УДК 517.5

ОБОБЩЕННОЕ ПРОИЗВОДНОЕ ЛИУВИЛЛЯ-ВЕЙЛЯ И НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ СО СТУПЕНЧАТЫМ КРЕСТОМ

Жетписбаева Акниет Есиркеповна
akniet-1978@mail.ru
ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
Научный руководитель – PhD, Джумабаева А.А.

Пусть $L_p(\mathrm{T}^2)$, $1 < \mathrm{p} < \infty$ пространство измеримых функций двух переменных которые являются 2π периодическими по каждой переменной и такие, что

$$\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x_1, x_2)|^p dx_1 dx_2\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

L_p^0 - множество функций $f \in L_p$ такое, что

$$\int_0^{2\pi} f(x_1, x_2) dx_2 = 0 \text{ т.е. } x_1$$

и

$$\int_0^{2\pi} f(x_1, x_2) dx_1 = 0 \text{ т.е. } x_2 .$$

Пусть $f^{(p_1,p_2)}$ - производная по Вейлю функции $f(x_1,x_2)$ порядка $p_1(p_1 \ge 0)$ по x_1 и порядка $p_2(p_2 \ge 0)$ по x_2.

Определение 1.

$$Q_n^r = \bigcup_{(\gamma,s)\le n} p(s), \; r = r\gamma$$

множество k таких, что $|k| \in Q_n^r$, называем ступенчатым гиперболическим крестом.

Где $p(s) = \{k = (k_1,k_2) : 2^{s_j - 1} \le k_j < 2^{s_j}, \, j = 1,2\}$.

Пусть $\gamma = (\gamma_1,\gamma_2)$, γ_s - действительные числа. $1 < p < \infty$,

$$S_l^{\gamma}(f) = \sum_{(\gamma,s)\le l+1} \delta_s(f),$$

где $\delta_s(f,x) = \sum_{|k|\in p(s)} \hat{f}(k) e^{i(k,x)}$, $|k| = (|k_1|,|k_2|)$, $s = (s_1,s_2)$, $\hat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} f(x) e^{-i(k,x)} dx.$

Определение 2. Пусть

$$E_{Q_n^r}(f)_p = \inf_{t\in T(Q_n^r)} \|f - t\|_p, \; 1 \le p \le \infty,$$

где

$$T(Q_n^r) = \left\{ t : t(x) = \sum_{|k|\in Q_n^r} c_k e^{i(k,x)} \right\}.$$

Если $1 < p < \infty$, то имеем $E_{Q_n^r}(f)_p \asymp \|f - S_{n-1}^{\gamma}(f)\|_p$, то есть в этом случае частные суммы ряды Фурье дают порядок наилучших приближений. Через $\sigma(f)$ будем обозначать ряд Фурье функции $f \in L_p(T^2)$, т.е

$$\sigma(f) := \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty} (\mathrm{a}_{n_1 n_2} \cos n_1 x_1 \cos n_2 x_2 + b_{n_1 n_2} \cos n_1 x_1 \sin n_2 x_2 +$$

$$+ c_{n_1 n_2} \sin n_1 x_1 \cos n_2 x_2 + d_{n_1 n_2} \sin n_1 x_1 \cos n_2 x_2) = \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty} \mathrm{A}_{n_1 n_2}(x_1 x_2)$$

где для краткости обозначены через $\cos(0\cdot \mathrm{t}) = \frac{1}{2}$.

Преобразованный ряд Фурье от $\sigma(f)$ дается выражением:

$$\sigma(f,\lambda,\beta_1,\beta_2) \equiv \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty} \lambda_{n_1 n_2} (\mathrm{a}_{n_1 n_2} \cos(n_1 x_1 + \beta_1 \pi/2)\cos(n_2 x_2 + \beta_2 \pi/2) +$$

$$+ b_{n_1 n_2} \cos(n_1 x_1 + \beta_1 \pi/2)\sin(n_2 x_2 + \beta_2 \pi/2) + c_{n_1 n_2} \sin(n_1 x_1 + \beta_1 \pi/2)\cos(n_2 x_2 + \beta_2 \pi/2)$$

$$+ d_{n_1 n_2} \sin(n_1 x_1 + \beta_1 \pi/2)\sin(n_2 x_2 + \beta_2 \pi/2),$$

где $\beta_1\beta_2 \in R$ и $\lambda = \{\lambda_{n_1n_2}\}_{n_1n_2\in N}$ последовательность действительных чисел $\varphi(x_1x_2) \sim \sigma(f,\lambda,\beta_1,\beta_2)$ назовем $(\lambda,\beta_1,\beta_2)$-смешанной производной функции f (или производная Лиувилля-Вейля) и обозначим ее через $f^{(\lambda,\beta_1,\beta_2)}(x_1,x_2)$. Например если $\lambda_{n_1n_2} = n_1^{r_1}n_2^{r_2}, r_i \ge 0, \beta_i = r_i (i=1,2)$, тогда $f^{(\lambda,\beta_1,\beta_2)} = f^{(r_1r_2)}$, где $f^{(r_1r_2)}$-смешанная производная от f в смысле Вейля.

Определение 3. Последовательность $\lambda := \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется обобщенной монотонной, записанной как $\lambda \in GM$, если соотношение

$$\sum_{k=n}^{2n} |\lambda_k - \lambda_{k+1}| \le C|\lambda_n|$$

выполняется для всех целых цисел n, где костанта C не зависит от n. Точно также мы вводим класс GM^2, где 2 обозначает размерность.

Определение 4. Последовательность $\lambda = \{\lambda_{n_1,n_2}\}_{n_1,n_2\in N}$ называется обобщенной монотонной записанной $\lambda \in GM^2$, если соотношение:

$$\sum_{k_1=n_1}^{2n_1} |\lambda_{k_1,n_2} - \lambda_{k+1,n_2}| \le C|\lambda_{n_1,n_2}|,$$

$$\sum_{k_2=n_2}^{2n_2} |\lambda_{n_1,k_2} - \lambda_{n_1,k_2+1}| \le C|\lambda_{n_1,n_2}|,$$

$$\sum_{k_1=n_1}^{2n_1}\sum_{k_2=n_2}^{2n_2} |\lambda_{k_1,k_2} - \lambda_{k+1,k_2} - \lambda_{k_1,k_2+1} + \lambda_{k_1+1,k_2+1}| \le C|\lambda_{n_1,n_2}|$$

справедливо для всех целых чисел n_1 и n_2, где константа C не зависит от n_1 и n_2. Наш основной результат гласит следующее:

Теорема 1. Пусть $1 < \text{p} < \infty$, $1 < \theta \le \min(p,2)$, $\lambda = \{\lambda_{n_1,n_2}\}_{n_1,n_2\in N}$ последовательность положительных чисел, такие что $\lambda \in GM^2$, $\alpha_i \in R_+$, $r_i \in R_+ \bigcup \{0\}$ и $\beta_i \in R_+$ $(i=1,2)$.

Если для $f \in L_p^0(T^2)$ ряд:

$$\sum_{v_1=1}^{\infty} |\lambda^{\theta}_{2^{v_1},1} - \lambda^{\theta}_{2^{v_1-1},1}| E^{\theta}{}_{Q^r_{v_1-1}}(f)_p + \sum_{v2=1}^{\infty} |\lambda^{\theta}_{1,2^{v_2}} - \lambda^{\theta}_{1,2^{v_2-1}}| E^{\theta}{}_{Q^r_{v2-1}}(f)_p$$

$$+ \sum_{v_1=1}^{\infty}\sum_{v_2=1}^{\infty} |\lambda^{\theta}_{2^{v_1}2^{v_2}} - \lambda^{\theta}_{2^{v_1-1}2^{v_2}} - \lambda^{\theta}_{2^{v_1}2^{v_2-1}} + \lambda^{\theta}_{2^{v_1-1}2^{v_2-1}}| E^{\theta}{}_{Q^r_{v_1+v_2-2}}(f)_p$$

сходится , то существует $\varphi \in L_p^0(T^2)$ с рядами Фурье $\sigma(f,\lambda,\beta_1,\beta_2)$ и

$$\|\varphi\|_p \le (\lambda^{\theta}_{11}\|f\|^{\theta}_p + \sum_{v_1=1}^{\infty} |\lambda^{\theta}_{2^{v_1},1} - \lambda^{\theta}_{2^{v_1-1},1}| E^{\theta}{}_{Q^r_{v_1-1}}(f)_p + \sum_{v2=1}^{\infty} |\lambda^{\theta}_{1,2^{v_2}} - \lambda^{\theta}_{1,2^{v_2-1}}| E^{\theta}{}_{Q^r_{v2-1}}(f)_p$$

$$+ \sum_{v_1=1}^{\infty}\sum_{v_2=1}^{\infty} |\lambda^{\theta}_{2^{v_1}2^{v_2}} - \lambda^{\theta}_{2^{v_1-1}2^{v_2}} - \lambda^{\theta}_{2^{v_1}2^{v_2-1}} + \lambda^{\theta}_{2^{v_1-1}2^{v_2-1}}| E^{\theta}{}_{Q^r_{v_1+v_2-2}}(f)_p \,)^{\frac{1}{\theta}},$$

$$
\begin{aligned}
E^{\theta}{}_{Q_n^r}(\varphi)_p \le (&\lambda^{\theta}_{2^{m_1-1},2^{m_2-1}} E^{\theta}{}_{Q^r_{m_1+m_2}}(f)_p + \sum_{v_1=m_1}^{\infty}\left|\lambda^{\theta}_{2^{v_1},2^{m_2-1}} - \lambda^{\theta}_{2^{v_1-1},2^{m_2-1}}\right| E^{\theta}{}_{Q^r_{v_1+m_2-1}}(f)_p \\
&+ \sum_{v_2=m_2}^{\infty}\left|\lambda^{\theta}_{2^{m_1-1},2^{v_2}} - \lambda^{\theta}_{2^{m_1-1},2^{v_2-1}}\right| E^{\theta}{}_{Q^r_{v_2+m_1-1}}(f)_p \\
&+ \sum_{v_1=m_1}^{\infty}\sum_{v_2=m_2}^{\infty}\left|\lambda^{\theta}_{2^{v_1},2^{v_2}} - \lambda^{\theta}_{2^{v_1-1},2^{v_2}} - \lambda^{\theta}_{2^{v_1},2^{v_2-1}} + \lambda^{\theta}_{2^{v_1-1}2^{v_2-1}}\right| E^{\theta}{}_{Q^r_{v_1+v_2-2}}(f)_p)^{\frac{1}{\theta}}.
\end{aligned}
$$

Список использованных источников

1.R. DeVore, G. G. Lorentz, Constructive Approximation, Berlin: Springer-Verlag, 1993.

2.S. Tikhonov, Trigonometric series with general monotone coefficients// J. Math. Anal. Appl., № 326, 2007, C. 721–735.

3.A.A. Konyushkov, Best approximations by trigonometric polynomials and Fourier coefficients,// Mat. Sb. Vol. 44.-Is. 1, 1958, P. 53–84.