УДК 517.51

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ПОТЕНЦИАЛА РИССА В ГЛОБАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА МОРРИ

Әбек Ажар Нартайқызы, Адилханов Айдос Нуржанович
azhar_18@inbox.ru, azhar.abekova@gmail.com
Магистрант, докторант механико-математического факультета ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, г.Нур-Султан, Казахстан
Научный руководитель – Н.А. Бокаев

В работе приводятся условия ограниченности потенциала Рисса в глобальных пространствах типа Морри.

Приведем необходимые определения.

Пространство Морри $M_{p,\lambda}$ определяется следующим образом: для $0 \le \lambda \le n$, $1 \le p \le \infty$, $f \in M_{p,\lambda}$ и $f \in L_p^{loc}(R^n)$

$$\|f\|_{M_{p,\lambda}} = \|f\|_{M_{p,\lambda}(R^n)} = \sup_{x \in R^n, r>0} r^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{L_p(B(x,r))} < \infty .$$

Для $x \in R^n$ и $r > 0$, пусть $B(x,r)$обозначает открытый шар с центром в точке x радиуса r и $|B(x,r)|$ – объем шара.

Пусть $f \in L_1^{loc}(R^n)$.Потенциал Рисса I_α определяется следующим образом [1]:

$$I_\alpha f(x) = \int_{R^n} \frac{f(y)dy}{|x-y|^{n-\alpha}}, \quad 0 < \alpha < n.$$

Пусть H будет оператором Харди

$$(Hg)(r) = \int_0^r g(t)dt, \; 0 < r < \infty.$$

Пусть $1 < p$, $\theta \le \infty$ и пусть w неотрицательная измеримая функция на $(0,\infty)$. Через $LM_{p\theta,w}$, $GM_{p\theta,w}$ обозначим локальные пространства типа Морри, глобальные пространства типа Морри соответственно, т.е. пространства всех функций $f \in L_p(B(0,r))$ для всех $r > 0$ с конечными квазинормами

$$\|f\|_{LM_{p\theta,w}} \equiv \|f\|_{LM_{p\theta,w}(R^n)} = \left\| w(r) \|f\|_{L_p(B(0,r))} \right\|_{L_\theta(0,\infty)},$$

$$\|f\|_{GM_{p\theta,w}} = \sup_{x \in R^n} \|f(x+\cdot)\|_{LM_{p\theta,w}},$$

соответственно.

Отметим, что

$$\|f\|_{LM_{p\infty,1}} = \|f\|_{GM_{p\infty,1}} = \|f\|_{L_p}.$$

Пусть $1 \le p$, $\theta < \infty$. Через Ω_θ обозначим множество неотрицательных измеримых на $(0,\infty)$ функций w, неэквивалентных нулю, таких, что для некоторого $t > 0$ выполняется условие

$$\|w(r)\|_{L_\theta(t,\infty)} < \infty .$$

Отметим, что если указанная величина равна бесконечности, то пространство $LM_{p\theta,w}$ состоит только из функции, эквивалентных нулю.

Для измеримого множества $\Omega \subset R^n$ и для неотрицательной и измеримой на Ω функций v, через $L_{p,v}(\Omega)$обозначим весовое пространство L_p всех функций f измеримых на Ω, для которой

$$\|f\|_{L_{p,v}(\Omega)} = \|vf\|_{L_p(\Omega)} < \infty .$$

Если $0 < p \le \theta < \infty$, то

$$\|f\|_{LM_{p\theta,w}} \le \|f\|_{L_{p,W}} ,$$

и если $0 < \theta \le p < \infty$, то

$$\|f\|_{L_{p,W}} \le \|f\|_{LM_{p\theta,w}} ,$$

где для всех $x \in R^n$

$$W(x) = \|w\|_{L_\theta(|x|,\infty)} .$$

Теорема 1. Пусть $1 < p_1 < p_2 < \infty$ и $\alpha = n\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right)$. Тогда имеет место неравенство:

$$\left\|I_\alpha\left(f\chi_{B(x,2r)}\right)\right\|_{L_{p_2}(B(x,r))} \le c_1 r^{\alpha - n\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}\right)} \|f\|_{L_{p_1}(B(x,2r))} .$$

Следствие 1. Пусть $1 < p_1 < p_2 < \infty$ и $\alpha = n\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right)$. Тогда неравенство

$$\left\|I_\alpha\left(f\chi_{B(x,2r)}\right)\right\|_{L_{p_2}(B(x,r))} \le c_1 r^{\alpha - n\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}\right)} \|f\|_{L_{p_1}(B(x,2r))}$$

выполняется для любого шара $B(x,r) \subset R^n$ и для всех $f \in L_{p_1}^{loc}(R^n)$.Кроме того, если $1 < p_2 < \infty$ и $\alpha = n\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)$, то следующее неравенство выполняется для любого шара $B(x,r) \subset R^n$ и для всех $f \in L_1^{loc}(R^n)$:

$$\left\|I_\alpha\left(f\chi_{B(x,2r)}\right)\right\|_{WL_{p_2}(B(x,r))} \le \|f\|_{L_1(B(x,2r))} .$$

Теорема 2. Пусть $1 < p_1 < p_2 < \infty$ и $\alpha = n\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right)$. Тогда для любого шара $B(x,r) \subset R^n$ и всех $f \in L_{p_1}^{loc}(R^n)$ имеет место неравенство

$$\|I_\alpha f\|_{L_{p_2}(B(x,r))} \le c_2 r^{\frac{n}{p_2}} \int_r^\infty \|f\|_{L_{p_1}(B(x,t))} \frac{dt}{t^{\frac{n}{p_1}-\alpha+1}} .$$

Теорема 3. Пусть $1 < p_1 < p_2 < \infty$ и $\alpha = n\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right)$, $0 < \theta_1 < \theta_2 \le \infty$, $w_1 \in \Omega_{\theta_1}$, $w_2 \in \Omega_{\theta_2}$.

Тогда оператор I_α- ограничен из $GM_{p_1\theta_1,w_1}$ в $GM_{p_2\theta_2,w_2}$ (вэтом случае мы предполагаем что $w_1 \in \Omega_{p_1,\theta_1}$, $w_2 \in \Omega_{p_2,\theta_2}$.):

$$\|I_\alpha f\|_{GM_{p_2\theta_2,w_2}} \le c_3 \sup_{t>0}\left(\int_t^\infty w_2^{\theta_2}(r) r^{\theta_2\left(\alpha-n\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}\right)\right)} dr\right)^{\frac{1}{\theta_2}} \left(\int_t^\infty w_1^{\theta_1}(r)dr\right)^{-\frac{1}{\theta_1}} < \infty$$

ипредположим, что оператор H ограничен из $L_{\frac{\theta_1}{p_1},v_{1,\delta}}(0,\infty)$ в $L_{\frac{\theta_2}{p_1},v_{2,\delta}}(0,\infty)$ на конусе всех неотрицательных невозрастающих на $(0,\infty)$ функций φ, где

$$v_{1,\delta}(r) = \left[w_1\left(r^{-\frac{1}{\sigma}}\right) r^{-\frac{1}{\sigma\theta_1}-\frac{1}{\theta_1}}\right]^{p_1},$$

$$v_{2,\delta}(r) = \left[w_2\left(r^{-\frac{1}{\sigma}}\right) r^{-\frac{1}{\sigma}\left(\frac{n}{p_2}-\delta+\frac{1}{\theta_2}\right)-\frac{1}{\theta_2}}\right]^{p_1},$$

тогда,

$$\|I_\alpha f\|_{GM_{p_2\theta_2,w_2}} \le c_3 \sup_{x\in R^n}\|H(g_\delta(x,\cdot))\|^{\frac{1}{p_1}}_{L_{\frac{\theta_2}{p_1},v_{2,\delta}}(0,\infty)} = c_3 \sup_{x\in R^n}\left(\int_0^\infty v_{1,\delta}(t)^{\frac{\theta_1}{p_1}} \|f\|^{\theta_1}_{L_{p_1}\left(B\left(x,t^{\frac{1}{(\alpha+\delta)p_1-n}}\right)\right)} dt\right)^{\frac{1}{\theta_1}} =$$

$$= c_3\left(\frac{n-\alpha p_1}{\delta}\right)^{\frac{1}{\theta_1}} \sup_{x\in R^n}\left(\int_0^\infty v_{1,\delta}\left(r^{(\alpha+\delta)p_1-n}\right)^{\frac{\theta_1}{p_1}} r^{(\alpha+\delta)p_1-n-1}\|f\|^{\theta_1}_{L_{p_1}(B(x,r))} dr\right)^{\frac{1}{\theta_1}} =$$

$$= c_4 \sup_{x\in R^n}\left(\int_0^\infty \left(w_1(r)\|f\|_{L_{p_1}(B(x,r))}\right)^{\theta_1} dr\right)^{\frac{1}{\theta_1}} = c_4\|f\|_{GM_{p_1\theta_1,w_1}}$$

Для локальных пространств аналогичные теоремы доказаны в [2].

Список использованных источников

1. Burenkov V.I.,Guliyev V.S. Necessary and Sufficient Conditions for the Boundedness of the Riesz Potential in Local Morrey-type Spaces // Potential Anal. 2009.-№30. -P.211–249
2. Burenkov V.I.,Gogatishvili A., Guliyev V.S., Mustafayev R.Ch. Boundedness of the Riesz Potential in Local Morrey-type Spaces // Potential Anal. 2011.-№35. -P.67-87