УДК 517.956

КЕЙБІР ТОЛҚЫНДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДЕ ШЕКАРАЛЫҚ БАСҚАРУДЫ ПАЙДАЛАНУ

Умаров Мерей, Өмірбек Мерей
umarov_mo@icloud.com, omirbek.m@mail.ru
Казахстан, Нур-Султан, Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУ,
Математикалық және компьютерлік модельдеу
кафедрасының магистранттары,
Ғылыми жетекшісі – К. Сулейменов

Шекаралық басқару теориясын зерттеу және оны кері есептерге пайдалану үшін, алдымен тікелей есептерде қолданылуларын қарастырайық. Бір шеті бекітілген, ал екінші шеті бос, бірақ белгілі ұзындыққа созылған шекті сыртқы күштің әсерімен, дәл айтқанда, вертикаль жоғары немесе төмен ауытқыту арқылы шектің тербелу шарттарын және пайда болатын жағдайларды талқылаймыз.

Жұмыста біртекті емес шектің тербелуі, дәлірек айтқанда $f(t)$күші шектің бос сол жақ шетіне әсері бойынша тербелуінің динамикалық мәселесіне шекаралық басқару теориясы әдістерінің қолданылулары қарастырылады.

Мәселенің қойылуы. Алғашқы тыныштықтағы шек бірлік күшпен созылған күйде және оның ұзындығы $L<\infty$ тең, ал оның тығыздығы $\rho=\rho(x)$ оң және дифференциялданатын айнымалы функция. ρ

Осы мәселені сипаттайтын тікелей есеп келесі жүйеге келтіріледі:

$$\rho(x)u_{tt}-u_{xx}=0,0<x<L,0<t<T\,, \tag{1}$$

$$u(x,0)=u_t(x,0)=0, \tag{2}$$

$$u(0,t)=f(t). \tag{3}$$

Осы жүйенің шешімі (толқын) $u=u^f(x,t)$ шектің шекаралық $f(t)$ күштің, басқаша айтқанда басқарудың әсері бойынша бастапқы күйінен вертикаль ауытқуын сипаттайды.

$f(t)$ функциясы $t<0$ үшін $f=0$ тарқылы жалғастырылған деп есептейміз.

Теорема. Кез келген $f \in C^2[0,T]$ үшін $f(0)=f'(0)=f''(0)=0$ шарттарын қанағаттандыратын (1)-(3) есебінің жалғыз классикалық u^f шешімі бар болады және ол келесі түрде анықталады

$$u^f(x,t)=\left[\frac{\rho(x)}{\rho(0)}\right]^{-\frac{1}{4}} f(t-\tau(x))+\int_x^{x(t)} w(x,s)f(t-\tau(x))ds, \tag{4}$$

мұнда $(x \geq 0,\ 0 \leq t \leq T)$ облыс және $w(x,s)$ ядро $\{(x,s)\,|\,0 \leq \tau(x) \leq s \leq T\}$ облысында екі рет үзіліссіз дифференциялданатын және $w(0,s)=0,\ \ 0 \leq s \leq T$ шарын қанағаттандыратын функция.

$$\widetilde{u}^f(\tau,t) := \rho^{-\frac{1}{4}}(0)(Iu^f(\cdot,t))(\tau)=\left[\frac{\rho(x(\tau))}{\rho(0)}\right]^{\frac{1}{4}} u^f(x(\tau),t)$$

функциясы

$$q(\tau)=\frac{1}{4}\cdot\frac{\rho''(x(\tau))}{\rho^2(x(\tau))}-\frac{5}{16}\cdot\frac{[\rho'(x(\tau))]}{\rho^3(x(\tau))}$$

теңдігі орындалғанда келесі жүйенің шешімі болатынын көрсетуге болады.

$$\widetilde{u}_{tt}-\widetilde{u}_{\tau\tau}+q(\tau)\widetilde{u}=0, \tau>0, 0<t<T, \tag{5}$$

$$\widetilde{u}\,|_{t=0}=\widetilde{u}_t\,|_{t=0}=0, \qquad \tau \geq 0, \tag{6}$$

$$\widetilde{u}\,|_{t=0}=f, \quad t\in[0,T]. \tag{7}$$

Шешімді келесі түрде іздейміз:

$$\widetilde{u}^f(\tau,t)=f(t-\tau)+\int_\tau^t \widetilde{w}(\tau,s)f(t-s)ds \tag{8}$$

(5) – (7) есептерінің шешімі белгісіз ядро арқылы анықталғандықтан, (5) теңдігін, екінші ретті үзіліссіз дифференциалданантын $\omega(x,s)$ функциясына көбейтеміз және $[0,T]$ аралығында интегралдаймыз. Интегралдың $\widetilde{u}_{tt}-\widetilde{u}_{xx}$ өрнегіне сәйкес бөлігіне бөліктеп интегралдауды, $f(0)=f'(0)=f''(0)=0$ теңдіктерін және (6) пайдаланғанда Гурса есебіне келеміз.

$$\widetilde{w}_{ss}-\widetilde{w}_{\tau\tau}+q(\tau)\widetilde{w}=0, \tag{9}$$

$$\widetilde{w}\,|_{\tau=0}=0, \widetilde{w}\,|_{\tau=s}=-\frac{1}{2}\int_0^s q(\eta)d\eta, \tag{10}$$

мұнда $\theta^T=\{(\tau,s):\ 0<\tau<s<T\}$.

(9) – (10) есебі төмендегі әдіс арқылы Вольтерра типтес теңдеуге келтіріледі. Расында,

$$y(\tau,s) := \widetilde{w}(\tau,s)+\frac{1}{2}\int_{\frac{s-\tau}{2}}^{\frac{s+\tau}{2}} q(\eta)d\eta \tag{11}$$

функциясы $\theta^T = \{(\tau, s): 0 < \tau < s < T\}$ облысында

$$y_{ss} - y_{\tau\tau} = G, \tag{12}$$

$$y\big|_{\tau=0} = 0, \quad y\big|_{\tau=s} = 0, \tag{13}$$

есебінің шешімі болып табылады. Мұнда $G = G(\tau, s) := -q(\tau)\,y(\tau, s) + q(\tau)F(\tau, s)$, ал $F(\tau, s)$ (11) теңдігіндегі интегралдық мүше.

Соңында, (12) есебі берілген (13) шарттарымен Даламбер формуласы арқылы шешіледі:

$$y(\tau, s) = (MG)(\tau, s) := \iint G(\tau', s')\,d\tau' ds', (\tau, s) \in \Theta^T \tag{14}$$

мұнда $M^{(\tau,s)}$ төбелері (τ, s), $(0, s-\tau)$, $(\frac{s-\tau}{2}, \frac{s-\tau}{2})$, $(\frac{s+\tau}{2}, \frac{s+\tau}{2})$ нүктелері арқылы анықталған тік төртбұрыш.

Сонымен, (14) теңдігін шарттары (13) болатын (12) есебіне қолданып, (12) есебі берілген (13) шарттарымен Вольтерра типтес есепке келтіріледі:

$$y + M(qy) = M(qF)\,.$$

Әрине, негізгі толқындық есеп (1) өзінің алғашқы-шекаралық шарттарымен (2)-(3) беріледі, ал (5) есеп, оның алғашқы-шекаралық шарттарымен (6)-(7) жеке маңызды есеп болып табылады, біздің қарастыруымызда шекаралық әсер ететін басқару $f(t)$ функциясының әсерін талқылау.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі

1. М. И. Белишев, Т. Л. Шеронова, Методы теории граничного управления в нестационарной обратной задаче для неоднородной струны, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1990, том 186, 37–49

2. М.И. Белишев, Граничное управление и обратные задачи: одномерный вариант BC-метода, *Зап. науч. сем. ПОМИ,* 2008, том 354, 19-80