ӘОЖ 514.5.087

«ЛОБАЧЕВСКИЙ ЖАЗЫҚТЫҒЫНДАҒЫ ҮШБҰРЫШТАР МЕН ТӨРТБҰРЫШТАР ТУРАЛЫ»

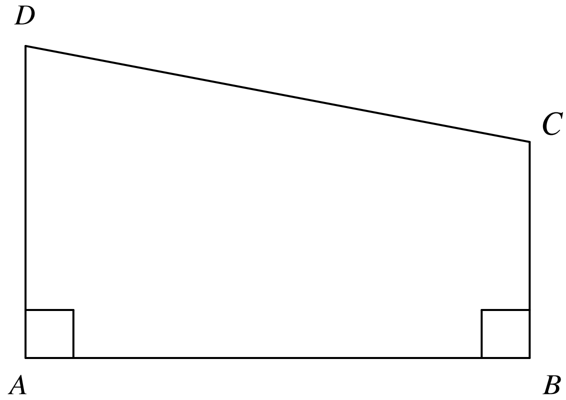
Сағынова Ардақ Әділбекқызы
ardak.sagynova@mail.ru
Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ-нің механика-математика факультетінің, математика (5В010900)мамандығының 3-курс студенті
Ғылыми жетекші: Туканаев .Т.Д.

Евклидтік геометрия абсолюттік геометрия аксиомаларымен бірге евклидттік аксиоманы қолдану негізінде құралған. Ал Лобачевский геометриясы (басқаша айтқанда гиперболалық геометрия) абсолюттық геометрия аксиомалары және Лобачевский аксиомасы негізінде құралады [1].

Лобачевский жазықтығында үшбұрыштарды, төртбұрыштарды қарастыруға болады [2]. Мұнда төртбұрыштардың бұрыштарының қосындысы 4d – дан кіші болады [3],[4].

Төртбұрыштардың ішінде арнайы қарастырылатын төртбұрыштар: екітікбұрыш, үштікбұрыш, тең бүйірлі төртбұрыш, гиперболалық параллелограмм, гиперболалық ромб [5].

Екітікбұрыш деп – бір қабырғасына (табанына) тиісті екі бұрышы тік болатын дөңес төртбұрышты айтамыз.



Бүйір қабырғалары тең екітікбұрыш Саккери төртбұрышы деп аталады. Үшбұрыштардың тең болу белгілері сияқты екітікбұрыштардың тең болу белгілері де бар.

III_4 аксиома[1: 9]. Егер беттестіруде AB кесіндінің шеттері $A^/B^/$ кесіндінің шеттеріне бейнеленсе, онда AB кесіндісі $A^/B^/$ кесіндісіне бейнеленеді.

III_6 аксиома. Егер hk жазынқы емес бұрыш болса және $\angle hk = \angle h^/k^/$, онда h сәулесін $h^/$ сәулесіне ауыстыратын, ал k сәулесін $k^/$ сәулесіне ауыстыратын беттестіру табылады.

Енді жаңа тұжырымдарды келтірейік.

Тұжырым 1. Қабырғалары $BC = a, CA = b$ және бұрыштары $\widehat{A} = \alpha, \widehat{B} = \beta, \widehat{C} = \gamma$ болатын кез келген ABC үшбұрышы берілген. Осы үшбұрыш үшін келесі қатынас орындалады $ch\dfrac{a}{k}\cdot\sin\beta = ch\dfrac{b}{k}\cdot\sin\alpha\cdot\cos\gamma + \cos\alpha\cdot\sin\gamma$.

Дәлелдеу. Синустар теоремасы бойынша $sh\frac{c}{k} = sh\frac{b}{k}\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$ [1: 402]. Осы мәнді косинустар теоремасының [1: 400] $ch\frac{a}{k} = ch\frac{b}{k}\cdot ch\frac{c}{k} - sh\frac{b}{k}\cdot sh\frac{c}{k}\cdot\cos\alpha$

формуласына қоямыз. Сонда $ch\frac{a}{k} = ch\frac{b}{k}ch\frac{c}{k} - sh\frac{b}{k}sh\frac{b}{k}\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\cos\alpha$ теңдік пайда болады. Енді осы теңдіктің екі жағын $\sin\beta$ мәніне көбейтіп

$$ch\frac{a}{k}\sin\beta = ch\frac{b}{k}ch\frac{c}{k}\sin\beta - sh^2\frac{b}{k}\cos\alpha\sin\gamma$$

теңдікке келеміз. Қосинустар теоремасын $ch\frac{c}{k} = ch\frac{a}{k}\cdot ch\frac{b}{k} - sh\frac{a}{k}\cdot sh\frac{b}{k}\cdot\cos\gamma$

түрінде жазайық. Онда синустар теоремасынан $sh\frac{a}{k} = sh\frac{b}{k}\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ қатынасты осы формулаға қою арқылы келесі формуланы аламыз $ch\frac{c}{k} = ch\frac{a}{k}ch\frac{b}{k} - sh^2\frac{b}{k}\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cos\gamma$.

Бұл мәнді жоғарыда осы сияқты шыққан теңдікке койғанда келесі теңдік шығады

$$ch\frac{a}{k}\sin\beta = ch\frac{b}{k}(ch\frac{a}{k}ch\frac{b}{k} - sh^2\frac{b}{k}\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cos\gamma)\sin\beta - sh^2\frac{b}{k}\sin\gamma\cos\alpha .$$

Жақшаны ашамыз, сонда $ch\frac{a}{k}\sin\beta = ch^2\frac{b}{k}ch\frac{a}{k}\sin\beta - ch\frac{b}{k}sh^2\frac{b}{k}\sin\alpha\cos\gamma - sh^2\frac{b}{k}\sin\gamma\cos\alpha$.

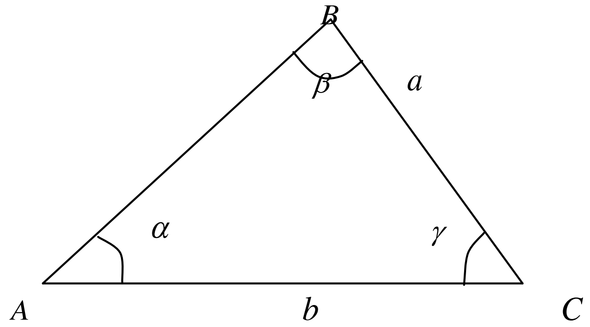
Осыдан $ch\frac{a}{k}\sin\beta(ch^2\frac{b}{k} - 1) = sh^2\frac{b}{k}(ch\frac{b}{k}\sin\alpha\cos\gamma + \sin\gamma\cos\alpha)$ шығады.

Енді $ch^2\frac{b}{k} - 1 = sh^2\frac{b}{k}$ болғандықтан ізделінді формуланы шығаруға болады $ch\frac{a}{k}\sin\beta = ch\frac{b}{k}\sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma$.

Тұжырым 2. Бір қабырғасы $BC = a$ және бұрыштары $\widehat{A} = \alpha, \widehat{B} = \beta, \widehat{C} = \gamma$ болатын кез келген *ABC* үшбұрышы берілген. Осы үшбұрыш үшін келесі қатынас орындалады

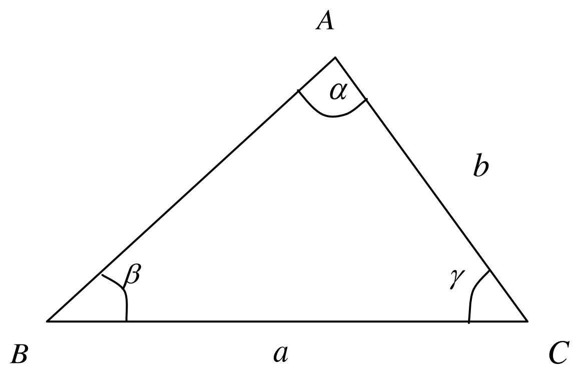
$$\cos\alpha = ch\frac{a}{k}\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma - \cos\beta\cdot\cos\gamma$$

Дәлелдеу. Жоғарыда дәлелденген тұжырым бойынша:



$$ch\frac{a}{k}\cdot\sin\beta = ch\frac{b}{k}\cdot\sin\alpha\cdot\cos\gamma + \cos\alpha\cdot\sin\gamma$$

және



$$ch\frac{b}{k}\cdot\sin\alpha = ch\frac{a}{k}\cdot\sin\beta\cdot\cos\gamma + \cos\beta\cdot\sin\gamma$$

Екінші теңдікті бірінші теңдікке койғанда

$$ch\frac{a}{k}\cdot\sin\beta = \left(ch\frac{a}{k}\cdot\sin\beta\cdot\cos\gamma + \cos\beta\cdot\sin\gamma\right)\cdot\cos\gamma + \cos\alpha\cdot\sin\gamma\ .$$

Жақшаны ашу арқылы $ch\frac{a}{k}\cdot\sin\beta = ch\frac{a}{k}\cdot\sin\beta\cdot\cos^2\gamma + \cos\beta\cdot\cos\gamma\cdot\sin\gamma + \cos\alpha\cdot\sin\gamma$

және $1-\cos^2\gamma = \sin^2\gamma$ теңдігін ескере отырып әрі қарай түрлендіреміз. Сонда

$$ch\frac{a}{k}\cdot\sin\beta\cdot\sin^2\gamma = \cos\beta\cdot\cos\gamma\cdot\sin\gamma + \cos\alpha\cdot\sin\gamma$$

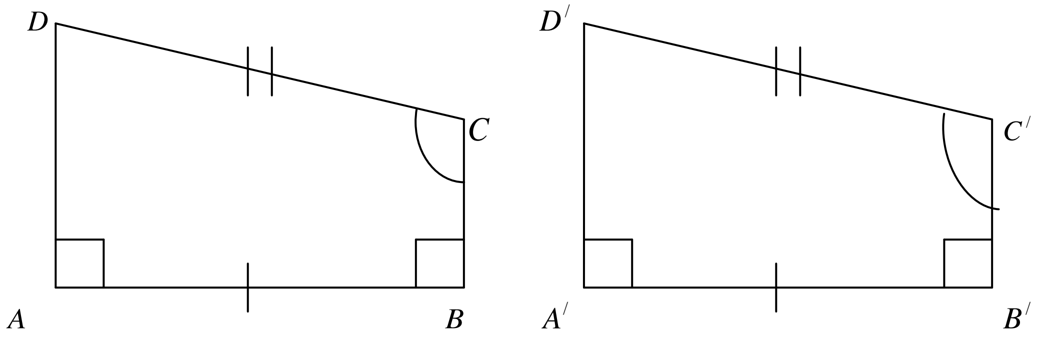
$\sin\gamma$ -ға қысқартамыз $ch\frac{a}{k}\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma = \cos\beta\cdot\cos\gamma + \cos\alpha\ .$

Сонымен, $\cos\alpha = ch\frac{a}{k}\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma - \cos\beta\cdot\cos\gamma\ .$

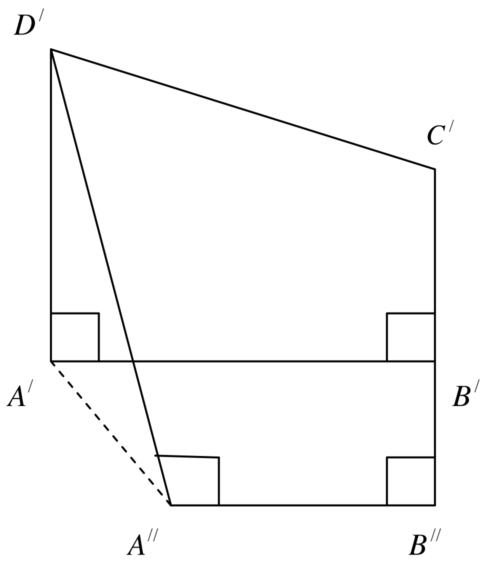
Енді келесі тұжырымдарды шығару жолдарын көрсетейік. Бұл тұжырымдарды шығарғанда жоғарыда келтірген беттестіру аксиомаларын қолданамыз.

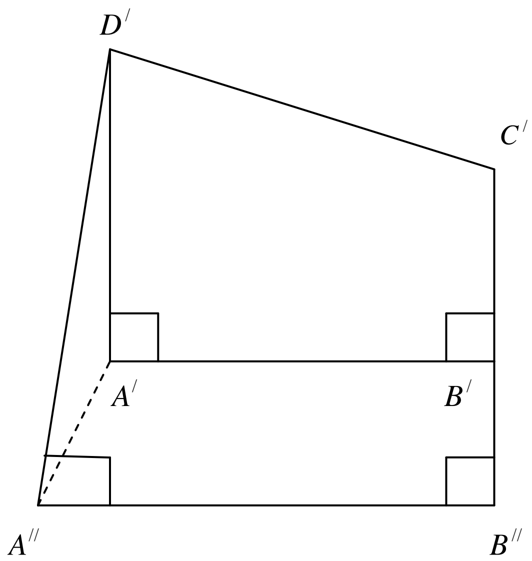
Тұжырым 3. Табандары AB және $A'B'$ болатын $ABCD$ және $A'B'C'D'$ екітікбұрыштар тең болады, егер $AB = A'B'$, $CD = C'D'$ және $\angle C = \angle C'$ (немесе $\angle D = \angle D'$) болса.

Шешуі. Екітікбұрыштарға беттестіру әдісін қолданайық.

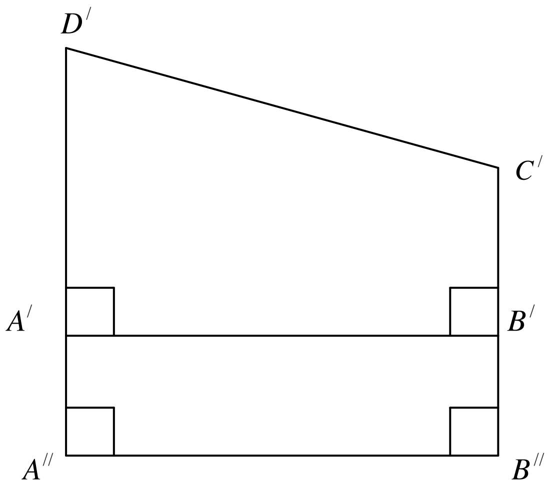


$\angle C = \angle C'$ болғандықтан $C' = f(C)$ болатындай f беттестіру түрлендіруі табылады. Және бұл түрлендіруде CD сәулесі $C'D'$ сәулесіне, ал CB сәулесі $C'B'$ сәулесіне ауысады. Беттестіру түрлендіру арқылы C бұрышты C' бұрышыменбеттестіреміз, CD сәулесін $C'D'$сәулесінің бойымен жіберейік. $CD = C'D'$ болғандықтан D нүктесі D'нүктесімен беттеседі. CBсәулесі $C'B'$сәулесінің бойымен кетеді. Онда f беттестіруде $ABCD$ екітікбұрыш табаны $A''B''$ болатын $A''B''C'D'$ екітікбұрышына ауысады. Мұнда B'' нүкте $C'B'$ сәуле бойында жатады. B'' нүктесі B' нүктесімен беттесетінін көрсетейік. Кері болсын дейік. Онда оның орналасуы, мысалы, былай болсын: $C' - B' - B''$. A'' нүктесінің әртүрлі орналасуын қарастырайық.
Орналасуы төмендегідей





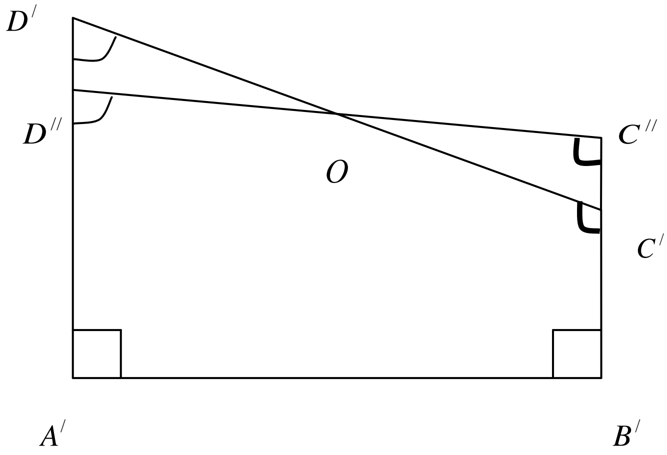
немесе



болады. Бұл орналасу жағдайларында $A''B''B'A'$ төртбұрышы Саккери төртбұрышы болады. Саккери төртбұрышының қасиеті бойынша $\angle A = \angle A'$ және олар сүйір. Қайшылық шықты. Сондықтан, B'' нүктесі B' нүктесімен, ал A'' нүктесі A' нүктесімен беттеседі. Онда, $ABCD$ және $A'B'C'D'$ екітікбұрыштар тең болады. Басқа жағдайда да дәлелдеу дәл осылай.

Тұжырым 4. Табандары AB және $A'B'$ болатын $ABCD$ және $A'B'C'D'$ екітікбұрыштар тең болады, егер $AB = A'B'$, $\angle C = \angle C'$ және $\angle D = \angle D'$.

Шешуі. $\angle A = \angle A'$ болғандықтан $A' = f(A)$ болатындай f беттестіру түрлендіруі табылады. A төбесін A' төбесімен беттестірейік, онда AD сәулесі $A'D'$ сәулесі бойымен, AB сәулесі $A'B'$ сәулесі бойымен кетеді. $AB = A'B'$ болғандықтан B төбесі B' төбесімен беттеседі. BC сәулесі $B'C'$ сәулесі бойымен кетеді. Онда f беттестіруде $ABCD$ екітікбұрыш табаны $A'B'$ болатын $A'B'C''D''$ екітікбұрышына ауысады. C'' нүктесінің орналасуы келесідей болсын: $C'' - C' - B'$. Онда $A'B'C''D''$ екітікбұрыштың орналасуы төмендегідей болады.



$OC'C''$ үшбұрышын қарастырамыз. Онда сыртқы C' бұрышы сыбайлас емес бұрыштардың әрбіреуінен артық болу керек, яғни $\angle C' > \angle C''$. Бұл есептің шартына қайшы.
Басқа мүмкін жағдайлар осылай қарастырылады. Сонымен, C'' нүктесі C' нүктесімен, ал D'' нүктесі D' нүктесімен беттеседі. Яғни, $ABCD$ және $A'B'C'D'$ екітікбұрыштар тең болады.

Осы мақаланы ұстаздар мен жоғарғы сынып оқушылары үшін Лобачевский геометриясына қатысты қосымша материал ретінде қарастыруға болады. Бұл жұмыстағы ақпараттар жоғарғы сынып оқушыларының, студенттердің білімін кеңейтуге, сонымен қатар логикалық және кеңістіктік ойлау қабілеттерін кеңейтуге көмектеседі.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1 Атанасян Л.С. Геометрия Лобачевского. – М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2014. - 464 с.

2 Атанасян Л.С. Основание школьного курса планиметрии. – М.: Просвещение, 1987. – 351 с.

3 Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия. Часть I. – М.: КНОРУС, 2011. – 400 с.

4 Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия. Часть II. – М.: КНОРУС, 2011. – 424 с.

5 Кадомцев С.Б., Позняк Э.Г., Попов А.Г. Геометрия Лобачевского: открытие м путь в современность// Природа. – 1993. – №7. –С. 19–27.