ӘОЖ 517.51

ҚОСЫНДЫЛАУ ШЕКТЕРІ АЙНЫМАЛЫ БОЛАТЫН САЛМАҚТЫ ХАРДИ ТЕҢСІЗДІГІ

Сарсеналы Динара Серікқызы
dinara.sarsenali@mail.ru
Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУМеханика-математика факультетінің
5В060100-Математика мамандығының 4 курс студенті
Ғылыми жетекшісі – А. Темірханова

Айталық, $0 < p, q \leq \infty$ болсын.Қосындының төменгі шегі айнымалы болатын келесі дискретті Харди типтес теңсіздігін:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\upsilon(n)\left(\sum_{a(n)\le k<\infty}f(k)\right)^{q}\right)^{\frac{1}{q}} \le C\left(\sum_{n=1}^{\infty}f^{p}(n)\omega(n)\right)^{\frac{1}{p}},\ \forall f(n)\ge 0 \qquad (1)$$

қарастырайық, мұндағы $\upsilon(n)$, $\omega(n)$ - оң сандар тізбегі, $a(n)$ - өспелі натурал сандар тізбегі, $C \ge 0$ тұрақтысы (1) теңсіздігін қанағаттандыратын ең кіші тұрақты сан.

Теңсіздіктерді тереңірек зерттеу Г.Г.Харди, Д.Е.Литтлвуд және Г.Полианың [1] классикалық монографиясының жарыққа шығуымен кең тарады. Монографияда Харди теңсіздіктерінің $1 < p < \infty$ үшін екі стандарттық формасы қарастырылады:

Дискретті Харди теңсіздігі:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}f_k\right)^{p} \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^{p}\sum_{k=1}^{\infty}f_k^{\ p} \qquad (2)$$

мұндағы $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ - теріс емес нақты сандар тізбегі: $\sum_{k=1}^{\infty}|f_k|^{p} < \infty$;

Интегралдық Харди теңсіздігі:

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^{x}f(t)dt\right)^{p}dx \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^{p}\int_0^{\infty}f^{p}(x)dx$$

мұндағы $f^{p}(x)$ $\forall x > 0$ үшін $(0, x)$ интервалында интегралданатын $(0,\infty)$ аралығында анықталған теріс емес функция.

Дискретті жағдайға қарағанда интегралдық Харди теңсіздігінің келесі түрдегі

$$\left(\int_a^{b}\left|\int_a^{x}f(t)dt\right|^{q}u(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \le C_{p,q}\left(\int_a^{b}|f(x)|^{p}\upsilon(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

салмақты интегралдық жағдайын зерттеу 1969-1980ж. аралығында қарқынды дамыды, ал дискретті жағдайы

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n\left(\sum_{k=1}^{n}f_k\right)^{q}\right)^{\frac{1}{q}} \le C\left(\sum_{n=1}^{\infty}f_n^{\ p}v_n\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (3)$$

кейінірек 1983-1994ж. аралығында толық зерттелді.Бұл теңсіздіктердің зерттеу нәтижелері [2-4] монографияларында берілген.

2010 жылы [5], [6] жұмыстарында А. Альхалил қосындының жоғарғы шегі айнымалы болатын және екі шектері айнымалы болатын Харди типтес теңсіздіктерінің орындалуының қажетті және жеткілікті шарттарын алды. Бұл теңсіздіктердің интегралдық жағдайы [7-9] жұмыстарында қарастырылған.

Осы жұмыстың негізгі мақсаты төменгі шегі айнымалы болатын дискретті Харди типтес (1) теңсіздіктің орындалуының қажетті және жеткілікті шарттарын алу болып табылады.

Жұмыста келесі белгілеулер қолданылады. $A << B$ және $A >> B$ қатынастары $A \le cB$ немесе $B \ge cA$ екендігін көрсетеді, мұндағы c - p және q парметрлеріне тәуелді тұрақты. $A \approx B$ қатынасы $A << B << A$ немесе $A = cB$ қатынастарына пара-пар.

(1) теңсіздігі $a(n) = n$, $p = q$, $\upsilon(n) = \frac{1}{n}$ және $\omega(n) = 1$ болғанда (2) теңсіздігін, ал $a(n) = n$ болғанда (3) теңсіздігін беретінін байқауға болады.

Негізгі нәтижелерді келтірейік:

Теорема 1. *Айталық* $1 < p \le q < +\infty$ *болсын, онда (1) теңсіздігі орындалуы үшін*

$$A_1 := \sup_n \left(\sum_{k=1}^{n} \upsilon(k) \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=a(n)}^{\infty} \omega(k)^{1-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty$$

болуы қажетті және жеткілікті. Сонымен қатар $C \approx A_1$ *қатынасы орындалады.*

Теорема 2. *Айталық* $0 < p \le q < \infty$, $0 < p \le 1$ *болсын, онда (1) теңсіздігі орындалуы үшін*

$$A_2 := \sup_n \left(\sum_{k=1}^{n} \upsilon(k) \right)^{\frac{1}{q}} \sup_{k \ge a(n)} \omega^{-\frac{1}{p}}(k) < \infty$$

болуы қажетті және жеткілікті. Сонымен қатар $C \approx A_2$ *қатынасы орындалады.*

Теорема 3. *Айталық* $1 < q < p < +\infty$ *болсын, онда (1) теңсіздігі орындалуы үшін*

$$A_3 := \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\sum_{1 \le n \le a^{-1}(k)} \upsilon(n) \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=k}^{\infty} \omega(i)^{1-p'} \right)^{\frac{1}{q'}} \right]^{r} \omega^{1-p'}(k) \right)^{\frac{1}{r}} < \infty$$

болуы қажетті және жеткілікті. Сонымен қатар $C \approx A_3$ *қатынасы орындалады.*

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Hardy G.H., Littlewood J.E., Polya G. Inequalities, 2nd edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1952. – P .160.
2. Kufner A., Maligranda L., Persson L-E. The Hardy inequality-About its history and some related results, VydavatelskyServis, Plzen, 2007.– P.162.
3. Kufner A., Persson L-E. Weighted inequalities of Hardy Type World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2003. – P.357.
4. Opic B., Kufner A., Hardy-type Inequalities. Pitman Researh Notes in Mathematics Series, 219, Longman Scientific and Technical, Harlow, 1990., -P.423.
5. Альхалил А. Дискретные неравенства типа Харди с переменными пределами суммирования I. // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». – 2010. - № 4. – С. 56-69.
6. Альхалил А. Дискретные неравенства типа Харди с переменными пределами суммирования II. // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». – 2011. - № 1. – С. 5-13.
7. Степанов В.Д., Ушакова Е.П. Об интегральных операторах с переменными пределами интегрирования // Труды Матем. ин-та РАН. – 2001. – Вып. 232. – С. 298-317.

8. Степанов В.Д., Ушакова Е.П. Об операторе геометрического среднего с переменными пределами интегрирования // Труды Матем. ин-та РАН. – 2008. – Вып. 260. – С. 264-288.
9. Stepanov V.D., Ushakova E.P. Kernel Operators with Variable Limits Intervals of Integration in Lebesgue Speces and Applications // Math. Inequal. Appl. – 2010. – Vol. 13. – P. 449-510.