ӘОЖ 517.986.3

КОММУТАТИВТІ ЕМЕС СИММЕТРИЯЛЫ ХАРДИ КЕҢІСТІГІ ҮШІН ОУТЕР ОПЕРАТОРЛАРДЫҢ СИПАТТАМАЛАРЫ

Уатаева А.Е., Әзенов Н.Р.
azhar_oshanova@mail.ru,n.u.r.s.u.l.t.a.n_96@mail.ru
Л.Н.Гумилеватындағы ЕҰУ, Нур-Султан, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі-ф.м.ғ.к., Райхан М.

Аннотация: Бұл жұмыста біз коммутативті емес Харди кеңістігіндегі оутер операторларының қасиеттерін зерттеуден алынған нәтижелерді симметриялық кеңістік жағдайына кеңейттіп зерттедік.

Түйінді сөздер:Жартылай ақырлы субдиагоналды алгебра, коммутативті емес Харди кеңістігі, оутер операторы, фон Нейман алгебрасы

[1] -жұмыста Blecher мен Labuschagne $1 \leq p < \infty$ жағдайы үшін $H^p(\mathrm{A})$ кеңістігіндегі оутер операторларын зерттеді. ($0 < p < 1$ жағдайы үшін [2] -ті қараңыз). [3] - жұмыста авторлар [1] -жұмыстағы интер-оутер факторизациялау теоремаларын жалпылап, элементтері нөлдік детерминантпен берілген жағдайда да жарамды болып табылатын оутер операторлардың сипаттамаларын берді. $0 < p < 1$ жағдайы үшін осы нәтижелердің кейбірі [4] -жұмыста дәлелденген. Біз оутер операторлары үшін алынған [3] -жұмыстағы негізгі нәтижелерді симметриялық кеңістік жағдайына кеңейттік.

Бұл жұмыста H Гильберт кеңістігіндегі қалыпты нақты нормаланған τ ізі бар ақырлы фон Нейман алгебрасын M арқылы белгілейміз. Барлық τ -өлшемді операторлар жиынын $L_0(\mathrm{M})$ арқылы белгілейік. $x \in L_0(\mathrm{M}) : t > 0$ үшін

$$\mu_t(x) = \inf\{s > 0 : \lambda_s(x) \leq t\},$$

болсын, мұндағы

$$\lambda_s(x) = \tau(e_s^{\perp}(|x|)); s > 0.$$

E кеңістігі $[0,1]$ кесіндісіндегі симметриялы квази-Банах кеңістік болсын.

$$E(\mathrm{M};\tau) = \{x \in L_0(\mathrm{M}) : \mu_{\cdot}(x) \in E\};$$

кеңістігін

$$\| x \|_{E(\mathrm{M};\tau)} = \| \mu_{\cdot}(x) \|_E$$

нормасымен анықтаймыз. Онда $(E(\mathrm{M};\tau); \| \cdot \|_{E(\mathrm{M};\tau)})$ квази-Банах кеңістік болады.

$x \in L^p(\mathrm{M})$ $(0 < p \leq \infty)$ операторының $\Delta(x)$ Fuglede-Kadison анықтауышын

$$\Delta(x) = \exp(\tau(\log |x|)) = \exp(\int_0 \log t \, d\nu_{|x|}(t)),$$

арқылы анықтауға болатынын еске сала кетейік, мұндағы $d\nu_{|x|}$ белгіленуі τ ізімен байланысты $|x|$-тің спектральді өлшемі арқылы алынатын P_+ -тегі ықтималдық өлшемін білдіреді.

$$\Delta(x) = \lim_{p \to 0} \| x \|_p$$

болатынын тексеру оңай.

Матрицаның әдеттегі анықтауышы сияқты Δ -да мультипликативті, яғни: $\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(x)$. E кеңістігі квази-Банах торы болсын. Ал $0 < \alpha < \infty$ болсын. E кеңістігі α -дөңес (сәйкесінше α -ойыс) деп аталады, егер E-дегі барлық

$$||(\sum |x_n|^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}||_E \le C(\sum ||x_n||_E^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}},$$

$$(resp. ||(\sum |x_n|^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}||_E \ge C^{-1}(\sum ||x_n||_E^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}).$$

орындалатындай ақырлы (x_n) тізбегі үшін $C > 0$ тұрақты саны табылатын болса. Әдетте осы $C > 0$ тұрақтылардың ең кішісін $M^{(\alpha)}(E)$ (сәйкесінше $M_{(\alpha)}(E)$) арқылы белгілейді.

Анықтама 1. Өлшем бойынша жинақталатын топология бойынша А алгебрасының тұйықталуын $H^0(\mathrm{A})$- арқылы белгілейік. Егер өлшем бойынша жинақталатын топология бойынша $h\mathrm{A}$ элементі $H^0(\mathrm{A})$ кеңістігінде тығыз болса, онда $h \in H^0(\mathrm{A})$ элементін $H^0(\mathrm{A})$ кеңістігіне оутер деп айтамыз.

Егер А алгебрасынан операторлық норма бойынша бірқалыпты шенелген, әрі бірлік элемент **1** ге өлшем бойынша жинақталатын $\{ha_n\}$ тізбегі болатындай $a_n \in \mathrm{A}$ тізбегі табылатын болса, онда $h \in H^0(\mathrm{A})$ элементін $H^0(\mathrm{A})$ кеңістігіне бірқалыпты оутер деп айтамыз.

Тұжырым 1.Айталық E - [0;1] кесіндісіндегі симметриялы квази-Банах кеңістік және $h \in E(\mathrm{A};\tau)$ болсын. Егер h элементі $E(\mathrm{A};\tau)$ кеңістігіне оутер болса, онда h элементі $H^0(\mathrm{A})$ кеңістігіне оутер болады.

Тұжырым 2. Айталық E кеңістігі кейбір $0 < r < \infty$ үшін $M^{(r)}(E) = 1$болатындай [0;1] кесіндісіндегі $r-$дөңес симметриялы квази-Банах кеңісітік болсын. Онда $h \in E(\mathrm{A};\tau)$ элементі оутер болады сонда тек сонда ғана егер $\mathrm{E}(h)$ кеңістігі $E(\Delta;\tau)$ кеңістігіне оутер және $[h\mathrm{A}_0]_{E(\mathrm{M};\tau)} = E^0(\mathrm{A};\tau)$ болса, мұндағы $E^0(\mathrm{A};\tau) = [\mathrm{A}_0]_{E(\mathrm{M};\tau)}$.

Тұжырым3. E кеңістігі кейбір $0 < r < \infty$ үшін $M^{(r)}(E) = 1$ қоса [0;1] кесіндісіндегі $r-$дөңес симметриялы квази-Банах кеңісітік болсын. Онда $h \in E(\mathrm{A};\tau)$ элементі оутер болады сонда тек сонда ғана егер $E(\Delta;\tau)$ кеңістігіне $\mathrm{E}(h)$оутер болса және $\mathrm{E}(h) - h \in [h\mathrm{A}_0]_{E(\mathrm{M};\tau)}$ болса.

Анықтама 2. (i) Егер $\{ha_n\}$-тізбегі А алгебрасында операторлық норма бойынша бірқалыпты шенелген және $ha_n \to 1$ -ге өлшем бойынша жинақталатындай $a_n \in \mathrm{A}$ тізбегі табылса, онда $h \in H^0(\mathrm{A})$ элементін $H^0(\mathrm{A})$ кеңістігінде бірқалыпты оутер деп айтамыз.

(ii)) Егер $\{ha_n\}$-тізбегі А алгебрасында оператор нормасы бойынша бірқалыпты шенелген және $ha_n \to 1$ ге өлшем бойынша жинақталатындай $a_n \in \mathrm{A}$ тізбегі табылса, онда $h \in E(\mathrm{A};\tau)$ элементін $E(\mathrm{A};\tau)$ кеңістігінде бірқалыпты оутер деп айтамыз.

Теорема 1. Айталық E кеңістігі кейбір $0 < r < \infty$ үшін $M^{(r)}(E) = 1$ болатын [0;1] кесіндісіндегі $r-$дөңес симметриялы квази-Банах кеңістік болсын және E кеңістігінде c_0 болмасын немесе сеперабельді кеңістік болсын. h элементі $E(\mathrm{A};\tau)$ -да оутер болады және $\Delta(h) \neq 0$ деп жориық. Онда h элементі $E(\mathrm{A};\tau)$ кеңістігінде бірқалыпты оутер болады.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі

1.Blecher D.P., Labuschagne L.E. Applications of the Fuglede–Kadison determinant: Szego'stheorem and outers for noncommutatuve H_p // Trans. Amer. Math. Soc. – 2008. – Vol. 360. – P. 6131–6147.
2. Bekjan T.N. and Xu Q. Riesz and Szego type factorizations for noncommutative Hardy spaces // J. Operator Theory. – 2009. – Vol.62. – P. 215–231.
3. Blecher D P, Labuschagne L E. Outers for noncommutative H^p revisited // Studia Math. – 2013. – Vol.217. – P. 265–287
4. Arxen T, Yerkex, Turdebek N Bekjan. On outer elements of the noncommutative H_p spaces // Bull of KSU, seria math. – 2015. – Vol.77. – P. 56–60
5. K.S. Tulenov, M. Raikhan. Outer operators for the noncommutative symmetric Hardy spaces associated with finite subdiagonal algebra // Acta Mathematica Scientia–2017, Vol. 37B(3). –P.799-805.