УДК 512.57

ЯДРО Т-МНОГООБРАЗИЙ И Т-КВАЗИМНОГООБРАЗИЙ ПОЛНЫХ ТЕОРИЙ.

Касатова А., докторант**, Бекпатша А.** студент
ЕНУ им. Л.Н.Гумилев г. Нур-Султан, Казахстан
ivanov@msu.kz, petrov@msu.kz
Научный руководитель – Бекенов М.И.

Исследование свойств различных алгебраических систем направлено на обнаружение структурных свойств систем, а также в какие операции и отношения вступают модели или классы алгебраических систем различных теорий.Например, класс моделей квазимногообразия есть класс всех моделей некоторой теории, а множество всех квазимногообразий, содержащихся в данном квазимногообразии, образует решетку относительно отношения включения. Аналогично определяются решетки многообразий. Известна классическая проблема Г. Биркгоффа-Мальцева (1945г. ; 1965г.) - "Какие решетки изоморфны решеткам квазимногообразий, и многообразий?"[1]. Исключительная сложность этой задачи, как показывают полученные результаты исследователей разных стран, не останавливает их интерес к этой проблеме.

Квазимногообра́зие в универсальной алгебре — класс алгебраических систем фиксированной сигнатуры, аксиоматизируемый набором квазитождеств.

В отличие от многообразий — классов алгебраических систем, аксиоматизируемых тождествами — особую роль в теории квазимногообразий играют теоретико-модельные методы, тогда как многообразия в основном рассматриваются для алгебр (алгебраических систем без отношений в сигнатуре) и изучаются общеалгебраическими методами.

Чтобы класс систем являлся квазимногообразием необходимо и достаточно, чтобы он был одновременно локально замкнут, мультипликативно замкнут (содержал любое декартово произведение своих систем) и содержал единичную систему. Локальная и мультипликативная замкнутость для этого признака могут быть эквивалентно заменены на замкнутость относительно фильтрованных произведений и наследственность.

Первым результатом применения квазитождеств в общей алгебре считается результат Анатолия Мальцева 1939 года[3], в котором построена бесконечная серия квазитождеств, характеризующая класс вложимых в группы полугрупп. В работе 1943 года Чена Маккинси[en][2] связал с квазитождествами некоторые алгоритмические проблемы алгебры, а одним из результатов решения Робертом Дилуорсом[en] в 1945 году[9] задачи о существовании недистрибутивных решёток с единственным дополнением, стало доказательство факта, что квазимногообразия имеют свободные системы.

Теорема Новикова (1955) о неразрешимости проблемы равенства слов в группах фактически означает неразрешимость хорновой теории групп, то есть также может быть отнесена к результатам, относящимся к квазимногообразниям [3].

Становление теории квазимногообразий как самостоятельной ветви универсальной алгебры относится к работам Мальцева, Табаты и Фудзивары конца 1950-х — начала 1960-х годов. Доклад Мальцева на Международном конгрессе математиков 1966 года в Москве, в котором были сформулированы некоторые важные проблемы, относящиеся к квазимногообразиям, способствовал росту интереса математиков к этой ветви[3].

Особый всплеск интереса к теории квазимногообразий проявился в 1970-е годы, когда началось широкое применение хорновой логики в логическом программировании (прежде всего, в работах, связанных с языком программирования Пролог) и в теории баз данных.

Если частично упорядоченное множество имеет наибольший элемент и каждое его непустое подмножество обладает точной нижней гранью, то оно является полной решёткой.

Квазимногообразия Ω-систем, содержащиеся в некотором фиксированном квазимногообразии сигнатуры Ω, составляют полную решетку относительно теоретико-множественного включения. Атомы решетки всех квазимногообразий сигнатуры Ω наз. минимальными квазимногообразиями сигнатуры Ω. Минимальное квазимногообразие порождается любой своей неединичной системой. Каждое квазимногообразие , обладающее неединичной системой, содержит хотя бы одно минимальное квазимногообразие.

Квазимногообразие — класс алгебраических систем, задаваемый набором квазитождеств.Всякое многообразие алгебраических систем является квазимногообразием.

Пусть L - счетный язык первого порядка.

Класс всех моделей любой теории - класс всех моделей ее полных расширений. Каждой теории единственным образом соответствует множество всех ее полных расширений.

Квазимногообразие K - класс всех моделей некоторой теории T. Множество всех полных расширений теории T квазимногообразия K назовем т-квазимногообразием квазимногообразия K. В дальнейшем Ŧ обозначает т-квазимногообразия языка L. Будем также говорить о т-подквазимногооборазиях некоторого т-квазимногообразия, а также о т-многообразиях и т-подмногообразиях. Например, множество всех полных теорий языка L и единичная теория - т-квазимногообразии и т- многообразии одновременно. Обозначим их $Ŧ_L$ и E_L соответственно.

Произведение моделей A и B языка L понимаем в обычном смысле. Обозначаем A•B.

Определение 1. Пусть T_1 и T_2 некоторые полные теории языка L. Произведением теорий $T_1 \bullet T_2$ назовем полную теорию произведений моделей A•B, где A и B модели теорий T_1 и T_2 соответственно [3].

На основании теоремы Воот[2]. "Фильтрованные произведения и прямые произведения моделей сохраняют элементарную эквивалентность" - это определение корректно.

Это произведение полных теорий коммутативно и ассоциативно.

Определение 2. Аналогично, определяем ультропроизведения, фильтрованные произведения по произвольным фильтрам.

Определение 3. Полная теория T_1 - подтеория полной теории T_2, если некоторая модель A теории T_1подсистема некоторой модели B теории T_2.

Теорема1.[1] Каждое множество полных теорий замкнутое относительно ультропроизведений, прямых произведений и подтеорийявляется т-квазимногообразием, а класс всех моделей этой теории является квазимногообразием.

Если ввести похожее, как в определении 3, отношение гомоморфизма на множестве полных теорий, то при добавлении к уже перечисленным замкнутостям в теореме 1, можно говорить о т- многообразиях.

То есть, фактически можно сделать естественный переход от рассмотрения классов моделей квазимногообразий к рассмотрению соответствующих подмножеств множества полных теорий, а именно т-квазимногообразий и т-многообразий.

Следствие 1. Произведение всех теорий любого т-квазимногообразия есть теория из этого же т-квазимногообразия, то есть $T_1 \bullet T_2 \bullet \ldots = T_i$.

Теорема (Вайнштейн [2]). Пусть A,B,C — три модели языка L. Если A ≡ A•B•C, то

A ≡ A•B (≡ - элементарная эквивалентностьмоделей).

Теорема 2. Пусть T_1 , T_2 и T_3 - полные теории.Если $T_1 = T_1 \bullet T_2 \bullet T_3$, то $T_1 = T_1 \bullet T_2$.

Теорема 3. В каждом т-квазимногообразии Ŧ существует теория T′ такая, что для любой теории T ϵ Ŧ, T • T′ = T′. Теория T′ в Ŧ единственная и T′ идемпотентная.

Определение 4.В т-квазимногообразии Ŧ возьмем множество всех таких теорий в каждом

т-подквазимногообразии т-квазимногообразия Ŧ. Назовем его ядром т-квазимногообразия Ŧ. Обозначение $Я_{Ŧ}$.

На множестве $Я_{Ŧ}$ введем отношение порядка. Пусть $T_1 \in Ŧ$ и $T_2 \in Ŧ$. $T_1 \leq T_2$,по определению если $T_1 \bullet T_2 = T_2$.

Теорема 4. Множество $Я_{Ŧ}$ с этим отношением является частично упорядоченным множеством и образует полную решетку, которая изоморфна решетке подквазимногообразий квазимногообразия алгебраических систем, соответствующего т-квазимногообразия Ŧ.

Библиографический список

1.Мальцев А.И. Алгебраические системы. Наука. Москва 1970. 392 с.

2.Кейслер Г., Чен Ч. Ч. Теория моделей. — М.: Мир,1977. с.

3.Бекенов М.И.Решетка формульно-определимых подквазимногообразий полных теорий квазимногообразия полных теорий. Международная конференция Мальцевские чтения Новосибирск • 2018 //. С. 180–181.