УДК 517

РЕШЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Рахымова А.Т.

aigerim_rakhimova@mail.ru

Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан

Введение метода четырехмерного пространства упрощает решение систем нелинейных уравнений высших порядков. В методе четырехмерного пространства решение уравнений выполняется с использованием бикомплексного анализа, а бикомплексный анализ является обобщением комплексного анализа. Все фундаментальные понятия бикомплексного анализа получаются из комплексного анализа путем определения спектра бикомплексных чисел [1].

Рассмотрим систему нелинейных алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными x_1,x_2,x_3,x_4:

$$\begin{cases} a_1\left(x_1^2-x_2^2+x_3^2-x_4^2\right)-2a_2\left(x_1x_2+x_3x_4\right)+2a_3\left(x_1x_3-x_2x_4\right)-2a_4\left(x_1x_4+x_2x_3\right)+ \\ +b_1x_1-b_2x_2+b_3x_3-b_4x_4+c_1=0 \\ a_2\left(x_1^2-x_2^2+x_3^2-x_4^2\right)-2a_1\left(x_1x_2+x_3x_4\right)+2a_4\left(x_1x_3-x_2x_4\right)-2a_3\left(x_1x_4+x_2x_3\right)+ \\ +b_2x_1-b_1x_2+b_4x_3-b_3x_4+c_2=0 \\ a_3\left(x_1^2-x_2^2+x_3^2-x_4^2\right)-2a_4\left(x_1x_2+x_3x_4\right)+2a_1\left(x_1x_3-x_2x_4\right)-2a_2\left(x_1x_4+x_2x_3\right)+ \\ +b_3x_1-b_4x_2+b_1x_3-b_2x_4+c_3=0 \\ a_4\left(x_1^2-x_2^2+x_3^2-x_4^2\right)-2a_3\left(x_1x_2+x_3x_4\right)+2a_2\left(x_1x_3-x_2x_4\right)-2a_1\left(x_1x_4+x_2x_3\right)+ \\ +b_4x_1-b_3x_2+b_2x_3-b_1x_4+c_4=0 \end{cases} \tag{1}$$

где $a_1,a_2,a_3,a_4,b_1,b_2,b_3,b_4,c_1,c_2,c_3,c_4$ – заданные коэффициенты. В данной работе предлагается новый метод решения системы (1). Других методов решения данной системы в общем случае в настоящее время не существует.

Для решения данной системы рассмотрим квадратное уравнение

$$AX^2+BX+C=0 \tag{2}$$

в четырехмерном пространстве, где A,B,C,X – четырехмерные числа, A – невырожденное число. Для решения данного квадратного уравнения найдем корень из следующего четырехмерного числа, равного его дискриминанту.

$$D=B^2-4AC=\begin{pmatrix} b_1^2-b_2^2+b_3^2-b_4^2-4a_1c_1+4a_2c_2-4a_3c_3+4a_4c_4 \\ 2b_1b_2+2b_3b_4-4a_2c_1-4a_1c_2-4a_4c_3-4a_3c_4 \\ 2b_1b_3-2b_2b_4-4a_3c_1+4a_4c_2-4a_1c_3+4a_2c_4 \\ 2b_1b_4+2b_2b_3-4a_4c_1-4a_3c_2-4a_2c_3-4a_1c_4 \end{pmatrix}$$

Определим спектр дискриминанта D

$$\lambda_1 = (b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 - b_4^2 - 4a_1c_1 + 4a_2c_2 - 4a_3c_3 + 4a_4c_4 - 2b_1b_3 + 2b_2b_4 + 4a_3c_1 -$$
$$- 4a_4c_2 + 4a_1c_3 - 4a_2c_4) +$$
$$+ i(2b_1b_2 + 2b_3b_4 - 4a_2c_1 - 4a_1c_2 - 4a_4c_3 - 4a_3c_4 - 2b_1b_4 - 2b_2b_3 + 4a_4c_1 +$$
$$+ 4a_3c_2 + 4a_2c_3 + 4a_1c_4)$$
$$\lambda_2 = (b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 - b_4^2 - 4a_1c_1 + 4a_2c_2 - 4a_3c_3 + 4a_4c_4 - 2b_1b_3 + 2b_2b_4 + 4a_3c_1 -$$
$$- 4a_4c_2 + 4a_1c_3 - 4a_2c_4) -$$
$$- i(2b_1b_2 + 2b_3b_4 - 4a_2c_1 - 4a_1c_2 - 4a_4c_3 - 4a_3c_4 - 2b_1b_4 - 2b_2b_3 + 4a_4c_1 +$$
$$+ 4a_3c_2 + 4a_2c_3 + 4a_1c_4)$$

$$\lambda_3 = (b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 - b_4^2 - 4a_1c_1 + 4a_2c_2 - 4a_3c_3 + 4a_4c_4 + 2b_1b_3 - 2b_2b_4 - 4a_3c_1 +$$
$$+ 4a_4c_2 - 4a_1c_3 + 4a_2c_4) +$$
$$+ i(2b_1b_2 + 2b_3b_4 - 4a_2c_1 - 4a_1c_2 - 4a_4c_3 - 4a_3c_4 + 2b_1b_4 + 2b_2b_3 - 4a_4c_1 -$$
$$- 4a_3c_2 - 4a_2c_3 - 4a_1c_4)$$

$$\lambda_4 = (b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 - b_4^2 - 4a_1c_1 + 4a_2c_2 - 4a_3c_3 + 4a_4c_4 + 2b_1b_3 - 2b_2b_4 - 4a_3c_1 +$$
$$+ 4a_4c_2 - 4a_1c_3 + 4a_2c_4) -$$
$$- i(2b_1b_2 + 2b_3b_4 - 4a_2c_1 - 4a_1c_2 - 4a_4c_3 - 4a_3c_4 + 2b_1b_4 + 2b_2b_3 - 4a_4c_1 -$$
$$- 4a_3c_2 - 4a_2c_3 - 4a_1c_4)$$

Тогда спектр числа $Y = \sqrt{D}$ есть $\left(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \sqrt{\lambda_3}, \sqrt{\lambda_4}\right)$.
Обозначим через

$$\mu_1 = 0.5(b_1 - b_3)(b_2 - b_4) - (a_1 - a_3)(c_2 - c_4) - (a_2 - a_4)(c_1 - c_3),$$
$$\mu_2 = 0.25(b_1 - b_3)^2 - 0.25(b_2 - b_4)^2 - (a_1 - a_3)(c_1 - c_3) + (a_2 - a_4)(c_2 - c_4),$$
$$\mu_3 = 0.5(b_1 + b_3)(b_2 + b_4) - (a_1 + a_3)(c_2 + c_4) - (a_2 + a_4)(c_1 + c_3),$$
$$\mu_4 = 0.25(b_1 + b_3)^2 - 0.25(b_2 + b_4)^2 - (a_1 + a_3)(c_1 + c_3) + (a_2 + a_4)(c_2 + c_4),$$

$$\varphi = \begin{cases} arctg\dfrac{\mu_1}{\mu_2}, \text{ если } \mu_1 < 0, \mu_2 < 0, \text{при этом } \varphi \in \left(-\pi, -\dfrac{\pi}{2}\right), \\ \pi, \text{если } \mu_1 = 0, \mu_2 < 0, \\ arctg\dfrac{\mu_1}{\mu_2}, \text{ если } \mu_1 > 0, \mu_2 < 0, \text{при этом } \varphi \in \left(-\dfrac{3\pi}{2}, -\pi\right), \\ -\dfrac{\pi}{2}, \text{если } \mu_1 < 0, \mu_2 = 0, \quad \dfrac{\pi}{2}, \text{если } \mu_1 > 0, \mu_2 = 0, \\ arctg\dfrac{\mu_1}{\mu_2}, \text{ если } \mu_1 < 0, \mu_2 > 0, \text{при этом } \varphi \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right), \\ 0, \text{если } \mu_1 = 0, \mu_2 > 0, \\ arctg\dfrac{\mu_1}{\mu_2}, \text{ если } \mu_1 > 0, \mu_2 > 0, \text{при этом } \varphi \in \left(-0, -\dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$$\psi = \begin{cases} arctg\dfrac{\mu_3}{\mu_4}, \text{ если } \mu_3 < 0, \mu_4 < 0, \text{при этом } \psi \in \left(-\pi, -\dfrac{\pi}{2}\right), \\ \pi, \text{если } \mu_3 = 0, \mu_4 < 0, \\ arctg\dfrac{\mu_3}{\mu_4}, \text{ если } \mu_3 > 0, \mu_4 < 0, \text{при этом } \psi \in \left(-\dfrac{3\pi}{2}, -\pi\right), \\ -\dfrac{\pi}{2}, \text{если } \mu_3 < 0, \mu_4 = 0, \quad \dfrac{\pi}{2}, \text{если } \mu_3 > 0, \mu_4 = 0, \\ arctg\dfrac{\mu_3}{\mu_4}, \text{ если } \mu_3 < 0, \mu_4 > 0, \text{при этом } \psi \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right), \\ 0, \text{если } \mu_3 = 0, \mu_4 > 0, \\ arctg\dfrac{\mu_3}{\mu_4}, \text{ если } \mu_3 > 0, \mu_4 > 0, \text{при этом } \psi \in \left(-0, -\dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

Тогда [1]

$$Y_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} Y_{11} \\ Y_{12} \\ Y_{13} \\ Y_{14} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{\gamma^2+\delta^2}\cos\left(\frac{\psi}{2}\right) + \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ \sqrt{\gamma^2+\delta^2}\sin\left(\frac{\psi}{2}\right) + \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ \sqrt{\gamma^2+\delta^2}\cos\left(\frac{\psi}{2}\right) - \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ \sqrt{\gamma^2+\delta^2}\sin\left(\frac{\psi}{2}\right) - \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \end{pmatrix},$$

$$Y_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} Y_{21} \\ Y_{22} \\ Y_{23} \\ Y_{24} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{\gamma^2+\delta^2}\cos\left(\frac{\psi}{2}\right) - \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ \sqrt{\gamma^2+\delta^2}\sin\left(\frac{\psi}{2}\right) - \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ \sqrt{\gamma^2+\delta^2}\cos\left(\frac{\psi}{2}\right) + \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ \sqrt{\gamma^2+\delta^2}\sin\left(\frac{\psi}{2}\right) + \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \end{pmatrix},$$

$$Y_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}Y_{31}\\Y_{32}\\Y_{33}\\Y_{34}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-\sqrt{\gamma^2+\delta^2}\cos\left(\frac{\psi}{2}\right)+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\\-\sqrt{\gamma^2+\delta^2}\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\\-\sqrt{\gamma^2+\delta^2}\cos\left(\frac{\psi}{2}\right)-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\\-\sqrt{\gamma^2+\delta^2}\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\end{pmatrix},$$

$$Y_4=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}Y_{41}\\Y_{42}\\Y_{43}\\Y_{44}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-\sqrt{\gamma^2+\delta^2}\cos\left(\frac{\psi}{2}\right)-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\\-\sqrt{\gamma^2+\delta^2}\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\\-\sqrt{\gamma^2+\delta^2}\cos\left(\frac{\psi}{2}\right)+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\\-\sqrt{\gamma^2+\delta^2}\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\end{pmatrix},$$

где

$$\alpha=(b_1-b_3)^2-(b_2-b_4)^2-4(a_1-a_3)(c_1-c_3)+4(a_2-a_4)(c_2-c_4),$$

$$\beta=2(b_1-b_3)(b_2-b_4)-4(a_1-a_3)(c_2-c_4)-4(a_2-a_4)(c_1-c_3),$$

$$\gamma=(b_1+b_3)^2-(b_2+b_4)^2-4(a_1+a_3)(c_1+c_3)+4(a_2+a_4)(c_2+c_4),$$

$$\delta=2(b_1+b_3)(b_2+b_4)-4(a_1+a_3)(c_2+c_4)-4(a_2+a_4)(c_1+c_3).$$

Общее решение уравнения (2) имеет вид:

$$X_i=\frac{-B+Y_i}{2A},\quad i=1,2,3,4. \tag{3}$$

Тогда общее решение системы (1) запишется в виде

$$X_i=\frac{1}{4\Delta}\begin{pmatrix}\Delta_1(Y_{i1}-2b_1)-\Delta_2(Y_{i2}-2b_2)+\Delta_3(Y_{i3}-2b_3)-\Delta_4(Y_{i4}-2b_4)\\\Delta_2(Y_{i1}-2b_1)+\Delta_1(Y_{i2}-2b_2)+\Delta_4(Y_{i3}-2b_3)+\Delta_3(Y_{i4}-2b_4)\\\Delta_3(Y_{i1}-2b_1)-\Delta_4(Y_{i2}-2b_2)+\Delta_1(Y_{i3}-2b_3)-\Delta_2(Y_{i4}-2b_4)\\\Delta_4(Y_{i1}-2b_1)+\Delta_3(Y_{i2}-2b_2)+\Delta_2(Y_{i3}-2b_3)+\Delta_1(Y_{i4}-2b_4)\end{pmatrix},$$

где $i=1,2,3,4$.

$$\Delta=\left((a_1-a_3)^2+(a_2-a_4)^2\right)\left((a_1+a_3)^2+(a_2+a_4)^2\right),$$

$$\Delta_1=a_1\left(a_1^2+a_2^2-a_3^2+a_4^2\right)-2a_2a_3a_4,$$

$$\Delta_2=-a_2\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2-a_4^2\right)+2a_1a_3a_4,$$

$$\Delta_3=a_3\left(-a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2\right)-2a_1a_2a_4,$$

$$\Delta_4=-a_4\left(a_1^2-a_2^2+a_3^2+a_4^2\right)+2a_1a_2a_3.$$

В качестве примера рассмотрим следующую конкретную систему.

$$\begin{cases}x_1^2-x_2^2+x_3^2-x_4^2+2x_2-2=0\\-2(x_1x_2+x_3x_4)-2x_1=0\\2(x_1x_3-x_2x_4)+2x_4=0\\-2(x_1x_4+x_2x_3)-2x_3=0\end{cases} \tag{*}$$

Для решения данной системы рассмотрим следующее квадратное уравнение

$$X^2 - 2iX - 2 = 0$$

в четырехмерном пространстве, где – $A = (1,0,0,0)$, $B = (0,-2,0,0)$, $C = (-2,0,0,0)$ четырехмерные числа, A – невырожденное число. Для решения данного квадратного уравнения выполним вышеуказанные несложные операции:

$\mu_1 = 0,\ \mu_2 = 1,\ \mu_3 = 0,\ \mu_4 = 1$, $\varphi = \psi = 0 \Rightarrow \cos\frac{\varphi}{2} = 1,\ \sin\frac{\varphi}{2} = 0,\ \cos\frac{\psi}{2} = 1,\ \sin\frac{\psi}{2} = 0$,

$\alpha = 4, \beta = 0, \gamma = 4, \delta = 0, \Delta = 1, \Delta_1 = 1, \Delta_2 = 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 = 0.$

Найдем значения Y_i

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ Y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix},\ Y_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix},\ Y_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

После несложных вычислений находим решения X_i:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, X_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Подставляя найденные решения в систему (*) удостоверяемся в выполнении равенства, что подтверждает правильность решения.

Список использованных источников

1. Маукеев Б.И., Абенов М.М. Начальные главы теории функций бикомплексного переменного. – Алматы.: ТОО «МТИА», 2003, -58 с.