6. Ш.Ажгалиев. Приближенное восстановление по линейной информации функций и решений уравнения теплопроводности с функциями распределения начальных температур из классов W, B, SW и E.
7. Н. Темірғалиев, Ш.К.Абикенова, А.Ж.Жубанышева, Г.Е. Таугынбаева. Задачи дискретизации решений волнового уравнения, численного дифференцирования и воостановления функций в контексте К(В)П, Изв.вузов. Матем., 2013, №8.
8. С.М.Никольский, Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, Наука, Москва, 1977.

УДК 517.986.3

# τ -ӨЛШЕМДІ ОПЕРАТОРЛАРДЫҢ МАТРИЦАЛАРЫ ҮШІН СУБМАЖОРИЗАЦИЯ ТЕҢСІЗДІКТЕРІ

**Жұмағұлов Қанат Азатұлы, Абатов Ханабил Нурадилулы**
qanatjumagulov@gmail.com; xanabil_98_25@mail.ru
Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ, ММФ магистранттары, Нұр-Сұлтан, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі – ф.м.ғ.к., Райхан М.

**Аннотация:** $(M,\tau)$ арқылы жартылай ақырлы фон Нейман алгебрасын белгілейік, $L_0(M)$ барлық τ-өлшемді операторлар жиыны, ал $\mu_t(x)$ дегеніміз $x \in L_0(M)$ -тің жалпыланған сингулярлық саны болсын. Біз бұған дәлелдегеніміздей, егер g : [0, ∞) → [0, ∞) бейнелейтін өспелі үзіліссіз функция болса, онда $L_0(M)$-ден алынған $x_1, x_2, \dots, x_n$ нормаль операторлары үшін келесі теңсіздік орынды болатынын білеміз:

$$\mu\left(g\left(\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right|\right)\right) \le \mu\left(g\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|\right)\right).$$

Осы теңсіздіктің қолданысы ретінде, егер $x$-дегеніміз $L_0(M)$-ден алынған $x_{ij}$ нормал операторлардың матрицасы болса және $f$: [0, ∞) → [0, ∞) бейнелейтін ойыс функция болса, онда $\mu(f|x|)$ функциясы $\mu\left(\sum_{i,j=1}^{n} f\left(|x_{ij}|\right)\right)$ арқылы мажорланатынын көрсетеміз.

## 1. Кіріспе

$\mathbb{M}_n$- ақырлы барлық $n \times n$ өлшемді комплекс матрицалар жиынын алайық. Ротфельд [1], егер $x, y \in \mathbb{M}_n$ және $f$: [0, ∞) → [0, ∞) ойыс функция болса, онда келесі теңсіздік орынды болатынын дәлелдеген:

$$\|f(|x+y|)\|_1 \le \|f(|x|) + f(|y|)\|_1, \tag{1}$$

Мұндағы $\|\cdot\|_1$ дегеніміз Шаттен 1-нормасы. Жартылай анықталған оң $x, y \in \mathbb{M}_n$ және $f(t) = t^p (0 < p < 1)$ үшін жоғарыдағы теңсіздік іздік теңсіздіктен келіп шығады. Жартылай анықталған оң матрицалар үшін жоғарыдағы (1) теңсіздігін Андо мен Жан [2] жұмыста симметриялық нормалардың $\|\cdot\|$ барлық класстарына және операторлық дөңес емес функциялар $f$:[0, ∞) → [0, ∞) үшін жалпылап, келесі теңсіздік орынды болатынын көрсеткен:

$$\|f(x+y)\| \leq \|f(x)+f(y)\| \tag{2}$$

[3] -жұмыста Боурин мен Учияма (2) теңсіздікті келесідей жағдайға жалпылаған: егер $x, y \in \mathbb{M}_n$ жартылай анықталған оң матрицалар және $f: [0,\infty) \to [0,\infty)$ дөңес емес функция болсын, онда

$$\|f(x+y)\| \leq \|f(x)+f(y)\| \tag{3}$$

Кай Фан үстемдік қағидасы бойынша (3) – келесі теңсіздікке эквивалентті болады

$$\sum_{j=1}^{k} s_j\left(f(x+y)\right) \leq \sum_{j=1}^{k} s_j\left(f(x)+f(y)\right), \quad 1 \leq k \leq n \tag{4}$$

Мұндағы $s_j(z)(j = 1,2,\dots,n)$ шамасы $z \in \mathbb{M}_n$ -тің сингулярлы мәні болып табылады. Боурин [4] -жұмыста, егер $x, y \in \mathbb{M}_n$ нормальды болып, $f$: $[0,\infty) \to [0,\infty)$ дөңес емес функция және $\|\cdot\|$ симмтериялық норма болса, онда

$$\|f(x+y)\| \leq \|f(x)+f(y)\|,$$

яғни,

$$\sum_{j=1}^{k} s_j\left(f(|x+y|)\right) \leq \sum_{j=1}^{k} s_j\left(f(|x|)+f(|y|)\right), \quad 1 \leq k \leq n \tag{5}$$

орындалатынын дәлелдеген.

(5) – теңсіздіктің бір қолданысы ретінде Боурин келесі теңсіздікті анықтаған: егер $x = (x_{ij})$ нормаль элементтерден құрылған блок матрица болса және $f$ функциясы $[0,\infty)$ аралығында анықталған теріс емес ойыс функция болса, онда

$$\sum_{k=1}^{m} s_k\big(f(|x|)\big) \leq \sum_{k=1}^{m} s_k\Big(\sum_{i,j=1}^{n} f\big(|x_{ij}|\big)\Big), \quad 1 \leq m \leq n. \tag{6}$$

Біз $L_0(0,\infty)$ арқылы Лебег бойынша өлшемді $[0,\infty)$ аралығында анықталған нақты мәнді $f$ функциялар кеңсітігін белгілейік. Барлық $t \geq 0$ үшін кемімелі орын ауыстыру функциясын келесідей анықталық:

$$f^*(t) = inf\{s > 0: \mu(\{\omega \in (0,\infty) : \ |f(\omega| > \ s\}) \leq t\}.$$

Егер $f, g \in L_0(0,\infty)$ функцияларына барлық $t \geq 0$ үшін

$$\int_0^t f^*(s)ds \leq \int_0^t g^*(s)ds$$

теңсіздігі орындалса, $f$ функциясы $g$ арқылы *субмажорланған* деп аталады және $f \leq g$ деп белгіленеді.

Бұл жұмыта, $M$ арқылы шынайы нормал жартылай-ақырлы $\tau$ ізі бар жартылай- ақырлы фон Нейман алгебрасын белгілейміз. Барлық $\tau$ - өлшемді операторлар жианын келесідей белгілейміз $L_0(M)$.

$x \in L_0(M)$ үшін $x$-тің үлестіру функциясы $\lambda(x)$ $t > 0$ үшін

$$\lambda_t(x) = \tau\left(e_{(t,\infty)}(|x|)\right), t > 0$$

түрінде анықталады, мұндағы $e_{(t,\infty)}(|x|)$ $|x|$-тың $(t,\infty)$ аралығындағы спектрал проекциясы, және $x$-тың қайта топтау функциясы $\mu(x)$ $t > 0$ үшін

$$\mu_t(x) = \inf\{s > 0 : \lambda_s(x) \leq t\}$$

түрінде анықталады.

Енді мынаны еске түсірейік: егер $M = \mathbb{M}_n$ болса және τ стандарт із болса, онда

$$\mu_t(x) = s_j(x), \ \ t \in [j-1, j), j = 1,2, \dots .$$

Осылайша, егер $x, y \in \mathbb{M}_n$, онда $\mu(y) \preceq \mu(x)$ теңсіздігі мынаған эквивалент болады:

$$\sum_{j=1}^{k} s_j(y) \leq \sum_{j=1}^{k} s_j(x), \qquad 1 \leq k \leq n.$$

## 2. Негізгі алынған нәтижелер

$n \in \mathbb{N}$ саны үшін, $\mathbb{M}_n(M)$ арқылы $Tr \otimes \tau$ ізімен берілген $\bigoplus_{j=1}^{n} H$ гильберт кеңістігіндегі жартылай ақырлы фон Нейман алгебрасын белгілейік:

$$\mathbb{M}_n(M) = \left\{ \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \cdots & x_{n,n} \end{pmatrix}, x_{i,j} \in M, i, j = 1,2, \dots, n \right\}.$$

Сонда,

$$L_0\big(\mathbb{M}_n(M)\big) = \mathbb{M}_n(L_0(M)).$$

$(e_{ij})$ деп $\mathbb{M}_n$-дегі канондық бірлік матрицалық элементтерді алайық, яғный $e_{ij}$ матрицасы $(i, j)$ кезінде нөлдік емес әрі 1-ге тең элементтері бар.

Егер $x \in L_0\big(\mathbb{M}_n(M)\big)$ болса, онда біз формалды түрде келесідей жаза аламыз:

$$x = \sum_{i=1, j=1}^{n} e_{ij} \otimes x_{ij}.$$

Мынадай белгілеу жасайық

$$C(x) = C\left( \sum_{i=1, j=1}^{n} e_{ij} \otimes x_{ij} \right) = \sum_{j=1}^{n} e_{jj} \otimes x_{jj}, \quad x \in L_0\big(\mathbb{M}_n(M)\big).$$

Олай болса,

$$C(x) = \sum_{j=1}^{n} e_{jj} \otimes x e_{jj} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (u^*)^j x u^j,$$

мұндағы $u = \sum_{j=1}^{n} \omega^j e_{jj}$ және $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. Сонымен келесі теңсіздікті аламыз:

$$\int_0^t \mu_s\big(C(x)\big) ds \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \int_0^t \mu_s((u^*)^j x u^j) ds$$

$$\leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \int_0^t \mu_s(x) ds = \int_0^t \mu_s(x) ds, \qquad t > 0.$$

Әрі келесі қорытындыны аламыз:

$$\mu\big(C(x)\big) \preceq \mu(x), \quad \forall x \in L_0\big(\mathbb{M}_n(M)\big). \tag{7}$$

**Лемма.** $x = e_{11} \otimes x_{11} \in L_0\big(\mathbb{M}_n(M)\big)$ болсын. Олай болса,

$$\mu_t(x) = \mu_t(x_{11})$$

теңдігі барлық $0 < t < \tau\ (1)$ үшін орынды.

**Теорема.** $x_1, x_2, \dots, x_n$операторлары $L_0(M)$-де оң операторлар болсын. Онда келесі субмажорланған байланыс орынды болады.

$$\mu\left(\sum_{j=1}^{n} e_{jj} \otimes x_j\right) \preccurlyeq \mu(\sum_{j=1}^{n} x_j).$$

**Қолданылған әдебиеттер тізімі**


1. Rotfel'd S. J. The singular values of a sum of completely continuous operators // Top. Math. Phys. V.3, 1969, P. 73-78.
2. Ando T. and Zhan X. Norm inequalities related to operator monotone functions // it Math. Ann. V.315, 1999, P. 771-780.
3. Bourin J.-C. and Uchiyama M. A matrix subadditivity inequality for f(A+B) and f(A)+f(B) // Linear Algebra Appl. V.423, 2007, P. 512-518.
4. Bourin J.-C. A matrix subadditivity inequality for symmetric norms // Proc. Amer. Math. Soc. V.138, 2010, P. 495-504.
5. Fack T., Kosaki H. Generalized s-numbers of τ -measurable operators // Pac. J. Math. V.123, 1986, P. 269-300.
6. Farenick D. R., Manjegani S. M. Young's inequalities in operator algebras // J. Ramanujan Math. Soc.V. 20 (2), 2005, P.107-124.
7. Han Y. Submajorization and p-norm inequalities associated with τ -measurable operators // Linear and Multilinear Algebra, V. 65 (11), 2017, P. 2199-2211.
8. Lord S., Sukochev F. A. and Zanin D. Singular traces, Theory and applications, De Gruyter Studies in Mathematics 46.
9. Pisier G. and Xu Q. Noncommutative Lp-spaces, Handbook of the geometry of Banach spaces, vol.2, 2003, P. 1459-1517.