

УДК 577.3

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АКТИВНОСТИ КЛЕТКИ ЧЕРЕЗ РЕЦЕПТОРЫ КОЖИ

Атантаева¹ Сания Алибековна, Бейсенова² Динара Дауреновна
saneka77@mail.ru, beisenova.d.d@gmail.com

¹PhD-докторант кафедры математического и компьютерного моделирования

²студентка кафедры математического и компьютерного моделирования

ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан

Научный руководитель – К.Б. Нуртазина

Несколько слов о мотивах обращения к теме. Мембранный потенциал некапсульного нервного окончания влияет на мозг, а через него на чувства, решения, желания и эмоции человека. При этом мозг содержит конкретные нейронные группировки, активность которых определяет поведение и выборы человека. В большинстве случаев эти группировки можно найти и на них повлиять. Разные отделы мозга по-разному воспринимают реальность, по-разному её трактуют и по-разному делают выводы. Между разными отделами мозга происходит конкурентная борьба. В процессе принятия решений лицо, принимающее решение (ЛПР), оценивает плюсы и минусы решения разными отделами мозга. Результат принятия решений индивидуумом зависит от двух центров – центра удовольствия и центра страха. Активность первого зависит от положительного выбора, то есть учитывает только плюсы и не обращает внимание на минусы. Второй же центр оценивает только минусы. Вот тогда-то и возникает внутренний конфликт, разрешимость которого зависит от частоты импульсивности каждого центра[1].

Рецепторы кожи влияют на активность клетки. Нервная система основана на восприятии сигналов клеточными рецепторами. Нервная клетка – это нейрон который состоит из тела и множества отростков. Отростки – это дендриты и аксон. Дендриты собирают информацию, аксон отправляют эту информацию к следующим нейронам. Информация описывается через электрический импульс.

С математической точки зрения вся эта система моделируется с помощью графа-дерева $\Omega = \{E, V\}$, где $E = \{e_1, e_2, \dots, e_N\}$ множество ребер и $V = \{v_1, v_2, \dots, v_{N+1}\}$ набор

вершин. Метрический граф характеризуется тем, что каждое его ребро $e_j \in E$ отождествляется с интервалом (a_{2j-1}, a_{2j}) вещественной прямой положительной длины $l_j = [a_{2j-1} - a_{2j}]$. По определению граф-дерево не имеет циклов. Ребра графа сходятся в вершинах v_j , которые можно рассматривать в качестве классов эквивалентности конечных точек $\{a_j\}$. Звездный граф состоит из всех ребер, входящих в одну внутреннюю вершину v . Пучок – звездный граф, все ребра которого, кроме одного, являются граничными ребрами графа Ω .

В нашей модели активности клетки через рецепторы кожи мы рассматриваем связный конечный компактный метрический граф-дерево. При этом граничные вершины $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m\} = \partial\Omega \subset V$. Индекс вершины $d(v)$ означает число ребер, входящих в эту вершину. С этой точки зрения имеем обозначение $\partial\Omega = \{v \in V | d(v) = 1\}$. Никакая вершина не имеет индекс 2. В противном случае имеем эквивалентный граф с двумя совпавшими ребрами. Следовательно, $V \setminus \partial\Omega = \{v \in V | d(v) > 2\}$.

Квантовый граф наиболее применим к нашей биоматематической модели. Квантовый граф – это метрический граф с дифференциальными операторами, определенными на ребрах графа, соединенных в вершине с конкретными условиями согласования. С точки зрения диффузии потенциала в дендритном дереве $v(x, t)$ потенциал на неразветвленном дендритном интервале, рассматриваемом как пассивный кабель, его модель принимает вид

$$C v_t + \sum_{j=1}^k g_j (v - E_j) = \frac{a}{2R} v_{xx}, \quad (1)$$

где параметры $C, a, R, g_j, E_j, j = 1, 2, \dots, k$, представляют собой физические характеристики задачи. Переходя к безразмерным координатам, приходим к уравнению

$$u_t - u_{xx} + q(x)u = p h(x) \quad (2)$$

Мы применяем граничные условия Неймана, позволяющие управлять продольным потоком. Начальное распределение потенциала мы предполагаем нулевым $u|_{t=0} = 0$. Поскольку задача (2) может интерпретироваться по-разному, отличаться от нашей кабельной модели, мы допускаем небольшое обобщение и предполагаем, что $p = p(t)$ известная функция от t , а не константа. Ниже мы предполагаем, что $p(0) \neq 0$.

Математическая постановка задачи:

$$u_t - u_{xx} + q(x)u = p(t)h(x) \text{ на } E \times (0, T) - u_{xx} + q(x)u = p h(x) \quad (3)$$

$$\begin{cases} \sum_{e_j \sim v} \partial u_j(v, t) = 0 \text{ в каждой вершине } v \in V \setminus \partial\Omega, \quad t \in [0, T] \\ u(\cdot, t) \text{ непрерывны в каждой вершине для всех } t \in [0, T] \end{cases} \quad (4)$$

$$\partial u = f \quad \text{на } \partial\Omega \times [0, T], \quad u|_{t=0} = 0 \quad \text{на } \Omega \quad (5)$$

В (4) $\partial u_j(v, \cdot)$ означает производную функции u по направлению к вершине v , взятую вдоль ребра e в направлении от вершины. Кроме того, $e_j \sim v$ означает ребро e_j , входящее в вершину v , а сумма берется по всем ребрам, входящим в v . (4) – условие согласования Кирхгофа-Неймана. С точки зрения нейронной модели это закон сохранения текущего состояния системы.

Пусть $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$ и $\mathcal{F}^T = L^2([0, T]; \mathbb{R}^m)$. Известно, что существует единственное решение начально-краевой задачи (3)-(5) при известных $q(x)$ и $h(x)$.

При $\epsilon \in H^1(0, T)$ задаем оператор отклика $\tilde{R}^T: \mathcal{F}^T \rightarrow \mathcal{F}^T$ как

$$(\tilde{R}^T f)(t) = u^f(\cdot, t), \quad t \in [0, T] \quad (6)$$

Обратная задача состоит в восстановлении топологии графа, длин ребер, и векторов $q(\cdot)$ и $h(\cdot)$, известных по $\tilde{R}^T f$ для всех $f \in \mathcal{F}^T$. Это также означает, что нам известны $\tilde{R}^T f$ при $f \equiv 0$. Наш подход отличается от [2] математическим обоснованием, основанным на обратных задачах для уравнений на графах

Решение (3)-(5) можно записать в виде $u = y + z$, учитывая, что y и z являются решениями задач:

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} + q(x)y = 0 & \text{на } E \times (0, T) \\ \partial y = f & \text{на } \partial\Omega \times [0, T] \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} z_t - z_{xx} + q(x)z = p(t)h(x) & \text{на } E \times (0, T) \\ \partial z = f & \text{на } \partial\Omega \times [0, T] \end{cases} \quad (8)$$

с y и z , удовлетворяющими условиям согласования Кирхгофа-Неймана на $V \setminus \partial\Omega$ и нулевым начальным условиям. Представим решение уравнения (7) в виде y^f . Отсюда, для (7) оператор отклика $\tilde{R}^T: \mathcal{F}^T \rightarrow \mathcal{F}^T$ дается формулой

$$(R^T f)(t) = y_{|\partial\Omega}^f = u_{|\partial\Omega}^f - y_{|\partial\Omega}^0 = \tilde{R}^T f - \tilde{R}^T 0. \quad (9)$$

Первая обратная задача состоит в восстановлении вектора $q(\cdot)$ известного по $R^T f$ для всех $f \in \mathcal{F}^T$. Она решена в [3] и связана с (7), причем с y , удовлетворяющим условиям согласования Кирхгофа-Неймана на $V \setminus \partial\Omega$ и нулевыми начальными условиями.

Вторая обратная задача исходит из задачи (8), опять же с условиями согласования Кирхгофа-Неймана на $V \setminus \partial\Omega$, и с нулевыми начальными условиями. Теперь q считается известным из решения задачи 1. Обозначим решение z как u^0 .

Таким образом, из наших известных наблюдений

$$\chi(t) = z_{|\partial\Omega} = u_{|\partial\Omega}^0$$

и, согласно первой обратной задаче, из известной топологии, длин ребер и потенциалов ребер $q(\cdot)$ графа.

Вторая обратная задача решена с использованием наблюдений $\chi(t), t \in [0, T]$ для отыскания вектора $h(\cdot)$ на E .

Наш метод позволяет восстановить k исходных g_j параметров проводимости.

В первоначальном масштабировании уравнения кабеля мы выбирали произвольные i , $1 \leq i \leq k$ и определяли $u = v - E_i$. Так что N -векторы u и h , определенные на $E \times (0, T)$, должны быть проиндексированы через i ; скажем, $u = u^{[i]}$ и $h = h^{[i]}$, где каждый компонент $h^{[i]}$ задается как $h_l^{[i]} = \sum_{1 \leq j \leq k} g_{lj} E_{ji}$. Тогда для решения Обратной Задачи 1, надо сначала получить $q(\cdot)$, а затем k -кратно решить Обратную Задачу 2, для отыскания $h^{[i]}, i = 1, 2, \dots, k$. Матрица параметров проводимости принимает вид $\mathcal{G} = (g_{jl}) \in \mathbb{R}^{N \times k}$. Определяем $\mathcal{E} = (e_{ij}) \in \mathbb{R}^{k \times k+1}$, причем $e_{i1} = \hat{R}$ и $e_{ij} = E_{ij-1}$ для $2 \leq j \leq k+1$, $1 \leq i \leq k$. Если $\mathcal{K} \in \mathbb{R}^{k+1 \times k}$ таково, что $\mathcal{E}\mathcal{K} = I_k$, где I_k представляет собой $k \times k$ матрицу идентификации, тогда $\mathcal{G} = [h]\mathcal{K}$, где $[h]$ является $N \times k$ матрицей с i -тым столбцом $h^{[i]}$.

Далее математическая постановка усложнена тем, что во внутренних вершинах графа прикреплены массы, что практической точки зрения находит свое обоснование.

Предложенная нами математическая модель даст возможность изучить влияние некапсульного нервного окончания, получаемого через рецепторы кожи, на мозг и поведение человека.

Список использованных источников

1. Казанцева А. Кто бы мог подумать! – АСТ: CORPUS; Москва; 2014.
2. Stephenson E., Kojouharov H. A mathematical model of skeletal muscle regeneration // Mathematical methods in the applied sciences, 25 April, 2018.
3. Avdonin S., Bell J., Nurtazina K. Determining distributed parameters in a neuronal cable model on a tree graph // Mathematical methods in applied sciences, 2017 № 40 (11). P. 3973-3981.