpha))}[L_p^\infty](y))(s)ds,\ t\in(a,b] \qquad (8)$$

теңдігінің орындалатындығы шығады.

Мұндағы $I_{\alpha\varphi(\psi(\alpha))} - I_{\alpha\alpha}$ матрицасына $\varphi(\psi(\alpha)) - \alpha$ нөлдік бағанын қосқаннан шыққан $\alpha\times\varphi(\psi(\alpha))$ өлшемді бірлік матрица. Q операторының анықталу облысы L_p^∞ кеңістігіне тығыз орналасқандықтан $(\overline{D(Q)} = L_p^\infty)$ (8) теңдіктен

$$Q^*_{\psi(\alpha)}[\chi(t,\cdot)C_{\alpha\psi(\alpha)}(t,\cdot)](s) = \chi(t,s)I_{\alpha\varphi(\psi(\alpha))},\ t\in(a,b] \qquad (9)$$

теңдігін аламыз. $\psi(\alpha) = \beta$ деп алып

$$\forall\beta\in N: Q^*_\beta[\chi(t,\cdot)C_{\psi^{-1}(\beta)\beta}(t,\cdot)](s) = \chi(t,s)I_{\psi^{-1}(\beta)\varphi(\beta)}$$

теңдігіне келеміз. Бұдан V_φ- түйіндес теңдеудің анықтамасынан (6) теңдік шығады.Теорема толық дәлелденді.

Енді теореманың тұжырымын қолданбалы есептерде жиі кездесетін операторлыр үшін келтірейік.

I. $Q: L_p^\infty \to L_p^\infty$ шенелген және вольтерлік оператор болсын. $Q_\beta : L_p^{(\varphi(\beta))} \to L_p^\beta$ сызықты шенелген оператордың жалпы түрін ескере отырып

$$(Qy)(t)=\frac{d}{dt}\int_a^b Q(t,s)\,y(s)ds$$

деп тұжырым жасауға болады.

Мұндағы $Q(t,s)$ ақырсыз матрицасы келесі шарттарды қанағаттандырады:

1) $Q(t,s)$ матрицасы $[a,b]\times[a,b]$ жиынында өлшемді;
2) Әрбір $t\in[a,b]$ үшін $Q(t,\cdot)$ матрицасының бағандары $L_q^{\infty}\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1\right)$ кеңістігіне жатады;
3) $\forall y\in L_p^{\infty}:\int_a^b Q(\cdot,s)\,y(s)ds\in D_p^{\infty}$.

$Q\in V_{\varphi}$ болғандықтан кез-келген $\beta\in N$ нөмірі үшін $Q(t,s)$ матрицасының β жолында $\varphi(\beta)+1$ нөмірен бастап нөлдер тұрады. Q вольтерлік оператор болғандықтан

$$(Qy)(t)=\frac{d}{dt}\int_a^b Q(t,s)\,y(s)ds$$

теңдігі орынды. [6] еңбегінде келтірілгендей түрлендірулер жасау арқылы

$$(Q_{\beta}^{*}(K_{\beta}[L_p^{\infty}](y))(t)=(K_{\beta}[L_p^{\infty}](y))(t)\frac{d}{dt}\int_a^b Q_{\beta\varphi(\beta)}(t,\tau)d\tau+$$
$$+\frac{d}{dt}\int_{\tau}^{b}(K_{\beta}[L_p^{\infty}](y))(s)\{\frac{d}{ds}\int_a^t Q_{\beta\varphi(\beta)}(s,\tau)d\tau\}ds$$

теңдігін аламыз.

Сондықтан кез-келген $\beta=\psi(\alpha),\alpha\in N$ үшін (9) теңдеуді келесі түрде жазуға болады:

$$\chi(t,s)C_{\psi^{-1}(\beta)\beta}(t,s)\frac{d}{ds}\int_a^s Q_{\beta\varphi(\beta)}(s,\tau)d\tau+$$
$$+\frac{d}{ds}\int_s^t\chi(t,\tau)C_{\psi^{-1}(\beta)\beta}(t,\tau)\left\{\frac{d}{d\tau}\int_a^s Q_{\beta\varphi(\beta)}(\tau,\xi)d\xi\right\}d\tau=\chi(t,s)I_{\psi^{-1}(\beta)\varphi(\beta)},$$

немесе

$$C_{\psi^{-1}(\beta)\beta}(t,s)\frac{d}{ds}\int_a^s Q_{\beta\varphi(\beta)}(s,\tau)d\tau+$$
$$+\frac{d}{ds}\int_s^t C_{\psi^{-1}(\beta)\beta}(t,\tau)\left\{\frac{d}{d\tau}\int_a^s Q_{\beta\varphi(\beta)}(\tau,\xi)d\xi\right\}d\tau=I_{\psi^{-1}(\beta)\varphi(\beta)},s\in[a,t] \tag{10}$$

II. $Q:L_p^{\infty}\to L_p^{\infty}$ операторы

$$Q=I-S-P \tag{11}$$

түрінде берілген болсын. Мұндағы $S:L_p^{\infty}\to L_p^{\infty}$, әсері

$$(Sy)(t)=\sum_{i=1}^{k}B^{i}(t)(S_{g_i}y)(t),t\in[a,b]$$

арқылы анықталатын ішкі суперпозиция операторы және

$$(S_{g_i}y)(t)=\begin{cases}y(g_i(t)),егер\ g_i(t)\in[a,b],\\0,егер\qquad g_i(t)\notin[a,b].\end{cases}$$

$g_i(t) \le t, t \in [a,b]; B^i, i = \overline{1,k} - \{b_{ij}\}(b_{ij}(t) = 0, t \in [a,b], егер\ j > \varphi(i))$ функцияларының ақырсыз матрицасы.

Бұл жерде $S : L_p^\infty \to L_p^\infty$ үзіліссіз оператор деп ұйғарамыз. [7] еңбекте

$$(S_\beta^* y)(t) = \frac{d}{dt}\int_\tau^b (K_\beta[L_p^\infty](y))(s)\sum_{i=1}^k B^i_{\beta\varphi(\beta)}\sigma_i(t,s)$$

болатындығы дәлелденген. Мұндағы

$$\sigma_i(t,s) - \{(t,s) \in [a,b]\times[a,b] : a \le g_i(s) \le t\}$$

жиынының характеристикалық функциясы.

$P : L_p^\infty \to L_p^\infty$ бейнелейтін, әсері

$$(Py)(t) = \int_a^t P(t,s)y(s)ds$$

арқылы анықталатын вольтерлік итегралдық оператор.

$P \in V_\varphi$ және әрбір $\beta \in N$ үшін $P_\beta : [L_p^\infty]^{(\varphi(\beta))} \to (L_p^\infty)^{(\beta)}$:

$$(P_\beta K_{\varphi(\beta)}[L_p^\infty](y))(t) = \int_a^b P_{\beta\varphi(\beta)}(t,s)(K_{\varphi(\beta)}[L_p^\infty](y))(s)ds$$

регуляр болсын деп ұйғарайық.

(II) жағдай үшін (9) теңдеуді

$$C_{\psi^{-1}(\beta)\varphi(\beta)}(t,s) - C_{\psi^{-1}(\beta)\beta}(t,s)\sum_{i=1}^k B^i_{\beta\varphi(\beta)}(s)\sigma_i(s,s) - \frac{d}{ds}\int_s^t C_{\psi^{-1}(\beta)\beta}(t,\tau)\sum_{i=1}^k B^i_{\beta\varphi(\beta)}(s)\sigma_i(s,\tau)d\tau -$$

$$-\int_s^t C_{\psi^{-1}(\beta)\beta}(t,\tau)P_{\psi^{-1}\beta\varphi(\beta)}(\tau,s)d\tau = I_{\psi^{-1}(\beta)\varphi(\beta)}, s \in [a,b] \qquad (12)$$

түрінде жазуға болады.

$Q : L_p^\infty \to L_p^\infty$ бейнелейтін шенелген оператор болған жағдайда (12) теңдеу [6] жұмыста алынған, ал $p = 1$ болғанда P операторына бірнеше қатаң ұйғарымдар жасау арқылы [6] еңбектен бұрын [8] еңбекте алынған.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Азбелев Н.В., Рахматуллина Л.Ф. Функционально - дифференциальные уравнения // Дифференц. уравнения. - 1978. - Т. 14, № 5. -С. 711-727
2. Лицына Е.М. О бесконечной системе линейных функционально - дифференциальных уравнений // Функц. –дифференц. уравнения. –Пермь, 1985. –С. 20-25
3. Лицына Е.М. Оператор Грина бесконечной системы функционально - дифференциальных уравнений // Краевые задачи. –Пермь, 1986. –С. 55-61
4. Лицына Е.М. К теории линейных уравнений в пространствах Фреше. 1 // Функц. –дифференциал. уравнения. –Пермь, 1986. –С. 103-111
5. АзбелевН.В., Максимов В.П. Уравнения с запаздывающим аргументом // Дифференц. уравнения. - 1982. - Т. 18, № 12. -С. 2027-2050
6. Максимов В.П. Вопросы общей теории функционально - дифференциальных уравнений. –Дис... д-ра физ.-мат. Наук. –Киев, 1985, -С. 49-51
7. Азбелев Н.В., Исламов Г.Г. Об одном классе функционально - дифференциальных уравнений// Дифференц. уравнения. - 1976. - Т. 12, № 3. -С. 417-427
8. Азбелев Н.В. Оператор внутренней суперпозиции в пространствах суммируемых функций // Изв. вузов. Математика. -1986. № 5. -С.18-24