УДК 517.51

ОЦЕНКА НОРМ НЕКОТОРЫХ МАТРИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Сламбетов Асет
qwe_rty0010@mail.ru
Механико-математический факультет ЕНУ им. Л.Н.Гумилева
Студент 4-го курса по специальности 5В060100-Математика
Научный руководитель – А. Темирханова

Пусть $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ и $w = \{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ - последовательность неотрицательных действительных чисел. Через $l_p(w)$ обозначим весовое пространство последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, где норма определяется следующим образом:

$$\|x\|_{l_p(w)} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Пусть $c = (c_{n,k})$ – матрица Чезаро которая определяется

$$c_{n,k} = \begin{cases} \frac{1}{n} \textit{при } \ 1 \le k \le n, \\ \ 0 \quad \textit{при} k > n. \end{cases}$$

Через $c_p(w)$ обозначим весовое пространство последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$для которых верно $Cx \in l_p(w)$ т.е.

$$c_p(w) = \left\{x_n \in l_p(w) : \ \sum_{n=1}^{\infty} w_n \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right|^p < \infty\right\},$$

называется весовым пространством Чезаро и норма определяется следующим образом

$$\|x\|_{c_p(w)} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} w_n \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Рассмотрим нижнетреугольную матрицу $A = (a_{n,k})$ с неотрицательными элементами. В работе [1] были получены верхние и нижние оценки нормы оператора A действующего из $l_p(w)$ в $c_p(w)$.

Теорема 1. [1] *Пусть $p > 1$ и $w = w_n$ последовательность $w_n \ge w_{n+1}$ и $w_n \ge 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Если $A = (a_{n,k})$ нижнетриугольная матрица с неотрициательными элементами, тогда верно.*

1) $\|A\|_{l_p(w)\to c_p(w)} \le p'M_A$. Кроме того, если $M_A < \infty$, тогда A есть ограниченный матричный оператор из $l_p(w)$ в $c_p(w)$,

2) Если$\sum \frac{w_n}{n}$ расходится и $\frac{w_n}{w_{n+1}}$убывает, то $\|A\|_{l_p(w)\to c_p(w)} \ge p'm_A$,

где

$$M_A = sup\left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{n-k+1}{n}\left(\sum_{i=k}^{n} a_{i,k} - \sum_{i=k-1}^{n} a_{i,k}\right)^{+}\right\},$$

$$m_A = \sup_{N\ge1}\inf_{n\ge N}\left\{\sum_{i=N}^{n} a_{i,N} + \frac{1}{n-N+1}\sum_{k=N+1}^{n}(n-k+1)\left(\sum_{i=k}^{n} a_{i,k} - \sum_{i=k-1}^{n} a_{i,k-1}\right)^{-}\right\},$$

$$(\xi)^{+} = \max(0,\xi), (\xi)^{-} = \min(0,\xi).$$

Целью данной работы является рассмотреть примеры различных суммируемых матриц и оценить их нормы. Для этого сначала приведем некоторые следствия, вытекающие из теоремы 1.

Следствие 1._Пусть $p > 1$ и $A = (a_{n,k})$– нижнетреугольная матрица такая, что_

$$\textstyle\sum_{i=k-1}^{n} a_{i,k-1} \leq \sum_{i=k}^{n} a_{i,k} \tag{1}$$

для $1 \leq k \leq n$. Тогда

$$\|A\|_{l_p(w)\to c_p(w)} = p' \sup_{n\geq 1} a_{n,n} \tag{2}$$

<u>_Доказательство_</u>. Так как в силу (1)

$$\left(\sum_{i=k}^{n} a_{i,k} - \sum_{i=k-1}^{n} a_{i,k-1}\right)^{+} = \sum_{i=k}^{n} a_{i,k} - \sum_{i=k-1}^{n} a_{i,k-1}$$

для $1 \leq k \leq n$. Следовательно

$$M_A = \sup_{n\geq 1}\left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{n-k+1}{n}\left(\sum_{i=k}^{n} a_{i,k} - \sum_{i=k-1}^{n} a_{i,k-1}\right)\right\} = \sup_{n\geq 1}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k}^{n} a_{i,k} \leq \sup_{n\geq 1} a_{n,n}.$$

Кроме того,

$$\left(\sum_{i=k}^{n} a_{i,k} - \sum_{i=k-1}^{n} a_{i,k-1}\right)^{-} = 0 \quad (1 \leq k \leq n)$$

и

$$m_A = \sup_{N\geq 1}\inf_{n\geq N}\sum_{i=N}^{n} a_{i,N} = \sup_{n\geq 1} a_{n,n}.$$

Следовательно, согласно теореме 1, получаем (2).

Пример 1.Пусть $A = \left(a_{n,k}\right)$определяется следующим образом

$$\begin{cases} \dfrac{1}{n^2} при k < n, \\ \dfrac{2n-1}{n} при k = n, \\ 0 \qquad при k > n. \end{cases}$$

Поскольку конечная последовательность $\left(\sum_{i=k}^{n} a_{i,k}\right)_{k=1}^{n}$увеличивается при каждом nи $\sup_{n\geq 1} a_{n,n} = 2$, по следствию 1 , мы имеем $\|A\|_{l_p(w)\to c_p(w)} = 2p'$.

Следствие 2._Пусть $p > 1$ и $A = (a_{n,k})$ нижнетреугольная матрица для которой верно_

$$\sum_{i=k-1}^{n} a_{i,k-1} \geq \sum_{i=k}^{n} a_{i,k} для \;\; 1 < k < n.$$

Тогда

$$p'\left(\inf_{n\geq 1}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k}^{n} a_{i,k}\right) \leq \|A\|_{l_p(w)\to c_p(w)} \leq p'\left(\sup_{n\geq 1}\sum_{i=1}^{n} a_{i,1}\right)$$

В частности, для суммируемых матриц левая часть неравенства сводится к p'. Кроме того, если правая часть неравенства конечна, тогда A ограниченный матричный оператор из$l_p(w) \to c_p(w)$

Пример 2.Пусть $\alpha \geq 2$ и матрица $A = (a_{n,k})$определяется следующим образом

$$a_{n,k}=\begin{cases}\dfrac{1}{n^{\alpha}} при n\geq k,\\ 0 \quad при n<k.\end{cases}$$

Так как $\sum_{i=k}^{n}a_{i,k}=\sum_{i=k}^{n}\frac{1}{i^{\alpha}}$и$\sum_{i=k-1}^{n}a_{i,k-1}\geq\sum_{i=k}^{n}a_{i,k}$ для $1<k\leq n$мы имеем

$$0\leq\|A\|_{l_p(w)\to c_p(w)}\leq p'\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^{\alpha}}.,$$

Определение 1.Пусть задана матрица $A=(a_{n,k})$ $n,\ k\in\mathbb{N}$,она называется суммируемой, если$\sum_{k=1}^{\infty}\left|a_{n,k}\right|<\infty$ для всех $n\in\mathbb{N}$.

Рассмотрим суммируемые матрицы Нёрлунда-N_a и средневзвешенная матрица- M_a.

Пусть a_nнеотрицательная последовательность, и $A=a_1+a_2+\cdots a_n$.Матрица Нёрлунда $N_a=(a_{n,k})$определяется следующим образом:

$$a_{n,k}=\begin{cases}\dfrac{a_{n-k+1}}{A_n} при\ 1\leq k\leq n,\\ \quad 0 \quad при k>n.\end{cases}$$

Средневзвешенная матрица $M_a=\left(a_{n,k}\right)$ определяется

$$a_{n,k}=\begin{cases}\dfrac{a_k}{A_n} при 1\leq k\leq n,\\ \quad 0 \quad при k>n.\end{cases}$$

Следствие 3. *Пусть* $p>1$*и* $N_a=\left(a_{n,k}\right)$ *есть матрица Нёрлунда, а* (a_n) *возрастающая последовательность. Тогда*

$$p^{'}\leq\|N_a\|_{l_p(w)\to c_p(w)}\leq p^{'}\left(\sup_{n\geq 1}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{A_i}\right) \tag{3}$$

Доказательство. Покажем, что

$$\sum_{i=k-1}^{n}a_{i,k-1}\geq\sum_{i=k}^{n}a_{i,k} для \ \ 1<k<n.$$

$$\sum_{i=k-1}^{n}a_{i,k-1}=\sum_{i=k-1}^{n}\frac{a_{i-k+2}}{A_i}=\sum_{i=k}^{n+1}\frac{a_{i-k+1}}{A_{i-1}}\geq\sum_{i=k}^{n}\frac{a_{i-k+1}}{A_i}=\sum_{i=k}^{n}a_{i,k}.$$

Тогда по следствию 2 верно

$$p'\left(\inf_{n\geq 1}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k}^{n}a_{i,k}\right)\leq\|N_a\|_{l_p(w)\to c_p(w)}\leq p'\left(\sup_{n\geq 1}\sum_{i=1}^{n}a_{i,1}\right),$$

где

$$\sum_{i=1}^{n}a_{i,1}=\sum_{i-1}^{n}\frac{a_i}{A_i}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k}^{n}a_{i,k}&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_1}{A_k}+\frac{a_2}{A_{k+1}}+\cdots+\frac{a_{n-k+1}}{A_n}\right)\\ &=\frac{a_1}{A_1}+\frac{a_2}{A_2}+\cdots+\frac{a_n}{A_n}\\ &+\frac{a_1}{A_2}+\frac{a_2}{A_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{A_n}\\ &+\cdots+\frac{a_1}{A_n}=n\end{aligned}$$

Тогда

$$\inf_{n\geq 1}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k}^{n}a_{i,k}=1$$

Следовательно, мы по получили (3).

Следствие 4. *Пусть* $p>1$*а* $M_a=(a_{n,k})$ *средневзвешенная матрица и* a_n*убывающая последовательность. Тогда*

$$p'\leq\|M_a\|_{l_p(w)\to c_p(w)}\leq p'a_1\left(\sup_{n\geq 1}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{A_i}\right)\qquad(4)$$

Доказательство. Так как a_nубывающая последовательность, то верно

$$\sum_{i=k-1}^{n}a_{i,k-1}=a_{k-1}\sum_{i=k-1}^{n}\frac{1}{A_i}\geq a_k\sum_{i=k}^{n}\frac{1}{A_i}=\sum_{i=k}^{n}a_{i,k}.$$

Тогда по следствию 2 выполняется

$$p'\left(\inf_{n\geq 1}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k}^{n}a_{i,k}\right)\leq\|M_a\|_{l_p(w)\to c_p(w)}\leq p'\left(\sup_{n\geq 1}\sum_{i=1}^{n}a_{i,1}\right).$$

Так как

$$\inf_{n\geq 1}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k}^{n}a_{i,k=}$$

$$=\inf_{n\geq 1}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\sum_{i=k}^{n}\frac{1}{A_i}=\inf_{n\geq 1}\frac{1}{n}\left[a_1\left(\frac{1}{A_1}+\cdots+\frac{1}{A_n}\right)+a_2\left(\frac{1}{A_2}+\cdots\frac{1}{A_n}\right)+\cdots+a_n\frac{1}{A_n}\right]$$

$$=\inf_{n\geq 1}\frac{n}{n}=1$$

и$\sum_{i=1}^{n}a_{i,1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_1}{A_i}$, мы получаем (4).

Список использованных источников

1. Davoud F. Hadi R. Bounds for the norm of lower triangular matrices on the Cesaro weighted sequence space // Journal of Inequalities and Applications–2017. –C. 1-11