ӘОЖ 519.653

ДИФФЕРЕНЦИАЛДАУ ОПЕРАТОРЛАРЫ ЖАҒДАЙЫНДАҒЫ ГЕЛЬФАНД ДИАМЕТРІНІҢ ОПТИМАЛДЫ БАҒАЛАУЛАРЫ

Мұқаева Перизат Сағындыққызы
mukaeva_p@mail.ru
Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ-нің 2-курс магистранты, Нұр-Сұлтан, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі – А.Ж.Жұбанышева

Мақалада дифференциалдау операторлары жағдайындағы Гельфанд диаметріноптималды бағалау есебі қарастырылады. Алдымен қажетті анықтамаларға тоқталайық.

Гельфанд диаметрі[1]**.** X және Y Банах кеңістіктерімен X-ті У-ке бейнелейтінТ шенелген операторы берілсін. $F \subset X$ болсын. Онда Гельфанд диаметрі келесі түрде анықталады

$$\lambda^N\left(T,F,l^{(N)}\right)_Y \equiv \inf_{l_1,\ldots l_N \in l^{(N)}} \sup\left\{\|Tf\|_Y : f\in F, l_\tau(f)=0(\tau=1,\ldots,N)\right\},$$

мұндағы $l^{(N)} \equiv \left(l_N^{(1)},\ldots,l_N^{(N)}\right)$ F кеңістігінің сызықты қабықшасында анықталған функционалдар жиыны.

Кодтау диаметрі [1]**.** X және Y Банах кеңістіктерімен X-ті У-ке бейнелейтінТ шенелген сызықты операторы болсын. $F \subset X$ болсын. Онда “кодтау” диаметрі келесі түрде анықталады

$$\lambda_1^N\left(T,F,l^{(N)}\right)_Y \equiv \inf_{l_1,\ldots l_N \in l^{(N)}} \sup\left\{\|Tf-Tg\|_Y : f\in F, g\in F, l_\tau(f)=l_\tau(g)(\tau=1,\ldots,N)\right\}.$$

1997 жылы Н.Темірғалиев дәл емес мәліметтен алынған ақпарат негізінде тиімді есептеу агрегаттарын құруға негізделген Компьютерлік (есептеуіш) диаметр(қысқаша К(Е)Д) есебін (мысалы, [2] қараңыз) қойды. Бұл есепте келесі анықтама негізгі болып табылады:

$$\delta_N(\varepsilon_N;D_N)_Y \equiv \delta_N(\varepsilon_N;T;F;D_N)_Y \equiv \inf_{\left(l^{(N)},\varphi_N\right)\in D_N} \delta_N\left(\varepsilon_N;\left(l^{(N)},\varphi_N\right)\right)_Y,$$

мұндағы

$$\delta_N\left(\varepsilon_N;\left(l^{(N)},\varphi_N\right)\right)_Y \equiv \sup_{\substack{f\in F\\ \left|\gamma_N^{(\tau)}\right|\le 1(\tau=1,\ldots,N)}} \left\|Tf(\cdot)-\varphi_N\left(l_N^{(1)}(f)+\gamma_N^{(1)}\varepsilon_N,\ldots,l_N^{(N)}(f)+\gamma_N^{(N)}\varepsilon_N;\cdot\right)\right\|_Y.$$

Мұнда $Y-$ Ω_Y жиынында анықталған сандық функциялардың нормаланған кеңістігі (немесе $Y=C$, егер Tf операторы сандық болса), $F-$функциялар класы, $Tf-$ F- ті Y-ке бейнелейтін оператор. $\{\varepsilon_N\}$- теріс емес тізбек. $l^{(N)} \equiv \left(l_N^{(1)},\ldots,l_N^{(N)}\right)$арқылы Fфункциялар класында берілген функционалдар жиыны (сызықты болуы міндетті емес). φ_N *ақпаратты өңдеу алгоритмі,* $\varphi_N(z_1,\ldots,z_N;\cdot):C^N\times\Omega_Y \mapsto C$ түріндегі $N+1$ айнымалылы функция және ол әрбір бекітілген $(z_1,\ldots,z_N)$ үшін функция ретінде нормаланған Y кеңістігінің элементі болып табылады. $\varphi_N \in Y$ түріндегі кірістіруі φ_N жоғарыда көрсетілген барлық шарттарды қанағаттандыратындығын білдіреді. $\{\varphi_N\}_Y$ арқылы $\varphi_N \in Y$ тұратын жиынды белгілейміз. $D_N \equiv D_N(F)_Y - \left(l_N^{(1)},...,l_N^{(N)};\varphi_N\right) \equiv \left(l^{(N)},\varphi_N\right)$ есептеу агрегаттар жиыны.

Алдын ала берілген T, F, Y, D_N бойынша *Компьютерлік (есептеуіш) диаметр* есебі, келесі үш есепті шешуден тұрады:

К(Е)Д-1: Дәл ақпарат бойынша жуықтаудың екі жақты қателігі анықталады:

$$\succ\prec \delta_N(0;D_N)_Y \equiv \delta_N(0;T;F;D_N)_Y .$$

К(Е)Д-2: $D_N \equiv D_N(F)_Y$ жиынында жататын $\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right)$ есептеу агрегаты зерттеледі. $\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right)$ есептеу агрегаты үшін төмендегі шарттарды қанағаттындыратын $\tilde{\varepsilon}_N \equiv \tilde{\varepsilon}_N\left(D_N;\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right)\right)_Y$ тізбегінің бар болу және оны құру есебі:

біріншіден,

$$\delta_N(0;D_N)_Y \succ\prec \delta_N\left(\tilde{\varepsilon}_N;\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right)\right)_Y = \sup_{f\in F}\left\{\left\|Tf(\cdot)-\bar{\varphi}_N(z_1(f),...,z_N(f);\cdot)\right\|_Y : \right.$$
$$\left. f\in F,\ \left|\bar{l}_\tau(f)-z_\tau(f)\right| \le \varepsilon_N(\tau=1,...,N)\right\},$$

екіншіден,

$$\forall \eta_N \uparrow +\infty (0<\eta_N<\eta_{N+1},\ \eta_N \to +\infty):\ \overline{\lim_{N\to+\infty}}\, \delta_N\left(\eta_N\tilde{\varepsilon}_N;\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right)\right)_Y \Big/ \delta_N(0;D_N)_Y = +\infty$$

К(Е)Д-3: $D_N\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right)$ есептеу агрегаттар жиынынан алынған кез келген есептеу агрегаты үшін

$$\forall \eta_N \uparrow +\infty (0<\eta_N<\eta_{N+1},\ \eta_N \to +\infty):\ \overline{\lim_{N\to+\infty}}\, \delta_N\left(\eta_N\tilde{\varepsilon}_N;\left(l^{(N)},\varphi_N\right)\right)_Y \Big/ \delta_N(0;D_N)_Y = +\infty$$

теңдігі орындалатындай $D_N\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right)$ есептеу агрегаттар жиыны құрылады.

Енді К(Е)Д мен Гельфанд диаметрінің арасындағы байланысты қарастырайық. **Теорема А**[3 қараңыз]. F дөңес центрлік-симметриялық класы үшін келесі

$$\delta_N(0;Tf=f;F;l_N\times\{\varphi_N\}_Y)_Y \succ\prec \lambda_1^N\left(T,F,l^{(N)}\right)_Y =$$
$$= 2\lambda^N\left(T,FX,l^{(N)}\right)_Y \tag{1}$$

қатынасы орындалады, мұндағы X және Y - нормаланған кеңістік, ал FA - F жиынының A -ның нормасы бойынша анықталатындығын білдіреді.

Бұл теореманы әйгілі Тихомиров В.М., Корнейчук.Н.П. – Новак Э. – Малыхин Ю.еңбектерінің нәтижесінің салдары деуге болады.

Теорема В[1 қараңыз]**.**Егер Т операторы сызықты, ал F класы дөңес және центрлі симметриялы болса, онда келесі теңдік орынды

$$\lambda_1^N\left(T,F,l^{(N)}\right)_Y = 2\lambda^N\left(T,F,l^{(N)}\right)_Y . \tag{2}$$

Гельфанд диаметрінің ретін К(Е)Д есебін шешу арқылы аламыз. Алдымен дәл ақпарат бойынша жуықтап дифференциалдау есебінің шешімін Фурье коэффициентінен алынған мәлімет арқылы К(Е)Д мәнмәтінінде конкретизациясын берейік:

$Tf = f^{(\alpha_1,\ldots\alpha_s)}$ дифференциалдау операторы, $F = E_s^r(0,1)^s$ $(r>1, s=1,2,\ldots)$класы – Коробов класы.Қалпына келтіру қателігі $Y = L^2(0,1)^s$ нормасы бойынша өлшенеді.
Фурье коэффициенттері арқылы берілген сызықты функционалдардан

$$l_N^{(1)}(f) = \hat{f}(m^{(1)}),\ldots,l_N^{(N)}(f) = \hat{f}(m^{(N)})$$

және ақпаратты өңдеу $\varphi_N \equiv \varphi_N(z_1,\ldots,z_N;x)$ агрегаттарынан тұратын есептеу агрегаттар жиыны ($s=1,2,\ldots$)

$$D_N = \left\{\hat{f}(m^{(1)}),\ldots,\hat{f}(m^{(N)}) : m^{(1)},\ldots,m^{(N)} \in Z^s\right\} \times \left\{\varphi_N\right\}_Y$$

түрінде анықталсын.

Қажетті анықтамаларды келтірейік.

Анықтама 1. $E \subset R^s$ – өлшемді жиыны берілсін. $L^2(E)$ классы деп E жиынында өлшемді, $\|f\|_{L^2(E)} = \left(\int_E |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$ нормасы ақырлы болатын f функциялар жиыны аталады.

Анықтама 2. $E_s^r(r>1; s=1,2,\ldots)$*Коробов класы* деп әрбір айнымалысы бойынша 1-периодты Фурье коэффициентері

$$\left|\hat{f}(m)\right| \le \left(\prod_{j=1}^{s} \max\{1;|m_j|\}\right)^{-r}$$

теңсіздігін қанағаттандыратын барлық $f(x) = f(x_1,\ldots,x_s)$ функциялар жиыны аталады.
Мұндағы

$$\hat{f}(m) = \int_{[0,1]^s} f(x) e^{-2\pi i(m,x)} dx \quad (m \in Z^s)$$

тригонометриялық Фурье-Лебег коэффициенттері.

Теорема.s оң бүтін саны мен $r > \alpha_1 + \ldots + \alpha_s$ және $1 < r-\alpha_1 < r-\alpha_2 \le \ldots \le r-\alpha_s$, шартын қанағаттандыратын теріс емес $r,\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ нақты сандары берілсін. Онда келесі қатынас орындалады

$$\delta_N(0;D_N)_{L^2} \equiv \delta_N(0;Tf = f^{(\alpha_1,\ldots\alpha_s)};E_s^r;D_N)_{L^2} \equiv$$

$$\equiv \inf_{m^{(1)},\ldots,m^{(N)}\in Z^s;\varphi_N} \sup_{f\in E_s^r} \left\| f^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)}(\cdot) - \varphi_N\left(\hat{f}(m^{(1)}),\ldots,\hat{f}(m^{(N)});\cdot\right)\right\|_{L^2} << \frac{(\ln N)^{(s-1)(r-\alpha_1-\frac{1}{2})}}{N^{r-\alpha_1-\frac{1}{2}}}. \qquad (3)$$

(3) пен жоғарыдағы (1)–(2) бойынша Гельфанд диаметрінің бағалауы

$$\lambda^N\left(T, E_s^r, l^{(N)}\right)_{L^2} \equiv \inf_{l_1,\ldots,l_N \in l^{(N)}} \sup\left\{\left\|f^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)}\right\|_{L^2} : f \in E_s^r, l_\tau(f) = 0(\tau = 1,\ldots,N)\right\} <<$$

$$<< \frac{(\ln N)^{(s-1)(r-\alpha_1-\frac{1}{2})}}{N^{r-\alpha_1-\frac{1}{2}}}.$$

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Корнейчук Н.П.Точные константы в теории приближения. М.: Наука, 1987.
2. Темиргалиев Н., Жубанышева А.Ж., Теория приближений, Вычислительная математика и Численный анализв новой концепции в свете Компьютерного (вычислительного) поперечника// Вестник ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, –Астана, 2018. – №3(124) –С.8-10.
3. Н. Темиргалиев, А. Ж. Жубанышева Порядковые оценки норм производных функций с нулевыми значениями на линейных функционалах и их применения// Изв. Вузов., 2017, № 3.– С. 89–95.