УДК 517.5

ОЦЕНКИ НОРМЫ ОПЕРАТОРА СВЕРТКИ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И ПРОБЛЕМА МНОЖИТЕЛЕЙ ФУРЬЕ

Бахыт Амангуль
amangulbakhyt@gmail.com
докторант ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
Научный руководитель – Н.Т. Тлеуханова

Постановка тригонометрической проблемы множителей заключается в следующем: пусть$f \in L_1[0,2\pi]$ и $\{a_k(f)\}$ ее последовательность коэффициентов Фурье по тригонометрической системе. При этом предпологается, что f обладает свойстами, достаточными, чтобы $\{a_k(f)\} \in l_p, 1 \leq p \leq \infty$. Требуется определить гладкостные и метрические характеристики функции φдля того, чтобы $T_\varphi f = \{a_k(f \cdot \varphi)\} \in l_p$, то есть определить условия на функцию φ, гарантирующие ограниченность оператора $T_\varphi : l_p \to l_p$.Класс таких функций обозначается черезM_p.

Эта задача рассматривалась в работах Стечкина С.Б. [1] и Хиршмана И.И. [2]. Результаты были получены в терминах пространств Гельдера и ограниченной β-вариации, а именно: Стечкина С.Б. показал, что $V_1 \hookrightarrow M_p,\ 1 < p < \infty$ Хиршманом И.И. полученно $C^\alpha \hookrightarrow M_p$ при $0 < \alpha \leq \frac{1}{2},\ \left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right| < \alpha$ и $V_\beta^\alpha \hookrightarrow M_p$при $\beta \geq 2,\ \alpha > 0,\ \left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{\beta}$.

Распространение на многомерный случай этих утверждений сделал Эдельштейна С.Л. [3] в 1977 году. Дальнейшее развитие данная тема получила в работах Бирмана М.Ш. и Соломяка М.З. [4] в терминах пространтв Соболева:

$1 < p < 2,$

$$W_r^\alpha[0,1] \hookrightarrow M_p, \qquad \alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{2}.$$

Эти результаты были усиленны Караджововым Г.Е. [5] с помощью классов Бесова.

Целью настоящей работы было изучение классов множителей в весовых пространствах. Введем весовое пространство последовательностей

$$\lambda_{pq} = \left\{ \xi = \{\xi\}_{k=-\infty}^{\infty} : \|\xi\|_{\lambda_{pq}} = \left(\sum_k |\xi_k|^q \left|\bar{k}\right|^{\frac{q}{p}-1} \right)^{\frac{1}{q}} \right\} < \infty,$$

где $\bar{k} = \max(|k|, 1)$.

Пусть $f \in L_1[0,1]$ и $a = \{a_k(f)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ ее последовательность коэффициентов Фурье по тригонометрической системе. Рассмотрим отображение $T_\varphi : \{a_k(f)\} \to \{a_k(f \cdot \varphi)\}$, где $\{a_k(f \cdot \varphi)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ коэффициенты Фурье функции $f \cdot \varphi$.

Будем говорить, что функция φ принадлежит пространству $M^{p_1,q_1}_{p_0,q_0}$, если линейный оператор T_φдействует ограниченно пространства λ_{p_0,q_0} в λ_{p_1,q_1} и

$$\left\|T_\varphi a\right\|_{\lambda_{p_0,q_0}\to\lambda_{p_1,q_1}} \leq c\|a\|_{M^{p_1,q_1}_{p_0,q_0}}.$$

Изучаются вложение известных функциональных пространств в классы множителей $M^{p_1,q_1}_{p_0,q_0}$.

Пусть $0 < q, p < \infty$. Будем говорить, что последовательность $a = \{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ принадлежит классу $\lambda_{p,q}$, если конечна величина:

$$\|a\|_{\lambda_{p,q}} = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^q \left|\bar{k}\right|^{\left(\frac{q}{p}-1\right)}\right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

где $\bar{k} = \max(|k|, 1)$.

Если $q = \infty$, то

$$\|a\|_{\lambda_{p,\infty}} = sup|a_k|\left|\bar{k}\right|^{\frac{1}{p}}.$$

Лемма 1. Для того, чтобы имело место вложение:

$$\lambda_{p_0,q_0} \hookrightarrow \lambda_{p_1,q_1}$$

необходима и достаточна, чтобы выполнялось следующее соотношение параметров:
при $q_0 \leq q_1, \frac{1}{q_0} - \frac{1}{q_1} \leq \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}$,
при $q_1 < q_0, \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1} > 0$.

Лемма 2. Пусть $0 < p_0, q_0, p_1, q_1 < \infty$, $0 < \theta < 1$, тогда

$$\left(\lambda_{p_0,q_0}, \lambda_{p_1,q_1}\right)_{\theta_q} = \lambda_{pq}, \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1},\ \ \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}.$$

Лемма 3.Пространство $\left(\lambda_{pq}\right)^*$изоморфно пространству

$$\lambda_{p'q'},$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.$$

Лемма 4.Пусть $1 < r, p, q < \infty$, $\frac{1}{q} + 1 = \frac{1}{r} + \frac{1}{p}$.

Тогда выполнено неравенство:

$$\|a * b\|_{\lambda_{q\infty}} \leq \mathrm{c}\|a\|_{\lambda_{r\infty}}\|b\|_{\lambda_{p\infty}}.$$

Доказательство: Из определения и несложных преобразований имеем, что

$$\|a * b\|_{\lambda_{q\infty}} = \sup_k \left|\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m b_{m+k}\right)\right| \left|\bar{k}\right|^{\frac{1}{q}} \leq \sup_m |a_m||\bar{m}|^{\frac{1}{r}} \sup_k \sum_{m=-\infty}^{\infty} |b_{m+k}|\, |\bar{m}|^{-\frac{1}{r}}\left|\bar{k}\right|^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \|a\|_{\lambda_{r\infty}} \sup_k \left|\bar{k}\right|^{\frac{1}{q}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |b_m|\, \left|\bar{m} - \bar{k}\right|^{-\frac{1}{r}} \leq \|a\|_{\lambda_{r\infty}}\|b\|_{\lambda_{p\infty}} \sup_k \left|\bar{k}\right|^{\frac{1}{q}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left|\bar{m} - \bar{k}\right|^{-\frac{1}{r}} |\bar{m}|^{-\frac{1}{p}}.$$

Рассмотрим последнюю сумму и покажем, что она эквивалентна при $\bar{k} \neq \bar{0}$

$$\int_{\mathbb{R}^1} \frac{dx}{|x-k|^{\frac{1}{r}}|x|^{\frac{1}{p}}}.$$

Действительно

$$\int_{\mathbb{R}^1} \frac{dx}{|x-k|^{\frac{1}{r}}|x|^{\frac{1}{p}}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_m^{m+1} \frac{dx}{|x-k|^{\frac{1}{r}}|x|^{\frac{1}{p}}}.$$

Так как $k \in \mathbb{Z}$,то функция $\frac{dx}{|x-k|^{\frac{1}{r}}|x|^{\frac{1}{p}}}$ на сегменте $p_m = [m, m+1]$монотонна по каждой переменной, следовательно имеет место следующие оценки:

при $m \neq k, m \neq k-1, m \neq 0, m \neq -1$

$$\frac{1}{|\xi'|^{\frac{1}{r}}|\eta'|^{\frac{1}{p}}} \le \int\limits_{p_m} \frac{dx}{|x-k|^{\frac{1}{r}}|x|^{\frac{1}{p}}} \le \frac{1}{|\xi''|^{\frac{1}{r}}|\eta|^{\frac{1}{p}}},$$
где $\xi', \xi'', \eta', \eta''$вектора с соответствующими координатами:
$\xi_i' = max(|m-k|, |m+1-k|)$,
$\eta_i' = max(|m|, |m+1|)$,
$\xi_i'' = min(|m-k|, |m+1-k|)$,
$\eta_i'' = min(|m|, |m+1|)$.
В случае $m = k$ либо $m = k-1$

$$\frac{c_1}{|\eta'|^{\frac{1}{p}}} \le \int\limits_{p_m} \frac{dx}{|x-k|^{\frac{1}{r}}|x|^{\frac{1}{p}}} \le \frac{c_1}{|\eta''|^{\frac{1}{p}}},$$
где $c_1 = \int_{p_m} \frac{dx}{|x-m|^{\frac{1}{r}}}$ либо $c_1 = \int_{p_m} \frac{dx}{|x-m-1|^{\frac{1}{r}}}$.
И аналогично, когда $m = 0$ либо $m = -1$

$$\frac{c_2}{|\xi'|^{\frac{1}{r}}} \le \int\limits_{p_m} \frac{dx}{|x-k|^{\frac{1}{r}}|x|^{\frac{1}{p}}} \le \frac{c_2}{|\xi''|^{\frac{1}{r}}},$$
где $c_2 = \int_{p_m} \frac{dx}{|x|^{\frac{1}{p}}}$ либо $c_2 = \int_{p_m} \frac{dx}{|x-1|^{\frac{1}{p}}}$.
И далее используется эквивалентность величин $\frac{1}{|\xi'|}, \frac{1}{|\xi''|}, \frac{1}{|\eta'|}, \frac{1}{|\eta''|}$с величинами $\frac{1}{|m-k|+1}, \frac{1}{|m|+1}$.

Таким образом, учитывая, что $\frac{1}{p}, \frac{1}{r} < 1$ и$\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1\left(\frac{1}{q}+1\right) > 1$имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{dx}{|x-k|^{\frac{1}{r}}|x|^{\frac{1}{p}}} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{|x-k|^{\frac{1}{r}}|x|^{\frac{1}{p}}} = |\bar{k}|^{\left(-\frac{1}{r}-\frac{1}{p}+1\right)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left|\frac{x}{|k|} - \frac{k}{|k|}\right|^{\frac{1}{r}} \left|\frac{x}{|k|}\right|^{\frac{1}{p}}} =$$

$$= |\bar{k}|^{\left(-\frac{1}{r}-\frac{1}{p}+1\right)} \int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{dx}{|y-y_0|^{\frac{1}{r}}|y|^{\frac{1}{p}}} = |\bar{k}|^{\left(-\frac{1}{r}-\frac{1}{p}+1\right)} \cdot C,$$
где $C = \int_{\mathbb{R}^1} \frac{dx}{|y-y_0|^{\frac{1}{r}}|y|^{\frac{1}{p}}}$не зависит от k,так как точка $y_0 = \frac{k}{|k|}$лежит на единичной сфере при любом $k = 0$,а значение интеграла от данной функции не зависит от положения точки y_0 на сфере. И, наконец, принимая во внимание $-\frac{1}{r} - \frac{1}{p} + 1 = -\frac{1}{q}$ имеем
$$\|a * b\|_{\lambda_{q\infty}} \le \mathrm{c}\|a\|_{\lambda_{r\infty}} \|b\|_{\lambda_{p\infty}}.$$
Лемма 5. Пусть $1 < r, p, q < \infty$, $\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} = 1$ и $\frac{1}{q} + 1 = \frac{1}{r} + \frac{1}{p}$.
Тогда имеет место следующее неравенство
$$\|a * b\|_{\lambda_{q1}} \le \mathrm{c}\|a\|_{\lambda_{rt}} \|b\|_{\lambda_{rt'}}.$$
Лемма 6. Пусть $1 < r, p, q < \infty$, $0 < s \le \infty$, $\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} = \frac{1}{s}$ и $\frac{1}{q} + \frac{1}{s} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$.
Тогда имеет место следующее неравенство
$$\|a * b\|_{\lambda_{qs}} \le \mathrm{c}\|a\|_{\lambda_{r_1 t_1}} \|b\|_{\lambda_{r_2 t_2}}.$$
Теорема 1. Пусть $1 < p_0 < 2 < p_1$, $\le p_1$, $p_0 \le q_0$, $0 < s, q_0, q_1 < \infty$,
$\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1} < \frac{1}{2}$, $\quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}$, $\quad \frac{1}{s} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_0}$.
Тогда имеет место вложение
$$L_{rs}[0,1] \hookrightarrow M_{p_0,q_0}^{p_1,q_1}.$$
Теорема 2. Пусть $1 < p_0 \le q_0 \le q_1 \le p_1 < 2$, $1 < s, q_0, q_1 < \infty$,

$$\alpha = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{p_0} - \frac{1}{2}, \qquad 1 - \frac{1}{s} = \frac{1}{q_0} - \frac{1}{q_1}.$$

Тогда справедливо следующее вложение

$$B_{rs}^{\alpha}[0,1] \hookrightarrow M_{p_0,q_0}^{p_1,q_1}.$$

Список использованных источников

1. Стечкин С.Б. О билинейных формах // ДАН СССР.-71.- №3.- 1950, С.237–240.
2. I.I. Hirshman On multiplier transformations // Duke Math. J., 26.-№2.- 1959, С.221-242.
3. Эдельштейн С.Л. Ограниченность свертки в $L_p(Z_m)$ и гладкость символе оператора // Мат. Заметки, 22.- №6, 1977, С. 873-884.
4. Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Количественный анализ в теоремах вложения Соболева приложение к спектральной теории. -В: X мат. школа, Киев, 1974, С. 5–189.
5. Караджов Г.Е. Тригонометрические проблема множителей // Конструктивная теория функций'81 София, 1983, С. 82–86.