ӘОЖ 517.956.4

БЕЛГІЛІ ШЕКАРАДА УАҚЫТ БОЙЫНША ТУЫНДЫСЫ БАР БІРФАЗАЛЫ СТЕФАН ЕСЕБІ

Қойбағарова Меруерт Ойратқызы
Л. Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің 4 курс студенті
Ғылыми жетекші – З. Н. Сыздыкова

Жұмыста белгілі шекарада жинақталған көлем үшін бірөлшемді бірфазалық Стефан есебі қарастырылған. Кез келген уақыт аралығында классикалық шешімнің бар болуы мен шешімнің жалғыз болуы туралы теоремалар дәлелденген және $t \to \infty$-дағы шешімнің асимптотикалық жағдайы зерттелген.

Есептің қойылуын былай өрнектейік. Фазалық $x = R(t)$ ауысу сызығында

$$\theta = 0, \quad \theta_x = -\dot{R}$$

шартымен берілген, бастапқы

$$\theta = \theta_0(x), \quad R(0) = R_0 > 0, \quad t = 0, \quad 0 < x < R_0,$$

және шеттік

$$\alpha\theta_t = \theta_x + f(t), \quad f(t) \geq 0, \quad \alpha = const > 0, \quad t \in (0,T), \quad x = 0$$

шарттарды қанағаттандыратын,

$$\theta_t = \theta_{xx}$$

теңдеуінің шешімі болатын $\theta(x,t)$ функциясы мен Ω_T^+ облысын анықтайтын $x = R(t)$ функциясын табу керек.

Берілген орта $\Omega_T^+ = \{ (x,t): \quad 0 < x < R(t), \quad 0 < t < T\}$ облыста сұйық күйде және оның меншікті ішкі энергиясы U теріс емес деп қарастырайық. Қатты фазада $\Omega_T^- = \{ (x,t): \quad x > R(t), \quad 0 < t < T\}$ облыста $\theta(x,t)$ температура балқу температурасына, ал меншікті U ішкі энергия -1-ге тең деп ұйғарамыз.

I. Шешімнің аз уақыт аралығында бар болуы

1-теорема. $f(t) \in H^{\frac{1+\alpha}{2}}[0,T]$, $\theta_0(x) \in H^{3+\alpha}[0,R]$ берілсін және $f(t) \geq 0,\ \theta_0(x) \geq 0$ болып,

$$\theta_0(R_0) = 0, \quad \theta_0''(R_0) = |\theta_0'(R_0)|^2, \quad \alpha\theta_0''(0) = \theta_0'(0) + f(0)$$

үйлесімдік шарттары орындалсын делік. Онда $T_* < T$ болғанда

$$\theta(x,t) \in H^{3+\alpha, \left(\frac{3+\alpha}{2}\right)}\left(\overline{\Omega^+_{T_*}}\right), \qquad R(t) \in H^{\left(\frac{4+\alpha}{2}\right)}[0, T_*]$$

жалғыз шешімі болады.

Мұндағы $T_* = \min\{T_1, T_2\}$. $T_1 = \dfrac{1}{2(\dot{R}_0 + M_0)}$, ал $T_2 > 0$ осы теңсіздікті $\left|\dot{R} - \dot{R}_0\right|_{[0,T]}^{\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)} \le \dfrac{1}{2}$ кез келген $T \in (0, T_2)$ үшін қанағаттандырады.

Дәлелдеу схемасын келтірейік. Аз уақыт аралығында шешімнің бар және бірден-бір болуын дәлелдеу үшін қозғалмайтын нүкте туралы Шаудер теоремасын пайдаланамыз. Бұл үшін

$$\mathfrak{M} = \left\{ \tilde{R}(t) \in H^{\frac{3+\alpha}{2}}[0,T]:\ \tilde{R}(0) = R_0,\quad \dot{\tilde{R}}(0) = \dot{R}_0,\quad \dot{\tilde{R}} \ge 0,\quad \left|\dot{\tilde{R}}\right| \le M_0,\ \left|\tilde{R} - Z\right|_{[0,T]}^{\left(\frac{3+\alpha}{2}\right)} \le 1 \right\}$$

жиынын енгіземіз, мұндағы $Z = R_0 + \tilde{R}_0 t,\quad \tilde{R}_0 = -\theta_0'(R_0),$ және мына көмекше есепті қарастырамыз:

$$\tilde{\theta}_t = \tilde{\theta}_{xx}, \qquad 0 < x < \tilde{R}(t), \qquad 0 < t < T$$

$$\alpha\tilde{\theta}_t = \tilde{\theta}_x + f(t), \qquad x = 0, \qquad 0 < t < T$$

$$\tilde{\theta} = 0, \qquad x = \tilde{R}(t), \quad 0 < t < T$$

$$\tilde{\theta}(x,0) = \theta_0(x), \qquad t = 0, \quad 0 < x < \tilde{R}(t)$$

Одан әрі $U(x,t) = \tilde{\theta}_x(x,t)$ ауыстыру арқылы есепті белгілі $x = 0$ шекарада уақыт бойынша туындысы болмайтын бастапқы-шеттік есепке келтіреміз:

$$U_t = U_{xx}, \quad 0 < x < \tilde{R}(t), \qquad 0 < t < T$$

$$\alpha U_x = U + f(t) \qquad x = 0, \qquad 0 < t < T$$

$$U_x + U\dot{\tilde{R}} = 0, \ x = \tilde{R}(t), \qquad 0 < t < T$$

$$U(x,0) = \theta_0'(x), \qquad t = 0, \qquad 0 < x < \tilde{R}(t)$$

Өкінішке орай, бастапқы-шеттік есептің $U(x,t)$ шешімінің бар болуы [1]-нің нәтижелерінен тікелей шықпайды, себебі Ω_T^+ облысы цилиндрлік емес. Сондықтан

$$\tau = t, \quad y = \frac{x}{\tilde{R}(t)}$$

жаңа айнымалылар арқылы $G_T = \{(y,\tau):\ 0 < y < 1,\ 0 < \tau < T\}$ тікбұрышты облыста $V(y,\tau) \equiv U(x,t)$ функциясы келесі есепті қанағаттандырады:

$$V_\tau - \frac{1}{\tilde{R}^2}V_{yy} - y\frac{\dot{\tilde{R}}}{\tilde{R}}V_y = 0 \qquad 0 < y < 1, \qquad 0 < \tau < T$$

$$\frac{\alpha}{\tilde{R}}V_y - V = f(\tau) \qquad y = 0, \qquad 0 < \tau < T$$

$$\frac{1}{\tilde{R}}V_y + V\dot{\tilde{R}} = 0 \qquad y = 1, \qquad 0 < \tau < T$$

$$V(y,0) = \theta_0'(y\,R_0) \qquad 0 < y < 1, \qquad \tau = 0$$

Онда кез келген $\tilde{R}(t)\in\mathfrak{M}$ үшін бұл есеп 5.3 теореманың ([2]) барлық шарттарын қанағаттандырады және оның $H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}\left(\overline{G_T}\right)$ кеңістігінде жататын

$$|V|_{G_T}^{(2+\alpha)}\le M_1(T,C)$$

бағалауы болатын жалғыз $V(y,\tau)$ шешімі бар, мұндағы M_1 тұрақтысы T-дан тәуелді және $C=\max\left\{\ |\theta_0|_{[0,R_0]}^{(3+\alpha)},\quad |f|_{[0,T]}^{\frac{1+\alpha}{2}}\right\}.$

Олай болса, бастапқы айнымалылар арқылы алынған эквивалентті есебінің бағалауы бойынша жалғыз $U\in H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}\left(\overline{\Omega_T^+}\right)$ шешімі болады және теңсіздік орындалады:

$$|U|_{\Omega_T^+}^{(2+\alpha)}\le M_1(T,C).$$

Одан әрі, функция

$$\tilde{\theta}(x,t)=-\int_x^{\tilde{R}(t)}U(s,t)ds$$

көмекші есептің шешімі болатынын және

$$\tilde{\theta}(x,t)\in H^{3+\alpha,\frac{3+\alpha}{2}}\left(\overline{\Omega_t^+}\right)$$

кеңістігінде жататынын дәлелдейміз.

Шаудер теоремасының барлық шарттарын қанағаттандыратын жинақы оператор

$$R(t)=-\int_0^t\tilde{\theta}_x\left(\tilde{R}(\tau),\tau\right)d\tau+R_0\equiv F\left(\tilde{R}\right)$$

құрамыз. Онда Шаудер теоремасы бойынша қозғалмайтын нүкте

$$R(t)=-\int_0^t\theta_x(R(\tau),\tau)d\tau+R_0$$

бар болады немесе Стефан шарты орындалады:

$$\dot{R}(t)=-\theta_x(R(t),t).$$

Демек, $T_*=\min\{T_1,T_2\}$ болғанда

$$\theta(x,t)\in H^{3+\alpha,\left(\frac{3+\alpha}{2}\right)}\left(\overline{\Omega_{T_*}^+}\right),\qquad R(t)\in H^{\left(\frac{4+\alpha}{2}\right)}[0,T_*]$$

шешімнің бар болатыны және жалғыздығы дәлелденді.

II. Шешімнің кез келген $[0,T]$ аралығында бар болуы

Локальдышешімді t уақыттың барлық $[0,T]$ аралығында жалғастыру үшін тұрақтылары есептің берілгендері мен T шамасына тәуелді болатын априорлық бағалауларды алу керек.

$$M_3=\max\left\{|\,\theta_0\,|_{\Omega^+(0)}^{(3+\alpha)},\qquad |f|_{[0,\infty)}^{\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)}\right\}$$

деп алайық.

1-лемма. Теріс емес $f(t),\,\theta_0(x)$ функциялары шенелген болсын. Онда $C^{2,1}\left(\overline{\Omega_T^+}\right)$ кеңістігіне жататын $\theta(x,t)$ шешімі үшін

$$\left|\theta\right|_{\Omega_T^+}^{(2,1)} \leq M_4\left(M_3, T\right)$$

бағалауы дұрыс болады.

2-теорема. 1-теорема мен 1-лемманың шарттары орындалсын. Онда $[0,T]$ уақыт аралығында шешім бар және жалғыз болады:

$$\theta(x,t) \in H^{3+\alpha,\frac{(3+\alpha)}{2}}(\overline{\Omega}_{T_*}^{+}), \qquad R(t) \in H^{\frac{(4+\propto)}{2}}[0,T].$$

III. $t \to \infty$ болғандағы асимптотикалық жағдай

2-лемма. 1-және 2-теореманың шарттарында $f = 0$ болсын, сонда

$$\lim_{t\to\infty}\left|R(t) - R_\infty\right| = 0, \quad R_\infty = \int_0^{R_0} \theta_0(x)dx + R_0 + \alpha\theta_0(0).$$

3-лемма. 2-леммадағы шарттар орындалсын делік. Сонда

$$\lim_{t\to\infty}\left|\dot{R}(t)\right| = 0$$

Әдебиет

1. ЛадыженскаяО.А. Краевые задачи математической физики.– М.:Наука, 1967. – 407с.
2. Мейрманов А.М. Задача Стефана.– Новосибирск: Наука, 1986.–239 с.