ӘОЖ 517.954

КВАНТТЫҚ ЕСЕПТЕУДЕГІ ЖЫЛУӨТКІЗГІШ ТЕҢДЕУДІҢ ФУРЬЕ ТҮРЛЕНДІРУІН ҚОЛДАНУ АРҚЫЛЫ ШЕШУ.

Шәріп Бексұлтан Нұрлыбекұлы
beka971018@bk.ru
Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ Іргелі математикаа кафедрасының студенті,

Нур-Султан, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі – С. Шаймардан

Айталық $0 < q < 1$ және $h > 0$болсын. Онда келесі сандақ жиындарды анықтайық $R_q = \{\pm q^n : n \in Z\}$ және $T := \{a + kh : a \in R, \forall k \in Z\}$.

Анықтама 1. [1]Берілген $f(x)$ функциясының кванттық есептеудегі туындысы R_q және T сандық жиындарында сәйкесінше келесі түрде анақталады

$$D_h f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

және

$$D_q f(x) = \frac{f(qx) - f(x)}{x(q-1)}.$$

Ескерту: $\lim_{h\to 0} D_h f(x) = f'(x)$ және $\lim_{q\to 1} D_q f(x) = f'(x)$.

Кзкелген $n \in N$ үшін төмендегідей белгілеуді еңгіземіз

$$[n]_q ! = \frac{(q;q)_n}{(1-q)^n},$$

мұндағы $[n]_q = \dfrac{1-q^n}{1-q}$.

Ал q-тригонометриялық функциялары келесі түрде анықталады [2-3]:

$$\cos(z;q^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{n(n+1)} \frac{z^{2n}}{[2n]_q !},$$

$$\sin(z;q^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{n(n+1)} \frac{z^{2n+1}}{[2n+1]_q !}.$$

Сондай-ақ, Экспоненталық функцияның q-аналогы келесі түрінде [2-3].

$$e(z;q^2) = \cos(-iz;q^2) + i\sin(-iz;q^2)$$

анықталады.

Кванттық есептеудегі Робен дифференциалдық операторы келесі түрде анықталады [2-3]:

$$\partial_q f(z) = \begin{cases} \dfrac{f(q^{-1}z) + f(-q^{-1}z) - f(qz) + f(-qz) - 2f(-z)}{2(1-q)z}, & \text{егер } z \neq 0 \\ \lim_{z\to 0} \partial_q f(z), & \text{егер } z = 0. \end{cases}$$

Анықтама 2. [4] q-Джаксон интегралдары келесідей анықталады:

$$\int_0^a f(x) d_h x = (1-q) a \sum_{n=0}^{+\infty} q^n f(aq^n)$$

және

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) d_h x = (1-q) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^n \{ f(q^n) + f(-q^n) \}.$$

Анықтама 3. [5-6] q^2-Фурье түрлендіруі $\hat{u}$ келесі түрде анықталады:

$$\hat{u}(x;) := K_q \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e(-itx;q^2) d_q t,$$

ал оның кері түрлендіруі

$$u(t)=K\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\varphi}(x)e(itx;q^2)d_q x \ ,$$

мұндағы $K_q=\dfrac{(1+q)^{\frac{1}{2}}}{2\Gamma_{q^2}\left(\frac{1}{2}\right)}$ және $\Gamma_q(x)=\dfrac{(q;q)_\infty}{(q^x;q)_\infty}(1-q)^{1-x}$.

Анықтама 4. R_q^+ жиынында анықталған f функциясының $S_q(R_q^+)$ жиынтығын белгілейік, келесі шартты қанағаттандыратындай

$$P_{n,m,q}(f)=\sup_{x\in R_q^+}|\,x^m D_q^n f(x)|<\infty \ \text{барлық} \ m,n\in\mathrm{N}$$

және $\exists\lim\limits_{x\to 0}D_q^n f(x)\in R_q^+$.

R_q^+ жиынындағы $S_q'(R_q^+)$ шоғырлану кеңістігі. Бұл $S_q(R_q^+)$ топологиялық екі жақтылық.

Анықтама 5. [7]Айталық $s\in R$ үшін Соболев кеңістігін $W_q^s(R_q^+)$ келесідей анықтайық:

$$W_q^k(R_q^+)=\left\{u\in S_q'(R_q^+):(1+|\,n\,|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}\in L_q^2(R_q^+)\right\}$$

Соболев кеңістігінің $W_q^s(R_q^+)$ нормасы

$$\|\,u\,\|_{W_q^k(R_q^+)}^2=\left(\int_0^\infty(1+|\,n\,|^2)^s\,|\,\hat{u}\,|^2 d_q n\right)^2,$$

мұндағы $L_q^2(R_q^+)=\left\{f:\left(\int_0^\infty|\,f(x)|^2\ d_q x\right)^{\frac{1}{2}}<\infty\right\}$.

Айталақ $0<T<\infty$ болсын. Онда $C^k([0,T],W_q^k(R_q^+))$ және $C^k([0,T],L_q^2(R_q^+))$ арқылы нормасы келесі түрде анықталатын функциялар жиының белгілейміз:

$$\|\,u\,\|_{C^k([0,T],W_q^k(R_q^+))}:=\sum_{n=0}^{k}\max_{0\le t\le T}\|\,\partial_t^n u(t,.)\|_{W_q^s(R_q^+)}<\infty$$

және

$$\|\,u\,\|_{C^k([0,T],L_q^2(R_q^+))}:=\sum_{n=0}^{k}\max_{0\le t\le T}\|\,\partial_t^n u(t,.)\|_{L_q^2(R_q^+)}<\infty.$$

Негізгі нәтиже

Келесі жылуөткізгіш теңдеуді қарастырайық:

$$\begin{cases}D_{h,t}u(t,x)-c^2 d_{q,x}^2 u(t+h,x)=0, & (x,t)\in R^+\times R_q^+\\ u(0,x)=\varphi(x) & x\in\mathrm{R}_\mathrm{q}^+\end{cases}\qquad(1)$$

мұндағы

$$D_{h,t}u(t,x)=\frac{u(t+h,x)-u(t,x)}{h},$$

$$\partial_{q,x}^2 u(t+h,x) = \partial_{q,x}\left(\partial_{q,x} u(t+h,x)\right)$$

және

$$\partial_{q,x} u(t+h,x) = \frac{u(t,q^{-1}x)+u(t,-q^{-1}x)-u(t,qx)+u(t,-qx)-2u(t,-x)}{2(1-q)x}.$$

Теорема 1. Айталақ $0<T<\infty$ анықталсын. Егер $\varphi \in W_q^1\left(R_q^+\right)$ болса. Онда (1) есебінің жалғыз шешімі болады және $u \in C^1\left([0,T], W_q^1\left(R_q^+\right)\right)$. Сонда-ақ, шешім келесі формуламен анақталады

$$u(t,x) = K\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\zeta) e_{c^2,\zeta^2}(t)\, e\left(it\zeta; q^2\right) d_q\zeta .$$

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. P. Cheung and V. Kac, *Quantum calculus*, Edwards Brothers, Inc., Ann Arbor, MI, USA, 2000.

2. Richard L. Rubin, A q^2-Analogue Operator for q^2-analogue Fourier Analysis, J. Math. Analys. App. 212, (1997), 571-582.

3.Richard L. Rubin, Duhamel Solutions of non-Homogenous q^2-Analogue Wave Equations, Proc.of Amer. Math. Soc., V 135, Nr 3, (2007), 777-785.

4. F. H. Jackson, On a q-Definite Integrals, Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics 41, 1910, 193-203.

5. A. Fitouhi and R. H. Bettaieb, Wavelet transforms in the q^2-analogue Fourier analysis, Math. Sci. Res. J., 12(2008), 202-214.

6. R.L. Rubin, Duhamel solutions of non-homogeneous q^2-analogue wave equations, Proc. Amer. Math. Soc., 135(2007), 777-785.

7. A. Fitouhi and A. Saoudi, On q^2-analogue Sobolev type spaces, Le Matematiche, 70(2015), 63-77. S. Shaimardan, A. O. Baiarystanov, L. E. Persson and A. Temirkhanova, Some new Hardytype inequalities in q -analysis, to appear in J. Math. Ineq.