

УДК 621.694.3

ВИХРЕВОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ГИДРОЦИКЛОНЕ

Шайхова Меруерт Дуйсенгазыевна,

shaikhova_md@inbox.ru

Магистрант механико-математического факультета ЕНУ им. Л.Н.Гумилева

Нур-Султан, Казахстан

Научный руководитель – М.И.Касабеков

Жидкость поступает в цилиндрический гидроциклон радиуса R через входное отверстие $r_3 \leq r_{\text{вх}} \leq R$ (рис.1.1.), а выходит через кольцевое отверстие 3, $r_1 \leq r_{\text{сл}} \leq r_2$. По оси гидроциклона образуется воздушный столб радиуса r_1 .

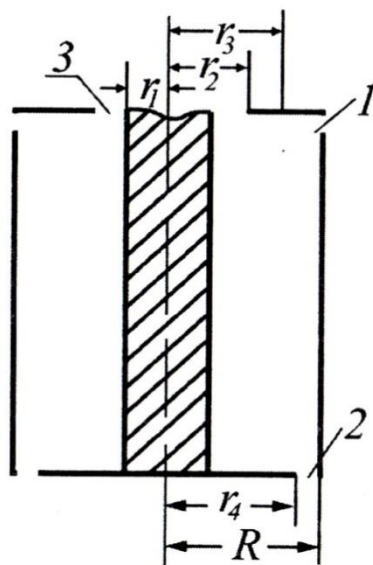


Рис.1.1. Схема цилиндрического гидроциклона
Согласно,

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon}, \\ \vartheta_\varepsilon &= -\frac{\partial \psi}{\partial r}, \\ \vartheta_z &= \Phi(\psi), \\ E &= -F(\psi), \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} \right) + r \Phi(\psi) \Phi'(\psi) + r F'(\psi) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

для безразмерной функции тока осесимметричного вихревого течения невязкой несжимаемой жидкости в цилиндрической системе координат имеют место следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \xi \frac{\partial}{\partial \xi} + G(\psi) G'(\psi) + \xi^2 F'(0) &= 0, \\ \vartheta_\xi &= \frac{1}{\xi} \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \vartheta_\eta = \frac{1}{\xi} \frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \vartheta_\varphi \xi = G(\psi). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Граничными условиями является:

$$\left. \begin{aligned} \psi(\eta, 1) &= \frac{Q_{\text{ВХ}}}{2\pi}, \quad \psi(\eta, \xi) = \frac{Q_{\text{ВХ}} - Q_P}{2\pi} \\ \psi(0, \xi) &= \psi^0(\xi), \quad \psi(\eta, \xi) = \psi^I(\xi) \\ \psi_2(\xi), \quad \xi_4 &\leq \xi \leq 1 \\ \psi_2(\xi) &= \frac{Q_{\text{ВХ}} - Q_P}{2\pi}, \quad \xi_1 \leq \xi \leq \xi_4 \\ (\xi), \quad \xi_3 &\leq \xi \leq 1 \\ \psi^I(\xi) &= 0, \quad \xi_1 \leq \xi \leq \xi_3 \\ \psi_1(\xi), \quad \xi_1 &\leq \xi \leq \xi_2 \end{aligned} \right\} (1.2)$$

Вводим обозначения:

$$\begin{aligned} v &= \frac{Q_{\text{ВХ}}}{\pi(R^2 - \xi^2)}, \quad p = \frac{p^0}{\rho V^2}, \quad v_\lambda = \frac{v_\lambda^0}{V} (\lambda = \varphi, \eta, \xi) \\ F(\psi) &= \frac{F^0(\psi)}{\rho V^2}, \quad G(\psi) = \frac{G^0(\psi)}{Rv}, \\ \psi &= \frac{\psi^0}{VR^2}, \quad \xi_i = \frac{r_i}{R} (i = 1, 2, \dots, 5), \end{aligned}$$

где v_ξ, v_η, v_φ – радиальная, осевая и тангенциальная компоненты скорости соответственно,

$F(\psi)$ – интеграл Бернулли;

$G(\psi)$ – циркуляция;

$\psi_0(\xi), \psi_1(\xi), \psi_2(\xi)$ – функция тока на входном, сливном и разгрузочном отверстиях соответственно;

$Q_{\text{ВХ}}, Q_P$ – расход жидкости через входное и разгрузочное отверстия соответственно.

При переходе к безразмерным переменными в качестве масштабов длины и скорости выбраны радиус гидроциклона R и средняя скорость жидкости через входное отверстие, индексом ноль обозначены размерные величины.

На граничные условия (1.2) наложены дополнительные ограничения соотношения расхода жидкости. Кроме того, функция тока должна быть непрерывной функцией, так как скачок функции тока приводит к бесконечным скоростям в осевой плоскости; тогда

$$\left. \begin{aligned} \psi_1(\xi_1) &= \psi_2(\xi_4) = \frac{Q_{\text{ВХ}} - Q_P}{2\pi}, \\ \psi_0(\xi_3) &= \psi_1(\xi_2) = 0, \\ \psi_2(1) &= \psi_0(1) = \frac{Q_{\text{ВХ}}}{2\pi}, \\ \psi_0(1) - \psi_0(\xi_3) &= \psi_2(1) - \psi_2(\xi_4) + \psi_1(\xi_1) - \psi_2(\xi_2). \end{aligned} \right\} (1.3)$$

Учитывая, что интеграл Бернулли сохраняется вдоль линии тока и давление жидкости на межфазной поверхности воздушного столба равно давлению P_1 в воздушной полости, получим уравнение:

$$P_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\xi_5} \frac{\partial \psi_0}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_5} \right)^2 + \left(\frac{G(\psi_0(\xi_5))}{\xi_5} \right)^2 = P_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\xi_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_1} \right)^2 + \left(\frac{G(\psi_1(\xi_1))}{\xi_1} \right)^2. \quad (1.4)$$

Здесь в левой части равенства выписана величина интеграла Бернулли на входном отверстии именно в точке $\xi = \xi_5$, в которой функция тока равна $(Q_{\text{ВХ}} - Q_P)/2\pi$, а в правой части – величина интеграла Бернулли на линии тока, проходящей по межфазной поверхности, где $\psi = \frac{Q_{\text{ВХ}} - Q_P}{2\pi}$;

P_0 – давление на входе из впускного патрубка, $\psi_0(\xi), \psi_1(\xi)$ – распределение функции тока на впускном и сливном отверстиях. Решив уравнение $\psi_0(\xi_5) = \frac{Q_{\text{ВХ}} - Q_P}{2\pi}$, найдем величину

ξ_5 . Теперь согласно $\Phi(\psi)\Phi'(\psi) = a_0 + a_1\psi$ и $(\psi) = b_0 + b_1\psi$ аппроксимируем произведение $G(\psi)G'(\psi)$ и функцию $F'(\psi)$ выражениями:

$$\left. \begin{aligned} G(\psi)G'(\psi) &= K\psi + C, \\ F'(\psi) &= A_1 + A_2\psi \end{aligned} \right\} (1.5)$$

Найдем значения постоянных A_1, A_2, K и C .

Так, зная зависимости компонент скорости радиуса на входном отверстии, через который проходит весь поток жидкости, т.е. все линии тока (если нет областей замкнутых циркуляций внутри гидроциклона), а также зная зависимость ψ_0 от ξ , можно найти зависимость произведения $G(\psi)G'(\psi)$ и функции $F'(\psi)$ от ψ на входном отверстии. Эти зависимости будут сохраняться во всем потоке. Выражая радиус через $\xi = f(\psi_0)$ и подставляя эту зависимость в $G(\psi)$ на входе, найдем явную зависимость циркуляции G от ψ . Если в интеграле Бернулли давление заменить выражением, которое получается после интегрирования по ξ уравнения

$$v_\xi \frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} + v_\eta \frac{\partial v_\xi}{\partial \eta} - \frac{v_\varphi}{\xi} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \xi}, \quad (1.6)$$

то получим зависимость $F(\psi)$ от ξ на входном отверстии:

$$F(\psi) = \int_{\xi_1}^{\xi} \left[-v_\eta \frac{\partial v_\xi}{\partial \eta} + \frac{v_\varphi^2}{\xi} \right] d\xi + \frac{v_\eta^2 + v_\varphi^2}{2}. \quad (1.7)$$

Подставив вместо ξ выражение $f(\psi_0)$, то получим явную зависимость $F(\psi)$ от функции тока. Функции $G(\psi)G'(\psi)$ и $F'(\psi)$ – непрерывные, если компоненты скорости и вихря – непрерывные функции, так как $F'(\psi) = (\vec{v} \times \vec{\omega})\vec{n}, \vec{n} \perp \vec{v}$, а $G'(\psi) = \frac{W_\xi}{v_\xi}$. В этом случае необходимо аппроксимировать функции $G(\psi)G'(\psi)$ и $F'(\psi)$ линейными функциями так, чтобы они наименее отклонялись от заданных непрерывных зависимостей $G(\psi)G'(\psi)$ и $F'(\psi)$. Для этого достаточно обращения в минимум следующих интегралов:

$$J_1 = \int_0^{\frac{Q_{BX}}{2\pi}} [F'(\psi) - A_1\psi - A_2]^2 d\psi, \quad (1.8)$$

$$J_2 = \int_0^{\frac{Q_{BX}}{2\pi}} [G(\psi)G'(\psi) - K\psi - C]^2 d\psi, \quad (1.9)$$

Коэффициенты A_1, A_2 находятся их решения системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{dJ_1}{dA_1} &= \int [F'(\psi) - A_1\psi - A_2]\psi d\psi, \\ \frac{1}{2} \frac{dJ_1}{dA_2} &= \int [F'(\psi) - A_1\psi - A_2] d\psi. \end{aligned} \right\} (1.10)$$

Для нахождения K, C составляется аналогичная система путем использования уравнения (1.9). Если $A_1 \approx A_2 \approx 0$, то течение близко к однородному винтовому.

Ю.М.Мартыновым для функции тока найдено следующее выражение:

$$\begin{aligned} \psi(r, z) &= Re \sum_{n=1}^{\infty} B_n r^2 \exp\left(i\sqrt{A_2} \frac{r^2}{2}\right) \Delta(b_n, 2, r) * \\ &* \left\{ [(a_{n,e} + \beta_n) \exp(-z_1 \sigma_n)] - \beta_n \right\} \exp(z \sigma_n) + [\beta_n - (a_{n,e} + \beta_n)] * \exp(z \sigma_n) * \\ &* (-2) sh^{-1}(z \sigma_n) - \beta_n + \psi'(r), \end{aligned} \quad (1.11)$$

где

$$\Delta(b_n, 2, r) = \Phi(b_n, 2; -i\sqrt{A_2} r^2) \psi(b_n, 2; -i\sqrt{A_2} r_1^2) -$$

$$\begin{aligned}
& -\Phi(b_n, 2; -ir^2\sqrt{A_2})\psi(b_n, 2; -i\sqrt{A_2}r^2); \\
& \sigma_n = (\lambda_n - K - \kappa)^{\frac{1}{2}}; \\
& b_n = 1 + (\lambda_n - \kappa) \frac{i}{4\sqrt{A_2}}; \\
& \beta_n = \sigma_n^{-2}(a_{n,1}c + a_{n,2}A_1 + a_{n,3}K + a_{n,4}A_1 + a_{n,5}); \\
& B_n^{-2} = \int_{r_1}^1 r^2 \exp(i\sqrt{A_2}r^2) \Delta^2(b_n, 2; r) dr.
\end{aligned}$$

Здесь $\Phi(b_n, m, z)$ – функция Крамера;

$\Gamma(z)$ – Гамма-функция,

$\lambda_n - n = \text{й}$ – положительный корень трансцендентного уравнения

$$\begin{aligned}
& \psi\left(1 - \frac{(\lambda - \kappa)i}{4\sqrt{A_2}}, 2; i\sqrt{A_2}\right) \Phi\left(1 - \frac{(\lambda - \kappa)i}{4\sqrt{A_2}}, 2; -i\sqrt{A_2}r_1^2\right) - \\
& - \psi\left(1 - \frac{(\lambda - \kappa)i}{4\sqrt{A_2}}, 2; -i\sqrt{A_2}r_1^2\right) \Phi\left(1 - \frac{(\lambda - \kappa)i}{4\sqrt{A_2}}, 2; i\sqrt{A_2}\right) = 0.
\end{aligned}$$

λ – константа разделения; $\kappa = A_2$, если $A_2 > 0$ и $\kappa = 0$, если $A_2 < 0$; величина κ введена для того, чтобы спектр собственных значений был положительным, когда $A_2 > 0$. Составляющие скорости выражаются через функцию тока по формулам (1.1).

Теперь в качестве примера, произведем расчет течения в цилиндрическом гидроциклоне, у которого $P_0 = 233.5, P_1 = 62.25, \xi_2 = 0.6, \xi_3 = 0.7, \xi_4 = 0.95, \eta_1 = 4, Q_{\text{вх}} = 3.55, Q_p = 0.355$ и зависимости функции тока на впускном, сливном и разгрузочном отверстиях, а также зависимость циркуляции $G(\xi)$ и радиальной компоненты скорости на впускном отверстии имеют вид:

$$\begin{aligned}
\psi_0(\xi) &= v_0 \frac{(1 + \xi_3^2)}{\pi} \left[\cos \frac{\xi_3^2 \pi}{1 + \xi_3^2} - \cos \frac{\xi^3 \pi}{1 + \xi_3^2} \right], \\
\psi_1(\xi) &= v_1 \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{\pi} \left[\cos \frac{\xi^2 \pi}{\xi_1^2 + \xi_2^2} - \cos \frac{\xi_2^2 \pi}{1 + \xi_3^2} \right], \\
\psi_2(\xi) &= v_2 \frac{(1 + \xi_4^2)}{\pi} \left[\cos \frac{\xi_4^2 + \pi}{1 + \xi_4^2} - \cos \frac{\xi^2 \pi}{1 + \xi_4^2} \right] + 0,495, \\
G(\xi) &= v_2 \xi^2 \frac{\pi}{1 + \xi_3^2}, \\
v_\xi &= 0.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

На основании (1.13) получим:

$$\begin{aligned}
F'(\psi) &= \frac{4\pi v_0}{(1 + \xi_3^2)} \left[B - \frac{\pi\psi}{(1 + \xi_3^2)v_0} \right] + \frac{v_3^2}{v_0} \frac{\pi^2}{(1 + \xi_3^2)} * \frac{1}{\sqrt{1 + (B - \pi\psi)/(1 + \xi_3^2)v_0^2}}, \\
G(\psi)G'(\psi) &= \frac{v_3^2 \pi}{v_0(1 + \xi_3^2)} \arccos \left(B - \frac{\pi\psi}{(1 + \xi_3^2)v_0} \right) * \frac{1}{\sqrt{1 + (B - \pi\psi)/(1 + \xi_3^2)v_0^2}},
\end{aligned} \tag{1.14}$$

где $B = \cos(\xi_3^2 \pi)/(1 + \xi_3^2)$.

На рис.1.2. показаны кривые $F'(\psi)$ и $G(\psi)G'(\psi)$ в зависимости от ψ , рассчитанные по (1.14). Подставляя (9.14) в систему уравнений (1.10), можно найти A_1, A_2 . Аналогично можно найти K и C . Аппроксимирующие прямые имеют вид: $F'(\psi) = 22,45 - 18,55\psi$; $G(\psi)G'(\psi) = 16,95 + 16,27\psi$ и представлены на рис.1.2. прямыми 1 и 2. Как видно, аппроксимирующие полиномы первой степени отличаются от истинных распределений незначительно.

Далее, решив уравнение $\psi_0(\xi) = \frac{Q_{вх}-Q_p}{2\pi}$, найдем что $\xi_5 = 0,96$. Подставив найденное значение ξ_5 в уравнении (1.4), получим $\xi_1 = 0,2$. На рис.1.3. нанесены линии тока для равноотстоящих значений ψ с шагом 0.1, начиная со значения 0.1, (самая удаленная линия тока боковых поверхностей гидроциклона). Картина линии тока согласуется с уравнениями расхода жидкости. Сгущение линии тока в кольцевых областях $0,2 < \eta < 2,4, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $\xi_1 < \xi < \xi_2$ и $0,2 < \eta < 2,4, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $\xi_3 < \xi < 1$ связано с наличием максимумов осевой скорости на впускном и сливном отверстиях.

Учитывая, что величина циркуляции сохраняется вдоль линии тока, зная распределение линий тока в плоскости поперечного сечения гидроциклона и зависимость циркуляции от функции тока, найденную на входном отверстии, можно найти распределение циркуляции и тангенциальной составляющей скорости внутри гидроциклона.

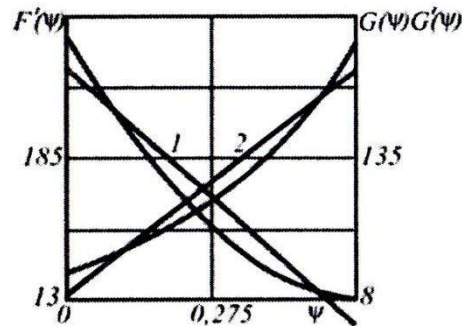


Рис.1.2. Кривые $F'(\psi)$ и $G(\psi)G'(\psi)$ в зависимости от ψ

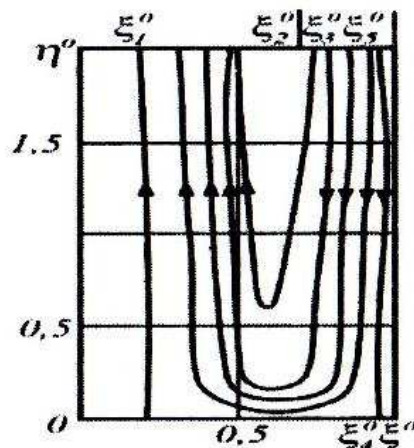


Рис.1.3. Линии тока в цилиндрическом гидроциклоне

На рис.1.4. изображено распределение тангенциальной составляющей скорости вдоль радиуса ξ при $\eta = 1$. Тангенциальная скорость при $0,2 \leq \xi \leq 0,68$ монотонно убывает и незначительно возрастает при $0,68 \leq \xi \leq 1$. На боковой поверхности гидроциклона тангенциальная составляющая равна 2.08, на свободной поверхности воздушного столбца -10, а на дне (за исключением отверстия) задается зависимостью $\frac{2}{\xi}$. Резкое возрастание v_4 с уменьшением радиуса связано с переносом циркуляции вдоль линии тока.

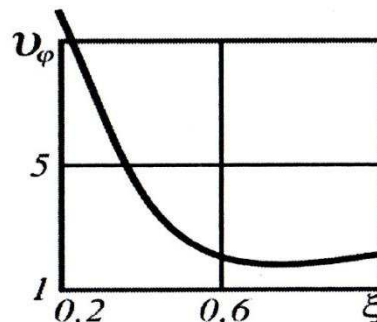


Рис.1.4. График зависимости $v_\varphi = f(\xi)$

Список использованных источников

1. Никифоров А.Ф. Уваров В.Б. Основы теории специальных функций. – М.: Наука, 1974, с. 1-8.
2. Абдурманов А. Механика жидкости.:Тараз, 2014.
3. Касабеков М.И., Абдурманов А.А. Математическое моделирование движения жидкости в цилиндрикоконическом гидроциклоне.// Наука и образование: Труды международной научной конференции.- Караганда, 2001, С.14-16