УДК 517.51

ОГРАНИЧЕННОСТЬ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ЛЕБЕГА

Мухтар Амир Мухтарулы
amir596452@gmail.com
Механико-математический факультет ЕНУ им. Л.Н.Гумилева
Магистрант 2-го курса по специальности 6М060100-Математика
Научный руководитель – Р. Ойнаров

Пусть действительная функция $K(t,u) \geq 0$ определена и непрерывна по совокупности переменных $1 < t < +\infty$, $-\infty < u < +\infty$. Пусть l_p пространство последовательностей действительных чисел $f = \{f_j\}_{j=1}^{\infty}$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{l_p} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \qquad 1 \leq p < \infty,$$

и

$$\|f\|_{l_\infty} = \sup_{j\geq 1} |f_j| \ , \ \ p = \infty.$$

Пусть $\forall i \geq 1, \forall f_j$: $0 \leq K(i, f_j) < \infty$рассмотрим дискретный оператор:

$$(Kf)_i = \sum_{j=1}^{m} K(i, f_j) \ , \qquad i \geq 1, \qquad 1 < m \leq \infty. \qquad (1)$$

Операторы, допускающие представление (1), составляют некоторый класс дискретных операторов Урысона. Критерий ограниченности одного класса интегрального оператора Урысона был рассмотрен в работе [1].

Определение 1. Оператор К: $l_p \to l_q$ называется ограниченным, если он переводит каждый ограниченный шар изl_p в ограниченное множество пространства l_q.

Основные результаты:

Теорема 1. Оператор K действует из $l_p в l_q$ и ограничен в том и только в том случае, если

$$\|K(i,C)\|_{l_q} \leq b|C|^p, \qquad (2)$$

где $m = \infty$,b – положительная постоянна не зависящая от $C \in (-1\,;+1)$.

Доказательство. Достаточность. Пусть оценка (2) справедлива, покажем ограниченность оператора (1). Пусть $\forall f \in l_p$: $\|f\|_{l_p} \leq 1$, применяя обобщенное неравенство Минковского и (2) оценим $\|Kf\|_{l_q}$:

$$\|Kf\|_{l_q} = \left\|\sum_{j=1}^{\infty} K(i,f_j)\right\|_{l_q} = \left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} K(i,f_j)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(K(i,f_j)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} = \sum_{j=1}^{\infty}\|K(i,f_j)\|_{l_q}$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} b|f_j|^p = b\|f\|_{l_p}^p < b < \infty.$$

Необходимость. Пусть K действует $l_p в l_q$ и ограничен. Тогда найдется такое положительное число b, что из неравенства $\|f\|_{l_p} \leq 1$ следует неравенство

$$\|Kf\|_{l_q} \leq b. \qquad (3)$$

Так как $0 \in l_p$ и оператор K ограничен, получаем

$$(Kf)_i = \sum_{j=1}^{\infty} K(i,0) = K(i,0)\sum_{j=1}^{\infty} 1 = K(i,0)\infty = 0,$$

Следовательно $K(i,0) = 0$, а это значит, что при С = 0 неравенство (2) справедливо.

Пусть теперь С≠0 и$\|f_0\|_{l_p} = 1$. Возьмем $f_0 = \{f_{0,j}\}_{j=1}^{\infty}$ $1 < m_1 < m_2 < \infty$,

$$f_{0,j} = \begin{cases} 0, при\ 1 \leq j \leq m_1 - 1, m_2 + 1 \leq j \\ C, при m_1 \leq j \leq m_2 \end{cases}.$$

$$\|f_0\|_{l_p} = \left(\sum_{j=1}^{\infty}|f_{0,j}|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{j=m_1}^{m_2}|C|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |C|(m_2 - m_1 + 1)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

При $\|f_0\|_{l_p} = 1(m_2 - m_1 + 1) = \frac{1}{|C|^p}$.

$$(Kf_0)_i = \sum_{j=1}^{\infty} K(i,f_{0,j}) = \sum_{j=1}^{m_1-1} K(i,f_{0,j}) + \sum_{j=m_1}^{m_2} K(i,f_{0,j}) + \sum_{j=m_2+1}^{\infty} K(i,f_{0,j}) = \sum_{j=m_1}^{m_2} K(i,C)$$

$$= K(i,C)(m_2 - m_1 + 1) = K(i,C)\frac{1}{|C|^p}.$$

$$\|Kf_0\|_{l_q} = \frac{1}{|C|^p}\|K(i,C)\|_{l_q} \leq b$$

$$\|K(i,C)\|_{l_q} \leq b|C|^p.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Оператор K действует из $l_p^m в l_q$ и ограничен в том и только в том случае, если

$$\|K(i,C)\|_{l_q} \leq b(|C|^p + 1), \qquad (4)$$

где $m < \infty$,b – положительная постоянна не зависящая от $C \in (-1\,; +1)$.

Доказательство. *Достаточность*. Пусть оценка (4) справедлива, покажем ограниченность оператора (1). Пусть $\forall f \in l_p$: $\|f\|_{l_p} \leq 1$, применяя обобщенное неравенство Минковского и (4) оценим $\|Kf\|_{l_q}$:

$$\|Kf\|_{l_q} = \left\|\sum_{j=1}^{m} K(i,f_j)\right\|_{l_q} = \left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{m} K(i,f_j)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(K(i,f_j)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} = \sum_{j=1}^{m}\|K(i,f_j)\|_{l_q}$$

$$\leq \sum_{j=1}^{m} b(|f_j|^p + 1) < b\left(\|f\|_{l_p}^p + m\right) \leq b(1 + m) < \infty$$

Необходимость. Пусть K действует $l_p^m в l_q$и ограничен:

$$(Kf)_i = \sum_{j=1}^{m} K\left(i, f_j\right)\ , i \geq 1, 1 < m < \infty,$$

тогда из (2) при $|C| \leq 1$ получим

$$\|KC\|_{l_q} = \left\|\sum_{j=1}^{m} K(i,C)\right\|_{l_q} = \left\|K(i,C)\sum_{j=1}^{m} 1\right\|_{l_q} = m\|K(i,C)\|_{l_q} \leq b,$$

$$\|K(i,C)\|_{l_q} \leq \frac{b}{m} \leq b(|C|^p + 1).$$

Теорема доказана.

Список использованных источников

1. Ойнаров Р. Критерии ограниченности, компактности одного класса интегральных операторов Урысона. Известия АН КазССР. Серия физ.-мат. наук в печати. -С. 4-43