ӘОЖ 512.552

# ЕКІ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ БАР ЕКІ АЙНЫМАЛЫ ДИФФРЕНЦИАЛДЫҚ АЛГЕБРАЛАРДЫҢ ҚҰРЫЛЫМЫ.

**Сардарбек Қуанышбек Омарәліұлы**
kuanyshbeksardarbek@gmail.com
Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия Ұлттық университетінің 2-курс магистранты
Ғылыми жетекші – Науразбекова А.С.

$k$ - 0 сипаттаушы өріс, $k[x,y]$ - $k$ өрісіндегі $x$,$y$ екі айнымалы көпмүшеліктер сақинасы, $\partial_1,\partial_2$ - $k[x,y]$ көпмүшеліктер сақинасының дифференциалдауы және $\partial_1,\partial_2$- коммутатр болады. Онда

$$A=k_2\{x,y\}=k\left[x,x^{\partial_1},x^{\partial_2},\ldots,x^{\partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}},\ldots,y,y^{\partial_1},y^{\partial_2},\ldots,y^{\partial_1^{\beta_1}\partial_2^{\beta_2}},\ldots\right]$$

$k$ өрісіндегі $x$,$y$ екі айнымалы $\partial_1,\partial_2$ диффренциалаушы коммутатр диффререниалды алгебра деп аталады. Сондай-ақ А алгебрасы $k$ өрісіндегі $x^{\partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}},y^{\partial_1^{\beta_1}\partial_2^{\beta_2}}$ айнымалыларынан тұратын көпмүшеліктер сақинасы, мұндағы $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ барлық теріс емес бүтін сандардың жиынтығы.

$\omega_1=z^{\partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}}$ және $\omega_2=t^{\partial_1^{\beta_1}\partial_2^{\beta_2}}$, мұндағы $z,t\in\{x,y\}$. $\omega_1>\omega_2$ деп есептейміз, егер

1. $z=t,t=y$
2. $z=t,\alpha_1+\alpha_2>\beta_1+\beta_2$
3. $z=t,\alpha_1+\alpha_2=\beta_1+\beta_2,\alpha_1>\beta_1$

$A=k_2\{x,y\}$ алгебрасының басисі келесідей сөз түріннен тұратыны белгілі

$$\omega=\omega_1^{\alpha_1}\omega_2^{\alpha_2}\ldots\omega_s^{\alpha_s}, \qquad (1)$$

мұндағы $\omega_i=z^{\partial_1^{\alpha_{i1}}\partial_2^{\alpha_{i2}}}$, $z\in\{x,y\},a_i\left(i=\overline{1,s}\right)$ - теріс емес бүтін сандар, $\omega_1>\omega_2>\ldots>\omega_s$.

(1) түріндегі $\omega$ сөзінің ұзындығын $l(\omega)=\sum_{i=1}^{s}a_i$ анықтаймыз.

(1) түріндегі $\omega$ сөзінің дәрежесін

$$\deg\omega = \sum_{i=1}^{s} a_i \partial_1^{\alpha_{i1}} \partial_2^{\alpha_{i2}}$$

анықтаймыз.

Мысалы,

$$\deg(x) = 1\cdot\partial_1^0\partial_2^0 = 1, \deg\left(x^3\right) = 3\cdot\partial_1^0\partial_2^0 = 3, \deg\left(x^{\partial_1}\right) = 1\cdot\partial_1 = \partial_1, \deg\left(\left(x^{\partial_1^2\partial_2}\right)^2\right) = 2\partial_1^2\partial_2,$$

$$\deg\left(\left(x^{\partial_1^3\partial_2}\right)^2 x^{\partial_1\partial_2}\left(y^{\partial_1^4}\right)y\right) = 2\partial_1^3\partial_2 + \partial_1\partial_2 + 3\partial_1^4 + 1 = 3\partial_1^4 + 2\partial_1^3\partial_2 + \partial_1\partial_2 + 1.$$

Осыдан белгілі , $\partial_1, \partial_2$ теріс емес бүтін коэффицентті $\deg\omega$ екі айнымалы көпмүшелік болып табылады. $\varphi = \partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}$ мономның дәрежесі ретінде $d(\varphi) = \alpha_1 + \alpha_2$. $\varphi = \partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}$ мономды $\psi = \partial_1^{\beta_1}\partial_2^{\beta_2}$ мономнан кіші деп санаймыз, егер

1. $d(\varphi) = d(\psi),$
2. $d(\varphi) = d(\psi), d_{\partial_1}(\varphi) < d_{\partial_1}(\psi)$ (т.б $\alpha_1 < \beta_1$)

$\varphi = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \ldots + a_n\varphi_n, \varphi_1 > \varphi_2 > \ldots > \varphi_n$ болсын. $\varphi_1$ көпмүшеліктің үлкен бөлігі деп атаймыз және оны $\tilde{\varphi}$ түрінде жазамыз. $\varphi$ көпмүшелігінің дәрежесі оның үлкен бөлгінің дәрежесіне тең т.б. $d(\varphi) = d(\varphi_1)$

$\varphi = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \ldots + a_n\varphi_n, \varphi_1 > \varphi_2 > \ldots > \varphi_n,$

$\psi = b_1\psi_1 + b_2\psi_2 + \ldots + b_m\psi_m, \psi_1 > \psi_2 > \ldots > \psi_m$

болсын. $\varphi < \psi$ депесептейміз, егер

1) $\varphi_1 < \psi_1,$

2) $\varphi_1 = \psi_1, a_1 < b_1,$

3) $\varphi_1 = \psi_1, a_1 = b_1, \varphi_2 < \psi_2,$

4) $\varphi_1 = \psi_1, a_1 = b_1, \varphi_2 = \psi_2, a_2 < b_2,$

…,

s) $\varphi_i = \psi_i\left(i = \overline{1, n-1}\right), a_i = b_i\left(i = \overline{1, n-1}\right), \varphi_n < \psi_n,$

s+1) $\varphi_i = \varphi_i\left(i = \overline{1, n}\right), a_i = b_i\left(i = \overline{1, n-1}\right), a_n < b_n,$

s+2) $\varphi_i = \psi_i\left(i = \overline{1, n}\right), a_i = b_i\left(i = \overline{1, n}\right), b_{n+1} \neq 0.$

$d(\deg\omega) = \max\{d(\deg_y\omega), d(\deg_x\omega)\}$болатыны анық, себебі $\deg_y\omega, \deg_x\omega$- бұл $\partial_1, \partial_2$ айнымалы бүтін теріс емес коэффициентті көпмүшелік.

(1) түріндегі сөздер жиынынына салыстыру енгіземіз. $\vartheta$ және $\omega$ (1) түріндегі сөз болсын. Онда $\omega > \vartheta$ болады, егер

1. $\deg\omega > \deg\vartheta.$
2. $\deg\omega = \deg\vartheta, \deg_x\omega > \deg_x\vartheta.$

$f \in A$ болсын, онда $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_m f_m$, мұндағы $f_i$, (1) түріндегі сөз және $f_1 > f_2 > \ldots > f_m$, барлық $i$ үшін, $\lambda_i \in k$ . $f_1$ - $f$ -тің үлкен бөлігінің элементі деп атаймыз және $\overline{f}$ арқылы белгілейтін боламыз. Өйткені, $\deg f_1 \geq \deg f_2 \geq \ldots \geq \deg f_m$, онда $\deg f = \deg \overline{f}$ деп санаймыз.

Лемма 1.

$$\omega = \omega_1^{a_1} \ldots \omega_{r-1}^{a_{r-1}} \omega_r^{a_r} \ldots \omega_s^{a_s} = \left( x^{\partial_1^{\alpha_{11}} \partial_2^{\alpha_{12}}} \right)^{a_1} \ldots \left( x^{\partial_1^{\alpha_{(r-1)1}} \partial_2^{\alpha_{(r-1)2}}} \right)^{a_{r-1}}$$

$$\left( y^{\partial_1^{\alpha_{r1}} \partial_2^{\alpha_{r2}}} \right)^{a_r} \ldots \left( y^{\partial_1^{\alpha_{s1}} \partial_2^{\alpha_{s2}}} \right)^{a_s}.$$

Онда

$$\deg \omega^{\partial_1^{\varepsilon_1} \partial_2^{\varepsilon_2}} = \deg \omega + \partial_1^{\alpha_1 + \varepsilon_1} \partial_2^{\alpha_2 + \varepsilon_2} - \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2},$$

мұндағы $\partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} = \tilde{\deg}\, \omega = \max \left\{ \partial_1^{\alpha_{11}} \partial_2^{\alpha_{12}}, \partial_1^{\alpha_{r1}} \partial_2^{\alpha_{r2}} \right\}$.

Дәлелдеуі. $\deg \omega = \sum_{i=1}^{r-1} a_i \partial_1^{\alpha_{i1}} \partial_2^{\alpha_{i2}} + \sum_{i=r}^{s} a_i \partial_1^{\alpha_{i1}} \partial_2^{\alpha_{i2}}$.

$l = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ бойынша индукция жүргіземіз.

$l = 1$ болсын, жалпы түрін жоғалтпай, $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 0$ есептейтін боламыз. Онда Лейбинц ережесі бойынша, біз келесіні ала аламыз

$$\omega^{\partial_1} = \left( \omega_1^{a_1} \ldots \omega_{r-1}^{a_{r-1}} \omega_r^{a_r} \ldots \omega_s^{a_s} \right)^{\partial_1} = \left( \omega_1^{a_1} \right)^{\partial_1} \ldots \omega_{r-1}^{a_{r-1}} \omega_r^{a_r} \ldots \omega_s^{a_s} + \ldots + \omega_1^{a_1} \ldots \left( \omega_{r-1}^{a_{r-1}} \right)^{\partial_1}$$

$$\omega_r^{a_r} \ldots \omega_s^{a_s} + \omega_1^{a_1} \ldots \omega_{r-1}^{a_{r-1}} \left( \omega_r^{a_r} \right)^{\partial_1} \ldots \omega_s^{a_s} + \ldots \omega_{r-1}^{a_{r-1}} \omega_r^{a_r} \ldots \left( \omega_s^{a_s} \right)^{\partial_1} = a_1 \omega^{\partial_1} \omega^{a_1 - 1} \ldots$$

$$\ldots \omega_{r-1}^{a_{r-1}} \omega_r^{a_r} \ldots \omega_s^{a_s} + \ldots + a_{r-1} \omega^{a_1} \ldots \omega_{r-1}^{\partial_1} \omega_{r-1}^{a_{r-1} - 1} \omega_r^{a_r} \ldots \omega_s^{a_s} + a_r \omega_1^{a_1} \ldots \omega_{r-1}^{a_{r-1}} \omega_1^{\partial_1} \omega_r^{a_r}$$

$$\omega_s^{\partial_1} \omega_s^{a_s - 1} = a_1 x^{\partial_1^{\alpha_{11}+1} \partial_2^{\alpha_{12}}} \left( x^{\partial_1^{\alpha_{11}} \partial_2^{\alpha_{12}}} \right)^{a_1 - 1} \ldots \left( x^{\partial_1^{\alpha_{(r-1)1}} \partial_2^{\alpha_{(r-1)2}}} \right)^{a_{r-1}} \left( y^{\partial_1^{\alpha_{r1}} \partial_2^{\alpha_{r2}}} \right)^{a_r} \ldots$$

$$\ldots \left( y^{\partial_1^{\alpha_{s1}} \partial_2^{\alpha_{s2}}} \right)^{a_s} + \ldots + a_{r-1} \left( x^{\partial_1^{\alpha_{11}} \partial_2^{\alpha_{12}}} \right)^{a_1} \ldots x^{\partial_1^{\alpha_{(r-1)1}} \partial_2^{\alpha_{(r-1)2}}} \left( x^{\partial_1^{\alpha_{(r-1)1}} \partial_2^{\alpha_{(r-1)2}}} \right)^{a_{r-1} - 1} \left( y^{\partial_1^{\alpha_{r1}} \partial_2^{\alpha_{r2}}} \right)^{a_r} \ldots$$

$$\ldots \left( y^{\partial_1^{\alpha_{s1}} \partial_2^{\alpha_{r2}}} \right)^{a_s} + a_r \left( x^{\partial_1^{\alpha_{11}} \partial_2^{\alpha_{12}}} \right)^{a_1} \ldots \left( x^{\partial_1^{\alpha_{(r-1)1}} \partial_2^{\alpha_{(r-1)2}}} \right)^{a_{r-1}} y^{\partial_1^{\alpha_{r1}+1} \partial_2^{\alpha_{r2}}} \left( y^{\partial_1^{\alpha_{r1}} \partial_2^{\alpha_{r2}}} \right)^{a_r - 1} \ldots \left( y^{\partial_1^{\alpha_{s1}} \partial_2^{\alpha_{s2}}} \right)^{a_s} + \ldots +$$

$$+ a_s \left( x^{\partial_1^{\alpha_{11}} \partial_2^{\alpha_{12}}} \right)^{a_1} \ldots \left( x^{\partial_1^{\alpha_{(r-1)1}} \partial_2^{\alpha_{(r-1)2}}} \right)^{a_{r-1}} \left( y^{\partial_1^{\alpha_{r1}} \partial_2^{\alpha_{r2}}} \right)^{a_r} \ldots y^{\partial_1^{\alpha_{s1}+1} \partial_2^{\alpha_{s2}}} \left( y^{\partial_1^{\alpha_{s1}} \partial_2^{\alpha_{s2}}} \right)^{a_s - 1}.$$

Онда

$$\deg\left(\omega_1^{\partial_1}\omega_1^{a_1-1}\ldots\omega_{r-1}^{a_{r-1}}\omega_r^{a_r}\ldots\omega_s^{a_s}\right)=\partial_1^{\alpha_{11}+1}\partial_2^{\alpha_{12}}+\left(a_1-1\right)\partial_1^{\alpha_{11}}\partial_2^{\alpha_{12}}+\ldots+a_r\partial_1^{\alpha_{r1}}\partial_2^{\alpha_{r2}}+\ldots+a_s\partial_1^{\alpha_{s1}}\partial_2^{\alpha_{s2}},$$
$$\deg\left(\omega_1^{a_1}\ldots\omega_{r-1}^{a_{r-1}}\omega_r^{\partial_1}\omega_r^{a_r-1}\ldots\omega_s^{a_s}\right)=a_1\partial_1^{\alpha_{11}+1}\partial_2^{\alpha_{12}}+\ldots+\partial_1^{\alpha_{r1}+1}\partial_2^{\alpha_{r2}}+\left(a_r-1\right)\partial_1^{\alpha_{r1}}\partial_2^{\alpha_{r2}}+\ldots+a_s\partial_1^{\alpha_{s1}}\partial_2^{\alpha_{s2}},$$
$$\deg\left(\omega_1^{a_1}\ldots\omega_{r-1}^{a_{r-1}}\omega_r^{a_r}\ldots\omega_s^{\partial_1}\omega_s^{a_s-1}\right)=a_1\partial_1^{\alpha_{11}}\partial_2^{\alpha_{12}}+\ldots+a_r\partial_1^{\alpha_{r1}+1}\partial_2^{\alpha_{r2}}+\ldots+\partial_1^{\alpha_{s1}+1}\partial_2^{\alpha_{s2}}+\ldots+\left(a_s-1\right)\partial_1^{\alpha_{s1}}\partial_2^{\alpha_{s2}},$$

Осыдан $d\left(\deg\omega\right)=\max\left\{d\left(\deg_x\omega\right),d\left(\deg_y\omega\right)\right\}=\max\left\{d\left(\partial_1^{\alpha_{11}}\partial_2^{\alpha_{12}}\right),d\left(\partial_1^{a_{r1}}\partial_2^{a_{r2}}\right),\right\}$ және де,

$$\partial_1^{\alpha_1+1}\partial_2^{a_2}\geq\partial_1^{\alpha_{11}+1}\partial_2^{\alpha_{12}},\partial_1^{\alpha_{21}+1}\partial_2^{\alpha_{r2}},\ldots,\partial_1^{\alpha_{r1}+1}\partial_2^{\alpha_{r2}},\ldots,\partial_1^{\alpha_{s1}+1}\partial_2^{\alpha_{s2}},$$

мұндағы $\partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}=\tilde{\deg}\,\omega=\max\left\{\partial_1^{\alpha_{11}}\partial_2^{\alpha_{12}},\partial_1^{\alpha_{r1}}\partial_2^{\alpha_{r2}}\right\}.$
Сондықтан, келесідей

$$\deg\omega^{\partial_1}=\partial_1^{\alpha_{11}+1}\partial_2^{\alpha_{12}}+\left(a_1-1\right)\partial_1^{\alpha_{11}}\partial_2^{\alpha_{12}}+\ldots+a_r\partial_1^{\alpha_{r1}}\partial_2^{\alpha_{r2}}+\ldots+a_s\partial_1^{\alpha_{s1}}\partial_2^{\alpha_{s2}}=\deg\omega+\partial_1^{\alpha_1+1}\partial_2^{\alpha_2}-\partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}=$$
$$=\deg\omega+\partial_1^{\alpha_1+\varepsilon_1}\partial_2^{\alpha_2+\varepsilon_2}-\partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}$$

немесе
$$\deg\omega^{\partial_1}=a_1\partial_1^{\alpha_{11}}\partial_2^{\alpha_{12}}+\ldots+\partial_1^{\alpha_{r1}+1}\partial_2^{\alpha_{r2}}+\left(a_r-1\right)\partial_1^{\alpha_{r1}}\partial_2^{\alpha_{r2}}+\ldots+a_s\partial_1^{\alpha_{s1}}\partial_2^{\alpha_{s2}}=\deg\omega+\partial_1^{\alpha_1+1}\partial_2^{\alpha_2}-\partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}=$$
$$=\deg\omega+\partial_1^{\alpha_1+\varepsilon_1}\partial_2^{\alpha_2+\varepsilon_2}-\partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}$$

Лемманың шарты бойынша орындалады.
*l* барлық мәндерінде лемманың тұжырымы дұрыс деп алайық. Онда индукциялық жағдай бойынша, біз келесіге ие боламыз

$$\deg\omega^{\partial_1^{\varepsilon1}\partial_2^{\varepsilon2}}=\deg\left(\omega^{\partial_1}\right)^{\partial_1^{\varepsilon1-1}\partial_2^{\varepsilon2}}=\deg\omega^{\partial_1}+\partial_1^{(\alpha_1+1)+\varepsilon_1-1}\partial_2^{\alpha_2+\varepsilon_2}-\partial_1^{\alpha_1+1}\partial_2^{\alpha_2}=\deg\omega+\partial_1^{\alpha_1+1}\partial_2^{\alpha_2}-$$
$$-\partial_1^{\alpha_1}\partial_1^{\alpha_2}+\partial_1^{\alpha_1+\varepsilon_1}\partial_1^{\alpha_2+\varepsilon_2}-\partial_1^{\alpha_1+1}\partial_1^{\alpha_2}=\deg\omega+\partial_1^{\alpha_1+\varepsilon_1}\partial_1^{\alpha_2+\varepsilon_2}-\partial_1^{\alpha_1}\partial_1^{\alpha_2}.$$

Салдары 1. $\omega$ (1) түріндегі сөз және $\deg\omega=\sum_{i=1}^{s}a_i\partial_1^{\alpha_{i1}}\partial_2^{\alpha_{i2}}$ болсын. Онда

$$\deg_x\omega^{\partial_1^{\varepsilon1}\partial_2^{\varepsilon2}}=\begin{cases}\deg_x\omega & \textit{егер } d\left(\deg\omega\right)=d\left(\deg_y\omega\right)\\ \deg_x\omega+\partial_1^{\alpha_1+\varepsilon_1}\partial_2^{\alpha_2+\varepsilon_2}-\partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}, & \textit{егер } d\left(\deg\omega\right)=d\left(\deg_x\omega\right)\end{cases}$$

және

$$\deg_y\omega^{\partial_1^{\varepsilon1}\partial_2^{\varepsilon2}}=\begin{cases}\deg_y\omega & \textit{егер } d\left(\deg\omega\right)=d\left(\deg_x\omega\right)\\ \deg_y\omega+\partial_1^{\alpha_1+\varepsilon_1}\partial_2^{\alpha_2+\varepsilon_2}-\partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}, & \textit{егер } d\left(\deg\omega\right)=d\left(\deg_x\omega\right)\end{cases}$$

Дәлелдемесі.
$$\omega=\omega_1^{a_1}\omega_2^{a_2}\ldots\omega_s^{a_s}=\left(x^{\partial_1^{\alpha11}\partial_2^{\alpha12}}\right)^{a_1}\ldots\left(x^{\partial_1^{\alpha(r-1)1}\partial_2^{\alpha(r-1)2}}\right)^{a_{r-1}}\left(y^{\partial_1^{\alpha_r1}\partial_2^{\alpha_r2}}\right)^{a_r}\ldots\left(y^{\partial_1^{\alpha_s1}\partial_2^{\alpha_s2}}\right)^{a_s},$$
$$\partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}=\tilde{\deg}\,\omega=\max\left\{\partial_1^{\alpha_{11}}\partial_2^{\alpha_{12}},\partial_1^{\alpha_{r1}}\partial_2^{\alpha_{r2}}\right\}.$$

Лемма бойынша,
$$\deg\omega^{\partial_1^{\varepsilon1}\partial_2^{\varepsilon2}}=\deg\omega+\partial_1^{\alpha_1+\varepsilon_1}\partial_2^{\alpha_2+\varepsilon_2}-\partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}$$

Бұдан $\deg\omega=\deg_x\omega+\deg_y\omega$ екені көрініп тұр, сондықтан
$$\deg\omega^{\partial_1^{\varepsilon1}\partial_2^{\varepsilon2}}=\deg_x\omega+\deg_y\omega+\partial_1^{\alpha_1+\varepsilon_1}\partial_2^{\alpha_2+\varepsilon_2}-\partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}$$

Осы формуладан $d\left(\deg\omega\right)=d\left(\deg_x\omega\right)$ болатыны шығады, онда $\deg_x\omega^{\partial_1^{\varepsilon1}\partial_2^{\varepsilon2}}=\deg_x\omega+\partial_1^{\alpha_1+\varepsilon_1}\partial_2^{\alpha_2+\varepsilon_2}-\partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}$, егер $d\left(\deg\omega\right)=d\left(\deg_y\omega\right)$болса, онда $\deg_x\omega^{\partial_1^{\varepsilon1}\partial_2^{\varepsilon2}}=\deg_x\omega$ болады.

$\deg_x\omega^{\partial_1^{\varepsilon1}\partial_2^{\varepsilon2}}$ үшін дәлеледеуде осыған ұқсас болады.

## **Қолдынылған әдебиеттер тізімі:**

1. Kolchin E.R. Differential algebra and algebraic groups, 1973, 243 p.