Мысалы, ақырлы өрістің қуаты мен n параметрінің жеткілікті үлкен болу және матрицаның рангы $n/2$ санына жақын және т.с.с.

Сонымен, Оскар атты (O) бақылаушыға қатысты математикалық есептің сипаттамасына көшеміз.

Берілгені: UX, UXV, XV $n \times n$ матрицалары.

Табу керек: X $n \times n$ матрицасы.

Шешуі: Төмендегі алгоритмдік мәселені шешудің тез, жылдам әдісін $C = UX$, $D = UXV$ матрицаларына қолданып, керіленетін W матрицасын анықтаймыз. Сонда

$$XV = U^{-1}UXV = U^{-1}UXW = XW.$$

Демек, енді XV-ны оң жақтан W^{-1} көбейтсек, X-ты аламыз.

Алгоритмдік Есеп. Бізге $n \times n$ D матрицасының $n \times n$ C матрицасының оң жағынан бір керіленетін матрицаға көбейткенде шығатыны белгілі болсын. $D = CW$ болатындай $n \times n$ W матрицасын құрастыруының тиімді алгоритмін табыңыз.

Шешуі: Жалпылықты шектеместен, C матрицасының бірінші r жолдары сызықты тәуелсіз және $r = \text{rank}(C)$ болсын деп ұйғарайық. Осы жолдарды базиске дейін еркін түрде толықтырамыз: бұны матрицаның рангын есептеуде қолданылатын Гаусс әдісімен тиімді түрде жасауға болады. Мысалы, нөлдік емес минор жоғарғы сол бұрышта орналасса, онда бірінші r жолды базиске дейінгі стандартты базистің $e_{r+1}, \dots, e_n$ векторларымен толықтыруға болады.

Осы базисті C матрицасының бірінші r жолы бар керіленетін $n \times n$ C_0 матрицасын құрастыру үшін қолданайық. D матрицасының бірінші r жолдары сызықты тәуелсіз болады және $r = \text{rank}(D)$. Тағы да жоғарыда айтылған әдісті қайталап бірінші r жолы D матрицасының бірінші r жолына тең болатын, керіленетін $n \times n$ D_0 матрицасын құрастырамыз. $W = C_0^{-1}D_0$ матрицасы есепті шығарады.

Ескерту: Гаусстың элиминация әдісін қолдану үшін C мен D матрицаларын бірінің соңынан бірін жалғап, $n \times 2n$ өлшемді $C\hat{}D$ матрицасын жасауға болады; сонан соң $n \times 2n$ өлшемді $C\hat{}D$ матрицасының ұзындықтары $2n$ жолдарымен жұмыс жасап, элиминация әдісін іске асыра аламыз.

Қолданылған әдебиеттер

1. В.А. Романьков, *Алгебраическая криптография*. Издательство ОГУ им. Ф.М. Достоевского, Омск (2013).

2. Сайт: https://ru.wikipedia.org/wiki/Трёхэтапный_протокол.

УДК 519.651

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ КОМПЬЮТЕРНОЙ (ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ) ТОМОГРАФИИ В КОНТЕКСТЕ КОМПЬЮТЕРНОГО (ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО) ПОПЕРЕЧНИКА

Дуйсембаева Аягоз Орынбаевна, Карлыбай Жазира Газизкызы
llxll.llyll@gmail.com, *zhazira-karlibay@mail.ru*
Магистранты 2 курса специальности «6М060100 – Математика»
Механико-математического факультета ЕНУ им. Л.Н. Гумилева,
г. Нур-Султан, Казахстан
Научный руководитель – Е.Е. Нурмолдин

История **Компьютерной (вычислительной) томографии** в этом году отметит 125 лет своего развития, начало которого было положено 8 ноября 1895 года, когда немецкий физик Вильгельм Рентген сделал главное научное открытие в своей жизни. Им были обнаружены невидимые лучи, способные проходить через бумагу и дерево, эти загадочные лучи В. Рентген назвал Х-лучами, впоследствии они получили его имя - рентгеновские лучи, так известные нам до сегодняшних дней. В том же памятном году, уже 28 декабря вышла знаменитая статья В.Рентгена под названием «Ueber eine neue Art von Strahlen» (О новом виде излучения), опубликованной в «Annalen der Physik und Chemie» (Анналы Физики и Химии), г. Вюрцбург [1]. Уже через месяц после их описания, в январе следующего года Х-лучи были впервые применены в медицине. 11 января хирург Джон Фрэнсис Холл-Эдвардс сделал рентгеновский снимок кисти руки с введенной в нее стерильной иглой, а уже 14 февраля 1896 года им была выполнена первая операция, во время которой он руководствовался рентгеновским снимком.

В первый год после открытия В.Рентгеном Х-лучей вышло более 1000 статей и более сотни научных работ, посвященных им. Но среди множества научных открытий, существенный результат в компьютерное томографии был получен в 1917 году австрийским математиком Иоганном Радоном, работа которого была опубликована в трудах Саксонской академии наук под названием «*Uber die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte l¨angs gewisser Mannigfaltigkeiten*» (Об определении функций по их интегральным значениям вдоль некоторых многообразий) [2]. В 1937-м польский математик Стефан Качмаж развил метод Радона и разработал способ нахождения приблизительного решения большой системы линейных алгебраических уравнений. На основе этой методики и был сделан первый коммерческий КТ-сканер. Но на тот момент условий для создания компьютерной томографии не было. В 1959 году американский невролог Уильям Олдендорф выдвинул идею о том, что можно сканировать голову человека с помощью рентгеновских лучей, а затем реконструировать рентгеноконтрастность слоев. Он построил прототип КТ-сканера и получил патент на «Излучающий аппарат для изучения выбранных зон внутренних объектов, скрытых плотным материалом». Однако первый коммерческий аппарат построили в 1971 году американский физик Аллан Кормак и британский инженер Годфри Хаунсфилд. Первый КТ-сканер был установлен в больнице Аткинсон Морли в Лондоне, а первое исследование в виде компьютерной томографии мозга было проведено 1 октября 1971 года. С 1970-х годов технология компьютерной томографии значительно шагнула вперед. Увеличилась скорость сканирования, число исследуемых слоев, улучшилось качество изображения, появилась КТ с двумя источниками излучения, КТ с рентгеноконтрастным усилением. Сейчас в медицине используется новое поколение сканеров, которые могут составлять изображение менее чем за секунду.

Численное восстановление функций по их линейным (плоскостным) интегралам, нашло применение в различных областях: радиоастрономия, электронная микроскопия, рентгенодиагностика, биохимия, промышленность, геофизика, сейсмология и т.п. Особенность применения данного метода заключается в том, что информативность в большой степени зависит от глубины и тонкости применяемой математической теории [3-5].

Общая задача в определении Компьютерного (вычислительного) поперечника, впервые предложенного в 1996-2003 г.г., и в дальнейшем развитого Институтом теоретической математики и научных вычислений (ИТМиНВ) Евразийского Национального университета им. Л.Н. Гумилева в [6-9], в случае $Tf = f$ есть задача восстановления функции

$$\delta_N\left(\mathrm{D}_N;F\right)_Y = \inf_{(l,\dots l_N,\varphi_N)\in D_N} \sup_{f\in F}\left\{\left\| f(\cdot)-\varphi_N\left(l_1(f),\dots,l_N(f);\cdot\right)\right\|_Y\right\} \tag{1}$$

Смысл К(В)П состоит в нахождении наилучшего среди данного класса вычислительных средств в условиях искаженных исходных данных.

В рамках обозначений и определений приведенных в [6-9], *«Компьютерный (вычислительный) поперечник»,* заключает в себе последовательное решение нижеследующих трех задач – К(В)П-1, К(В)П-2 и К(В)П-3:

При заданных F,Y,D_N (фиксированных всюду по последующему контексту)

К(В)П-1: Находится порядок $\succ\prec \delta_N\left(0;D_N\right)_Y \equiv \delta_N\left(0;T;F;D_N\right)_Y$, – *информативная мощность набора вычислительных агрегатов* $D_N \equiv D_N\left(F\right)_Y.$, заданного набора комплексов $\left(l_N^{(1)},\dots,l_N^{(N)};\varphi_N\right)\equiv\left(l^{(N)},\varphi_N\right)$, подчеркнем, операторов восстановления «по точной информации».

К(В)П-2: Производится построение конкретного вычислительного агрегата $\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right)$ из $D_N \equiv D_N\left(F\right)_Y$, поддерживающего порядок $\succ\prec \delta_N\left(0;D_N\right)_Y$, для которого исследуется задача существования и нахождения последовательности $\tilde{\varepsilon}_N \equiv \tilde{\varepsilon}_N\left(D_N;\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right)\right)_Y \equiv \left(\tilde{\varepsilon}_N^{(1)},\dots,\tilde{\varepsilon}_N^{(N)}\right)$ с неотрицательными компонентами, – К(В)П-2 – предельной погрешности (соответствующей вычислительному агрегату $\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right)$), такой, что $\delta_N\left(0;D_N\right)_Y \succ\prec \delta_N\left(\tilde{\varepsilon}_N;\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right)\right)_Y \equiv \sup\left\{\left\|Tf(\cdot)-\bar{\varphi}_N\left(z_1(f),\dots,z_N(f);\cdot\right)\right\|_Y :\ f\in F, \left|\bar{l}_\tau(f)-z_\tau(f)\right|\le \varepsilon_N^{(\tau)}\left(\tau=1,\dots,N\right)\right\}$, с одновременным выполнением

$$\forall \eta_N \uparrow +\infty (0<\eta_N<\eta_{N+1},\ \eta_N \to +\infty):\ \overline{\lim_{N\to+\infty}}\,\delta_N\left(\eta_N\tilde{\varepsilon}_N;\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right)\right)_Y \Big/ \delta_N(0;D_N)_Y = +\infty\,.$$

К(В)П-3: Устанавливается массивность предельной погрешности $\tilde{\varepsilon}_N\left(D_N;\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right)\right)_Y$: находится как можно большое множество $D_N\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right)$ (обычно связанных со структурой исходного $\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right)$) вычислительных агрегатов $\left(l^{(N)},\varphi_N\right)$, построенных по всевозможным (не обязательно линейным) функционалам $l_1,\dots,l_N$, таких, что для каждого из них выполнено соотношение

$$\forall \eta_N \uparrow +\infty (0<\eta_N<\eta_{N+1},\ \eta_N \to +\infty):\ \overline{\lim_{N\to+\infty}}\,\delta_N\left(\eta_N\tilde{\varepsilon}_N;\left(l^{(N)},\varphi_N\right)\right)_Y \Big/ \delta_N(0;D_N)_Y = +\infty.$$

Конкретизация в D_N наборов функционалов $l_1,\dots,l_N$ и алгоритмов переработки числовой информации φ_N порождает многочисленные постановки задач.

Через: $\Lambda_N = P^{(N)} = \left\{\left(f(\xi_1),\dots,f(\xi_N)\right):\ f\in F, \xi_1,\dots,\xi_N -\right.$ *точки из множества задания функций класса* $F\}$

обозначим множество из всех возможных наборов N функционалов, являющихся *значениями функции* в точках линейных функционалов, введем случайные обозначения, через

$$\Lambda_N = \Phi^{(N)} = \left\{\left(\hat{f}\left(m^{(1)}\right),\dots,\hat{f}\left(m^{(N)}\right)\right): f \in F, m^{(j)} \in Z^s, j = 1,\dots,N\right\}$$

множество *всех возможных наборов из* N *функционалов,* - тригонометрических коэффициентов Фурье-Лебега, где Z^s - множество всех векторов $m=(m_1,\dots,m_s)$ из R^s с целочисленными компонентами и пусть

$$\Lambda_N = L^{(N)} = \left\{\left(l_1(f),\dots,l_N(f)\right): f \in F\right\}$$

есть множество всех возможных наборов из N линейных функционалов, определенных на линейной оболочке класса F, что коротко будем называть *линейной информацией.* Особый интерес представляет случай, когда Λ_N есть множество всех линейных функционалов, определенных на линейной оболочке класса F. Тогда в случае $D_N = L^{(N)} \times \left\{\varphi_N\right\}_Y$ величин $\delta_N\left(0, L^{(N)}\right)$ *есть информативная мощность всех возможных линейных функционалов.* Образно говоря, случай оценки снизу при $\Lambda_N = L^{(N)}$ с произвольным φ_N можно понимать как *«привлечение любых мыслимых вычислительных агрегатов построенных по* δ_0' *линейной информации не может обеспечить большую скорость приближения».*

Здесь, по-видимому, самой изученной является случай функционалов $l_j(f) = f(\xi_j)$ – значений функций в точках, при этом, основная проблема заключается в построении сеток, оптимальных в том или ином смысле. Разумеется, помимо значений в точках, можно привлекать и другие функционалы.

В данной работе в качестве функционалов мы будем использовать значения преобразования Радона. Преобразование Радона и формула обращения были введены Радоном в работе [2]. Обзор основных сведений о преобразовании Радона может быть найден в монографиях [3-5].

Для полноты изложения напомним определение в случае двух переменных.

Пусть $D = \left\{x = (x,y) \in R^2 : |x| = \sqrt{x^2+y^2} \le 1\right\}$ − единичный круг с центром в начале координат. А через $C = [-1,1] \times S \equiv \left\{(p,\theta): -1 \le p \le 1, \theta = (\theta_1,\theta_2): \theta_1^2 + \theta_2^2 = 1\right\}$. Через Z обозначим множество $Z = \left\{(p,\theta): -1 \le p \le 1, \theta = (\theta_1,\theta_2): \frac{1}{4} \le \theta_1^2 + \theta_2^2 \le 1\right\}$. Заметим здесь, что множество C можно рассматривать как поверхность в R^3, которая находится внутри куба $[-1,1]^3$.

Для функции f, определенной на D, и $(t,\theta) \in C$ преобразованием Радона $R(f;t;\theta)$ называется интеграл от f вдоль отрезка $I := I(t,\theta) = \left\{(x,y): x\theta_1 + y\theta_2 = t\right\} \cap D$, а именно

$$R(f;t;\theta) := \int_{I(t,\theta)} f(x,y)\,ds = \int_{-\sqrt{1-t^2}}^{\sqrt{1-t^2}} f(t\theta_1 - s\theta_2, t\theta_2 + s\theta_1)\,ds.$$

Таким образом, основной целью нашей работы является нахождение неулучшаемых порядков величины:

$$\rho_N(F)_Y = \inf_{\left(t_1,\theta^{(1)}\right)\dots\left(t_1,\theta^{(1)}\right),\varphi_N(z_1,\dots,z_N;x)} \sup_{f \in F} \left\| f - \varphi_N\left(R\left(f;t_1;\theta^{(1)}\right),\dots,R\left(f;t_N;\theta^{(N)}\right);x\right)\right\|_Y.$$

В данной статье в качестве функциональных классов E_s^r мы изучаем пространство функций $E_s^r(D)$, являющихся сужением функций из классов Коробова E_s^r на круг $D=\{(x,y)=x^2+y^2\le 1\}$.

Напомним [10, глава 1, § 2], что класс Коробова E_s^r есть множество всех 1-периодических по каждой переменной функций f таких, что ее тригонометрические коэффициенты Фурье

$$\hat{f}(m)=\hat{f}(m_1,m_2)=\int\limits_{[0,1]^2} f(x)=f(x_1,x_2)\cdot e^{-2\pi\iota(m_1x_1+m_2x_2)}dx_1dx_2$$

$$\left(m=(m_1,m_2)\in Z^2\right)$$

удовлетворяют неравенству

$$\hat{f}(m_1,m_2)\le\frac{1}{(m_1\cdot m_2)^{r'}}$$

где используется обозначение

Нами доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть дано число $r>2$ и положительное число $\varepsilon<r-1$. Тогда справедливо соотношение

$$\rho_N(F_2^r)_{L^\infty}<<N^{-\frac{(r-\varepsilon)}{2}+1}$$

где константа в неравенстве зависит только от r,ε.

Теорема 2. Пусть дано число $r>1$. Тогда справедливо соотношение

$$\rho_N(F_2^r)_{L^\infty}>>N^{-r+\frac{1}{2}}$$

где константа в неравенстве зависит только от r.

В заключение, отметим, что в Казахстане была поставлена задача К(В)П о нахождении неулучшаемых порядков восстановления функций, используя информацию нового типа по значениям преобразования Радона функций из классов Коробова. Научные работы проведены в рамках грантового финансирования МОН РК проекта AP05132938 «Преобразование Радона в задачах дискретизации». Последующая вычислительная реализация имеет весьма широкую сферу применения в науке и технике, в частности в компьютерной томографии. Таким образом, в масштабах Казахстана предлагается дальнейшее исследования перспективной тематики, которое реализует новое направление на международном уровне.

Список использованных источников

1. В.Рентген. Ueber eine neue Art von Strahlen. // «Annalen der Physik und Chemie» (Анналы Физики и Химии), 1895, S.41-132
2. J. Radon. Uber die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten. Berichte Sächsischte Akademie der Wissenschaften, Leipzig, Math.-Phys. Kl., 69 (1917), 262-277.
3. Deans S.R. The Radon Transform and some of its Applications. Wiley, 1983.
4. Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии, Пер. с англ., Москва, Изд-во Мир, 1990, 288 с.

5. Хелгасон С. Преобразование Радона: Пер. с англ. М.: Мир, - 1983. 152 с.
6. Темиргалиев Н. Теоретико-числовые методы и теоретико-вероятностный подход к задачам анализа. Теория вложений и приближений, абсолютная сходимость и преобразования рядов Фурье // Вестник Евразийского университета. – 1997. – № 3. –С. 90-144.
7. Темиргалиев Н. Компьютерный (вычислительный) поперечник. Алгебраическая теория чисел и гармонический анализ в задачах восстановления (метод квази-Монте Карло). Теория вложений и приближений. Ряды Фурье // Вестник ЕНУ им. Л.Н.Гумилева. Спец. выпуск, посвященный научным достижениям математиков ЕНУ им. Л.Н.Гумилева. – Астан, 2010. – С.1-194.
8. Темиргалиев Н., Жубанышева А.Ж. Теория приближений, Вычислительная математика и Численный анализ в новой концепции в свете Компьютерного (вычислительного) поперечника// Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика. Информатика. Механика. -2018. -Т. 124, №3. -С. 8-88.
9. Темиргалиев Н., Жубанышева А.Ж. Компьютерный (вычислительный) поперечник в контексте общей теории восстановления// Известия ВУЗов. Математика. -2019. -№1. -С. 89-97.
10. Коробов Н.М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. -М.: Физматгиз, 1963.

УДК 517.9

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В L_1

Есбаев Адилет Ныгметович
adilet.e@gmail.com
Докторант Механико-математического факультета
ЕНУ им.Л.Н.Гумилёва, Нур-Султан, Казахстан
Научный руководитель – К.Н.Оспанов

Пусть $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, $L_1 = L_1(\mathbb{R})$, $\|\cdot\|_1$ — норма L_1. Рассматривается следующее уравнение

$$-(\rho y')' + \frac{r}{\rho} y' = f(x), \qquad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}$, ρ — дважды непрерывно дифференцируемая, а r — непрерывно дифференцируемая функции,ф $f \in L_1$.

Пусть дифференциальное выражение $l_0 y := -(\rho y')' + \frac{r}{\rho} y'$ определено на $C_0^{(2)}(\mathbb{R})$ — множество дважды непрерывно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$ с компактным носителем. Обозначим через l замыкание l_0 в пространстве L_1.

Определение Решением уравнения (1) назовём функцию $y \in D(l)$ такую, что $ly = f$.