УДК 517.5

# ОБ ОЦЕНКЕ НОРМЫ ПОТЕНЦИАЛА РИССА В ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА МОРРИ

**Әбек Ажар Нартайқызы**
azhar_18@inbox.ru
Магистрантка механико-математического факультета ЕНУ им. Л.Н. Гумилева,
Нур-Султан, Казахстан
Научный руководитель – Н.А. Бокаев

Пусть $f \in L_1^{loc}\left(R^n\right)$.Потенциал Рисса $I_\alpha$ определяется следующим образом [1]:

$$I_\alpha f(x) = \int_{R^n} \frac{f(y)dy}{|x-y|^{n-\alpha}}, \quad 0 < \alpha < n.$$

Пусть $1 \le p$, $\theta < \infty$ и пусть $w$ неотрицательная измеримая функция на $(0,\infty)$. Через $LM_{p\theta,w}$обозначим локальные пространства типа Морри, т.е. пространства всех функций $f \in L_p(B(0,r))$, для всех $r > 0$ с конечными квазинормами

$$\|f\|_{LM_{p\theta,w}} \equiv \|f\|_{LM_{p\theta,w}(R^n)} = \left\| w(r) \|f\|_{L_p(B(0,r))} \right\|_{L_\theta(0,\infty)}.$$

Пусть $1 \le p$, $\theta < \infty$. Через $\Omega_\theta$ обозначим множество неотрицательных измеримых на $(0,\infty)$ функций $w$, неэквивалентных нулю, таких, что для некоторого $t > 0$ выполняется условие

$$\|w(r)\|_{L_\theta(t,\infty)} < \infty.$$

Отметим, что если указанная величина равна бесконечности, то пространство $LM_{p\theta,w}$ состоит только из функции, эквивалентных нулю.

Для измеримого множества $\Omega \subset R^n$ и для неотрицательной и измеримой на $\Omega$ функций $v$, через $L_{p,v}(\Omega)$обозначим весовое пространство$L_p$ всех функций $f$ измеримых на $\Omega$, для которой

$$\|f\|_{L_{p,v}(\Omega)} = \|vf\|_{L_p(\Omega)} < \infty .$$

Если $0 < p \le \theta < \infty$, то

$$\|f\|_{LM_{p\theta,w}} \le \|f\|_{L_{p,W}} ,$$

и если $0 < \theta \le p < \infty$, то

$$\|f\|_{L_{p,W}} \le \|f\|_{LM_{p\theta,w}} ,$$

где для всех $x \in R^n$

$$W(x) = \|w\|_{L_\theta(|x|,\infty)} .$$

Пусть $H$ – оператор Харди

$$(Hg)(r) = \int_0^r g(t)dt ,\ 0 < r < \infty .$$

В данной работе получены оценки нормы потенциала Рисса в локальных пространствах типа Морри через норму оператора Харди.

В следующей теореме приводится оценка $L_p$-нормы по шару $B(0,r)$ потенциала Рисса через $L_p$-норму по шару функций $f$ .

Тоерема 1. Пусть $p_1$, $p_2$и $\alpha$ удовлетворяют условиям:

$$1 < p_1 < p_2 < \infty \text{ и } \alpha = n\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right) \tag{1}$$

Если $0 < \delta < \dfrac{n}{p_1} - \alpha$, тогда существуетпостоянное число$c > 0$ такое, что

$$\|I_\alpha f\|_{L_{p_2}(B(0,r))} \le c r^{n/p_2 - \delta} \left( \int_r^\infty \left( \int_{B(0,t)} |f(x)|^{p_1} dx \right) \frac{dt}{t^{n-(\alpha+\delta)p_1+1}} \right)^{1/p_1}$$

для всех $r > 0$ и для всех $f \in L_1^{loc}(R^n)$.

В следующей теореме приводится оценка нормы потенциала Рисса в локальных пространствах типа Морри через норму оператора Харди в весовом пространстве Лебега.

Теорема 2. Пусть выполнены условиятеоремы 1. Кроме того, пусть $0 < \delta < \dfrac{n}{p_1} - \alpha$, $0 < \theta < \infty$и $w \in \Omega_\theta$.

Тогда существует $c > 0$ такое, что имеет место неравенство:

$$\|I_\alpha f\|_{LM_{p_2\theta,w}} \le c\|Hg_\delta\|^{\frac{1}{p_1}}_{L_{\frac{\theta}{p_1},v_\delta}(0,\infty)}$$

для всех $f \in L_{p_1}^{loc}(R^n)$, где

$$g_\delta(t) = \int_{B\left(0,t^{-\frac{1}{\sigma}}\right)} |f(y)|^{p_1} dy ,\ \sigma = n - (\alpha+\delta)p_1$$

и

$$v_\delta(r) = \left[ w\left(r^{-\frac{1}{\sigma}}\right) r^{-\frac{1}{\sigma}\left(\frac{n}{p_2} - \delta + \frac{1}{\theta}\right) - \frac{1}{\theta}} \right]^{p_1}$$

Теорема 3. Пусть выполнены условиятеоремы 1. И пусть $0<\theta_1,\theta_2<\infty$, $0<\delta<\frac{n}{p_1}-\alpha$ и $w_1\in\Omega_{\theta_1}$, $w_2\in\Omega_{\theta_2}$.

Предположим, что оператор $H$ ограничен из $L_{\frac{\theta_1}{p_1},v_{1,\delta}}(0,\infty)$ в $L_{\frac{\theta_2}{p_1},v_{2,\delta}}(0,\infty)$ на конусе всех неотрицательных невозрастающих на $(0,\infty)$ функций $\varphi$, где

$$v_{1,\delta}(r)=\left[w_1\left(r^{-\frac{1}{\sigma}}\right)r^{-\frac{1}{\sigma\theta_1}-\frac{1}{\theta_1}}\right]^{p_1},$$

$$v_{2,\delta}(r)=\left[w_2\left(r^{-\frac{1}{\sigma}}\right)r^{-\frac{1}{\sigma}\left(\frac{n}{p_2}-\delta+\frac{1}{\theta_2}\right)-\frac{1}{\theta_2}}\right]^{p_1}$$

Тогда оператор $I_\alpha$ - ограничен из $LM_{p_1\theta_1,w_1}$ в $LM_{p_2\theta_2,w_2}$.

Теорема 4. Пусть выполнены условиятеоремы 1. И пусть $0<\theta_1\le\theta_2<\infty$, $w_1\in\Omega_{\theta_1}$, $w_2\in\Omega_{\theta_2}$.

Предположим, что для некоторого $0<\delta<\frac{n}{p_1}-\alpha$

$$\left\|w_2(r)r^{\frac{n}{p_2}-\delta}\left\|w_1^{-1}(t)t^{\alpha+\delta-\frac{n}{p_1}-\frac{1}{\min\{p_1,\theta_1\}}}\right\|_{L_s(r,\infty)}\right\|_{L_{\theta_2}(0,\infty)}<\infty, \tag{2}$$

где $s=\frac{p_1\theta_1}{(\theta_1-p_1)_+}$.

Тогда $I_\alpha$ - ограничен из $LM_{p_1\theta_1,w_1}$ в $LM_{p_2\theta_2,w_2}$.

Если $p_1=1$, тогда это утверждение также верно, если в (2) формуле $\delta=0$.

Теорема 5. Пусть выполнены условиятеоремы 1, и кроме того, $0<\theta_1\le\theta_2<\infty$, $\theta_1\le 1$, $w_1\in\Omega_{\theta_1}$ и $w_2\in\Omega_{\theta_2}$, тогда условие

$$\left\|w_2(r)\left(\frac{r}{t+r}\right)^{\frac{n}{p_2}}\right\|_{L_{\theta_2}(0,\infty)}\le c\|w_1\|_{L_{\theta_1}(t,\infty)},$$

где $c>0$ независима от $t>0$, необходимо и достаточно для ограниченности оператора $I_\alpha$ из $LM_{p_1\theta_1,w_1}$ в $LM_{p_2\theta_2,w_2}$.

В приведенных утверждениях параметры $p_1,p_2,\theta_1,\theta_2$ удовлетворяют условиям $1<p_1<p_2<\infty$, $0<\theta_1\le\theta_2<\infty$. Более общие случаи рассмотрены в [2].

**Список использованных источников**


1. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. – Мир: Москва, 1973, 343 с.
2. Burenkov V.I.,Guliyev V.S. Necessary and Sufficient Conditions for the Boundedness of the Riesz Potential in Local Morrey-type Spaces // Potential Anal. 2009,№30. -P.211–249