ӘОЖ 517.929.2

# БІР ШЕКСІЗ АЙЫРЫМДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІ ҮШІН БӨЛІКТЕНУ ШАРТТАРЫ

**Ғазиз Балнұр Маратқызы**
balnur_1496@mail.ru
Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ механика – математика факультетінің магистранты,
Нур-Султан, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі – ф.-м.ғ.д., профессор Оспанов К.Н.

Бұл мақалада коэффициенттері шенелмеген тізбек құрайтын бір саны шексіз сызықты айырымдық теңдеулер жүйесінің шешілу шарттарын алу мәселесі қарастырылып, шешімнің жүйеге қатысатын айырымдарының гильберттік нормалары бағаланады.

Сингулярлы екінші ретті келесі айырымдық теңдеулер жүйесін қарастырамыз:

$$-V\Delta_{+}(V\Delta_{-}y)+R\Delta_{-}y=F \qquad (1)$$

Мұндағы: $y=\{y_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$, $\Delta_{-}y=\{\Delta_{-}y_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}=\{y_j-y_{j-1}\}_{j=-\infty}^{+\infty}$, $F=\{F_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$,

$\Delta_{+}(V\Delta_{-}y)=\left\{\frac{1}{V_{j+1}}\Delta_{-}y_{j+1}-\frac{1}{V_j}\Delta_{-}y_j\right\}_{j=-\infty}^{+\infty}$, ал $V=diag\left\{\frac{1}{V_j}, j\in Z\right\}$ - элементтері оң, $R=diag\{r_j, j\in Z\}$- нақты диагональдық матрицалар, $V_j\geq\delta>0, j\in Z$. $F\in l_2$ деп есептейміз, $l_2$ - нормасы $\|y\|_2=\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty}y_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$ болатын тізбектер кеңістігі.

(1) жүйесі стохастикалық анализде [1] және қаржы математикасында [2] қолданылатын $\frac{1}{V(x)}\left(\frac{1}{V(x)}y'\right)'+r(x)y'=f(x), x\in R$ бір нұқсанды дифференциалдық теңдеудің айырымдық аналогы болып табылады. $V_j=1$ ($j\in Z$) жағдайында (1) жүйе [3] мақаласында зерттелген. (1) теңдеуінің басты ерекшеліктері – оған белгісіз $y=\{y_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ элементінің тек айырымдары ғана қатысады, ал $R\Delta_{-}y$ мүшесі $\{r_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ шенелмеген тізбек болғанда $-V\Delta_{+}(V\Delta_{-}y)$ жоғарғы мүшесіне оператор ретінде бағынбайды. Сол сияқты, $\frac{1}{V_j}$ шамасы $|j|\to+\infty$ жағдайында нөлге ұмтылуы мүмкін. Тағы бір атап өтерлігі, егер $\{r_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ шенелген тізбек болса, онда (1) теңдеуінің шешімі $l_2$-де жатпайды. Осы айтылғандар (1) жүйесін зерттеу өзекті екенін байқатады.

$\tilde{l}$ деп финитті тізбектер жиынын белгілейік:

$$\tilde{l}=\left\{\{z_j\}_{j=-\infty}^{+\infty} : \exists N, z_j=0, |j|\geq N\right\}$$

$\tilde{l}$ жиынында анықталған және $l_0 y = -V\Delta_+(V\Delta_- y) + R\Delta_- y$ формуласымен әсер ететін екінші ретті $l_0$ айырымдық операторын қарастырамыз. Бұл оператор симметриялы емес. Келесі лемма орынды.

**Лемма 1.** Айталық $R$ матрицасының элементтері үшін

$$r_j \geq 1 (\, j \in Z\,) \tag{2}$$

және

$$F^* := \sup_{n=0,1,\ldots}\left[\sqrt{n}\left(\sum_{j=n}^{+\infty} r_j^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\right] < \infty,\; F^{**} := \sup_{k=-1,-2,\ldots}\left[\sqrt{-k}\left(\sum_{j=-\infty}^{k} r_j^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\right] < \infty \tag{3}$$

шарттары орындалсын. Онда $l_0$ $l_2$ кеңістігі нормасында тұйықталатын оператор болып табылады.

**Теорема 1.** Айталық $R = (r_j)_{j=-\infty}^{+\infty}$ матрицасы (2) және (3) шарттарын қанағаттандырсын. Онда кез-келген $y \in D(l)$ үшін

$$\left\|-V\Delta_+(V\Delta_- y)\right\|_2 + \left\|R\Delta_- y\right\|_2 \leq 3\left\|ly\right\|_2 \tag{4}$$

бағалауы орынды.

**Дәлелдеуі.** Айталық $y \in \tilde{l}$ болсын. $\Delta_- y_j = z_j$ деп белгілейік. Онда (1) теңдеуі

$$-V_j\Delta_+(Vz)_j + (Rz)_j = F_j \; (j \in Z)$$

түрінде жазылады. Мұндағы: $z = \{z_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}, \sup\limits_{j\in Z}\left|\dfrac{1}{V}_j\right| = A < \infty, V = diag\left\{\dfrac{1}{V_j}, j \in Z\right\}$.Соңғы жүйедегі $j$-ші теңдеуді $z_j$-ге көбейтіп, нәтижесін $j$-лер бойынша қосындылаймыз. Сонда

$$-\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(\Delta_+\left(\frac{1}{V}z\right)_j\right)\left(\frac{1}{V}z\right)_j + \sum_{j=-\infty}^{+\infty}(Rz)_j z_j = \sum_{j=-\infty}^{+\infty}F_j z_j \tag{5}$$

Осы өрнектегі

$$A := \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(\Delta_+\left(\frac{1}{V}z\right)_j\right)\left(\frac{1}{V}z\right)_j = \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(\left(\frac{1}{V}z\right)_{j+1} - \left(\frac{1}{V}z\right)_j\right)\left(\frac{1}{V}z\right)_j$$

қосындысын түрлендірейік.

$$A = \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(\left(\frac{1}{V}z\right)_{j+1} - \left(\frac{1}{V}z\right)_j\right)\left(\frac{1}{V}z\right)_j = \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{V}z\right)_{j+1}\left(\frac{1}{V}z\right)_j - \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{V}z\right)_j\left(\frac{1}{V}z\right)_j$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{V}z\right)_j\left(\frac{1}{V}z\right)_{j-1} - \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{V}z\right)_j\left(\frac{1}{V}z\right)_j = \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{V}z\right)_j\left(\left(\frac{1}{V}z\right)_{j-1} - \left(\frac{1}{V}z\right)_j\right)$$

$$= \sum_{j=-n}^{m}\left(\frac{1}{V}z\right)_j\left(\left(\frac{1}{V}z\right)_{j-1} - \left(\frac{1}{V}z\right)_j\right) = \sum_{j=-n-1}^{m-1}\left(\frac{1}{V}z\right)_{j+1}\left(\left(\frac{1}{V}z\right)_j - \left(\frac{1}{V}z\right)_{j+1}\right)$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{V}z\right)_{j+1}\left(\left(\frac{1}{V}z\right)_j - \left(\frac{1}{V}z\right)_{j+1}\right) = -\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{V}z\right)_{j+1}\left(\left(\frac{1}{V}z\right)_{j+1} - \left(\frac{1}{V}z\right)_j\right)$$

Соңғы өрнек ондағы қосынды астында $z_{j+1}$-ге $z_j$–ді қосып, азайтсақ, келесі түрге келеді

$$A=-\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{V}z\right)_{j+1}\left(\left(\frac{1}{V}z\right)_{j+1}-\left(\frac{1}{V}z\right)_{j}\right)=-\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left[\left(\frac{1}{V}z\right)_{j+1}+\left(\frac{1}{V}z\right)_{j}-\left(\frac{1}{V}z\right)_{j}\right]\left[\left(\frac{1}{V}z\right)_{j+1}-\left(\frac{1}{V}z\right)_{j}\right]$$

$$=-\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(\left(\frac{1}{V}z\right)_{j+1}-\left(\frac{1}{V}z\right)_{j}\right)\left(\left(\frac{1}{V}z\right)_{j+1}-\left(\frac{1}{V}z\right)_{j}\right)-\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{V}z\right)_{j}\left(\left(\frac{1}{V}z\right)_{j+1}-\left(\frac{1}{V}z\right)_{j}\right).$$

$$A=-\frac{1}{2}P,\ -A=\frac{1}{2}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(\left(\frac{1}{V}z\right)_{j+1}-\left(\frac{1}{V}z\right)_{j}\right)^{2}=\frac{1}{2}\left\|\Delta_{+}\frac{1}{V}z\right\|_{2}^{2}.$$

Онда (5)-тен және (2) мен (3)-тен

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty}(Rz)_{j}z_{j}=\langle Rz,z\rangle=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(r_{jj}z_{j}\right)z_{j}\geq\sum_{j=-\infty}^{+\infty}z_{j}^{2}=\|z\|_{2}^{2}.$$

$$\|z\|_{2}^{2}+\frac{1}{2}\left\|\Delta_{+}\frac{1}{V}z\right\|_{2}^{2}\leq\sum_{j=-\infty}^{+\infty}F_{j}z_{j}\ ,$$

ал осыдан Гельдер теңсіздігі бойынша

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty}F_{j}z_{j}=|(F,z)|\leq\|F\|_{2}\cdot\|z\|_{2}\leq\frac{1}{2}\left(\|F\|^{2}+\|z\|^{2}\right)$$

$$\frac{1}{2}\left\|-\Delta_{+}\frac{1}{V}z\right\|_{2}^{2}+\|z\|_{2}^{2}\leq\frac{1}{2}\|F\|_{2}^{2}+\frac{1}{2}\|z\|_{2}^{2},$$

немесе

$$\left\|-\Delta_{+}\frac{1}{V}z\right\|_{2}^{2}+\|z\|_{2}^{2}\leq\|F\|_{2}^{2}.$$

Демек,

$$\left\|-\frac{1}{V}\Delta_{+}\left(\frac{1}{V}\Delta_{-}y\right)\right\|_{2}\leq A\cdot\left\|\Delta_{+}\frac{1}{V}z\right\|_{2}\leq\|F\|_{2}.$$

Осы теңсіздіктен (1) бойынша

$$\|R\Delta_{-}y\|_{2}\leq\left\|F+\frac{1}{V}\Delta_{+}\left(\frac{1}{V}\Delta_{-}y\right)\right\|_{2}\leq2\|F\|_{2}.$$

Олай болса

$$\left\|-\frac{1}{V}\Delta_{+}\left(\frac{1}{V}\Delta_{-}y\right)\right\|_{2}+\|R\Delta_{-}y\|_{2}\leq3\|F\|_{2}.$$

Сонымен әрбір $y\in\tilde{l}$ үшін (4) бағасы орындалады.

Енді айталық $y\in D(l)$ болсын. Онда $l$ операторының анықтамасы бойынша

$$\left\|\tilde{y}^{(n)}-y\right\|_{2}\to0,\ \left\|l_{0}\tilde{y}^{(n)}-ly\right\|_{2}\to0\ (n\to\infty)$$

қатыстарын қанағаттандыратын

$$\left\{\tilde{y}^{(n)}\right\}_{n=1}^{+\infty}\subset\tilde{l}\ \left(\tilde{y}^{(n)}=\left\{\tilde{y}_{j}^{(n)}\right\}_{j=-\infty}^{+\infty}\right)$$

тізбегі табылады. Сонымен бірге

$$\left\|-\frac{1}{V}\Delta_{+}\left(\frac{1}{V}\Delta_{-}\tilde{y}^{(n)}\right)\right\|_{2}+\left\|R\Delta_{-}\tilde{y}^{(n)}\right\|_{2}\leq3\left\|l\tilde{y}^{(n)}\right\|_{2},\ n\in N.$$

$n$-ді ұлғайтып, шекке көшеміз. (3) шартын және $l_2$ кеңістігінің толықтығын пайдаланып, нәтижесінде кез-келген $y\in D(l)$ үшін (4) теңсіздігін аламыз. Теорема дәлелденді.

**Лемма 2.**Айталық, 1 теоремасының шарттары орындалсын. Онда кез-келген $y \in D(l)$ үшін

$$\|y\|_2 \le C_1 \| ly\|_2 \qquad (6)$$

теңсіздігі орынды.

**Анықтама 1.** Егер $\{y^{(n)}\}_{n=1}^{+\infty} \subset \tilde{l}$ тізбегі табылып, $\left\|y^{(n)} - y\right\|_2 \to 0$, $\left\|l_0 y^{(n)} - F\right\|_2 \to 0$ $(n \to \infty)$ қатыстары орындалатын болса, онда $y = \{y_j\}_{j=-\infty}^{+\infty} \in l_2$ элементін (1) жүйесінің шешімі деп атайды.

**Теорема 2.** Айталық, $V_j \ge \delta > 0, j \in Z$ болып, $R = (r_j)_{j=-\infty}^{+\infty}$ матрицасы (2), (3) шарттарын қанағаттандырсын. Онда әрбір $F = \{f_j\}_{j=-\infty}^{+\infty} \in l_2$ үшін (1) жүйесінің жалғыз ғана $y$ шешімі бар және ол келесі теңсіздікті қанағаттандырады:

$$\|-V\Delta_+(V\Delta_- y)\|_2 + \|R\Delta_- y\|_2 + \|y\|_2 \le C_3\|F\|_2 . \qquad (7)$$

**Қолданылған әдебиеттер тізімі**


1. V.I. Bogachev, N.V. Krylov, M. Rӧckner, S.V. Shaposhnikov. Fokker – Planck – Kolmogorov Equations. American Mathematical Society. Math. Surv. AndMonogr. 207 (2015).
2. Gozzi F., Monte R., Vespri V. Generation of analytic semigroups and domain characterization for degenerate elliptic operators with unbounded coefficients arising in financial mathematics. Part I. Dif. Int. Equ. 15 2002.- P.1085 -1128.
3. Ospanov K.N., Zulkhazhav A. Coercive solvability of degenerate system of second order difference equations. AIP Conference Proceedings, 2016. –Vol. 1759.-P. 1-5