1. Abylayeva A., Oinarov R., and Persson L.-E. Boundedness and compactness of a class of Hardy type operators. // Journal of Inequal. and Appl. (JIA), № 324, 2016.

УДК 519.651

КОМПЬЮТЕРНЫЙ (ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ) ПОПЕРЕЧНИК В ЗАДАЧЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ ПО ЗНАЧЕНИЯМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА

Карлыбай Жазира Газизкызы, Дуйсембаева Аягоз Орынбаевна
zhazira-karlibay@mail.ru
Магистрант 2 курса специальности «6М060100 – Математика»
Механико-математического факультета ЕНУ им. Л.Н. Гумилева,
г. Нур-Султан, Казахстан
Научный руководитель – Е.Е. Нурмолдин

В 2017 году математической научной общественностью было широко отмечено 100 летие существования преобразования Радона, начавшего отсчет в развитии со знаменитой публикации Иоганна Радона «Uber die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte l¨angs gewisser Mannigfaltigkeiten (Об определении функций по их интегральным значениям вдоль некоторых многообразий)», вышедшей в свет в трудах Саксонской академии наук [1]. Им был предложен метод восстановления (реконструкции) многомерных функций по их интегральным характеристикам. Аналоги этого преобразования, встречались и ранее, однако именно Радоном была получена формула обращения для отображения, сопоставляющего функции f на плоскости функцию F на множестве всех прямых на плоскости, равную интегралам от f вдоль всех прямых. Суть применения метода заключается в том, что по набору «изображений» прошедшего сквозь тело излучения требуется восстановить внутреннюю структуру тела. При просвечивании объекта интенсивность луча на выходе равна интегралу функции распределения плотности вещества вдоль траектории луча. Таким образом, регистрируемое излучение (радоновский образ или проекция), вычисленное под различными углами, позволяет посредством преобразования Радона восстановить изображение поперечного сечения объекта. Но при этом, необходимо отметить, что почти во всех областях применения первые исследователи не знали о первоначальной работе Радона. Следовательно, есть много «повторных открытий» результатов Радона в прикладной литературе. Эти повторные открытия закончились примерно в 1972 году, когда Аллен Кормак указал, что работа Радона была фундаментальной для проблемы реконструкции по проекциям. Но, стоит отметить, что после публикации формулы обращения Радона в журнале «Berichte Sächsische Akademie der Wissenschaften» в Лейпциге в 1917 году и до Нобелевской премии 1979 года в области медицины, присужденной Аллену М. Кормаку и Годфри Н. Хаунсфилду за их новаторский вклад в развитие компьютерной томографии прошло 62 года.

Нами изучается задача, заключающаяся в получении оценок сверху и оценок снизу (желательно совпадающих с точностью до констант) для величины (условия предполагаются такими, что имеют смысл все формулируемые определения)

$$\delta_N\left(0, D_N\right)_Y \equiv \delta_N\left(\mathrm{D}_N; T; F; 0\right)_Y = \min_{N_1+\ldots+N_k=N} \inf_{\left(l^{(N_1,\ldots,N_k)}, \varphi_N\right) \in D_{N_1,\ldots,N_k}} \delta_N\left(\left(l^{(N_1,\ldots,N_k)}, \varphi_N\right); T; F\right)_Y \quad (1)$$

– Компьютерного (вычислительного) поперечника по точной информации и в указании вычислительного агрегата, реализующего оценку сверху.

Тем самым, имеем две самостоятельные задачи, одна из которых заключается в получении оценок снизу погрешности восстановления всех вычислительных агрегатов из заданного множества D_N, другая – в нахождении оценок сверху для конкретных вычислительных агрегатов из D_N (построение которых, разумеется, можно продолжить с точки зрения улучшения вычислительных характеристик).

В более подробном изложении искомое соотношение

$$\delta_N\left(0, D_N\right)_Y \succ\prec \theta_N$$

состоит из двух задач, а именно требуется найти такую положительную числовую последовательность $\{\theta_N\}$, что выполнена

Оценка снизу $\delta_N(0;T;F;D_N)_Y \geq C_1\theta_N$: Для некоторого числа $C_1 > 0$, для последовательности целых положительных N и для всякого вычислительного агрегата $\left(l^{(N)}, \varphi_N\right)$ из D_N найдутся функция $\bar{f} \in F$, для которой

$$\left\| T\bar{f}(\cdot) - \varphi_N\left(l_1(\bar{f}),...,l_N(\bar{f});\cdot\right)\right\|_Y \geq C_1\theta_N$$

и, одновременно

Оценка сверху $\delta_N(0;T;F;D_N)_Y \leq C_2\theta_N$: для некоторого $C_2 > 0$ и для всякого N из достаточно плотной (в связи с необходимостью указания конкретного вычислительного агрегата) возрастающей последовательности целых положительных чисел найдутся вычислительный агрегат $\left(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N\right) = \bar{\varphi}_N\left(\bar{l}_1(f),...,\bar{l}_N(f);\cdot\right)$ из D_N такой, что для всякой функции $f \in F$ выполнено неравенство

$$\left\| Tf(\cdot) - \bar{\varphi}_N\left(\bar{l}_1(f),...,\bar{l}_N(\bar{f});\cdot\right)\right\|_Y \leq C_1\theta_N.$$

Различные постановки задач восстановления функций получаются при различном выборе множества вычислительных агрегатов D_N, т.е. наборов функционалов $l_1,...,l_N$ и алгоритмов переработки числовой информации φ_N, порождает многочисленные постановки задач исследованию, которых посвящен ряд работ (см. например, [8-12] и имеющуюся в них литературу).

В данной работе в качестве функционалов используются значения преобразования Радона, обзор основных сведений о котором может быть найден в монографиях [2-5]. В последнее время количество работ, посвященных приближенных вычислениям с использованием преобразований Радона, неуклонно растет. Отметим только некоторые из них, наиболее близкие нашей тематике исследований. Одной из первых работ по приближению функций на основе значений их некоторых преобразований Радона является работа Marr [6]. В этой работе найдено значение наилучшего приближения преобразования Радона алгебраическими многочленами. Стоит привести работу Ф.Неттерейтера [7], в которой рассматривается задача восстановления функции плотности (принадлежищей классу Соболева порядка r>2) плоского изображения по ее линейным интегралам в метрике $Y = L^2(0,1)^S$.

Конкретизируем К(В)П -1– постановку по точной информации для преобразования Радона (1).

Преобразование Радона $R(\theta,t;f)$ ($s(s=2,3,\ldots)$-мерное) отображает функцию f, определенную в R^s во множество ее интегралов по гиперплоскостям $\tau(\theta,t)^{\perp}$ в R^s: если

$$\tau(\theta,t)=(\tau_1(\theta,t),\ldots,\tau_s(\theta,t)),\quad \begin{cases}\tau_1(\theta,t)=t\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{s-1},\\ \tau_j(\theta,t)=t\cos\theta_{j-1}\prod\limits_{k=j}^{s-1}\sin\theta_k \quad при\ j=2,3,\ldots,s-1,\\ \tau_s(\theta,t)=t\cos\theta_{s-1},\end{cases}$$

в которых сферический радиус t и сферические углы $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_{s-1}$ изменяются в пределах $t\ge 0, 0\le\theta_1<2\pi,\ 0\le\theta_j\le\pi$ при $j=2,3,\ldots,s-1$, то

$$f^*\equiv R(\theta,t;f)=\int\limits_{\tau(\theta,t)^{\perp}} f(y)dy.$$

Обратное преобразование Радона над f^*, естественно, возвращает к f (см., напр.,[4, теорема 2.1]).

Напомним, определение функциональных классов.

Классы Соболева $W_p^r(0,1)^s$ $(s=1,2,\ldots;\ r=0,1,\ldots;\ 1\le p\le+\infty)$ есть множество всех 1-периодических по каждой переменной функций $f(x)=f(x_1,\ldots,x_s)$, которые в случае r>0 вместе со своими частными производными до порядка r включительно принадлежат $L^p(0,1)^s$ и для которых выполнено неравенство

$$\|f\|_{W_p^r}\equiv\sum_{|\tau|=0}^{r}\sum_{\sum_{j=1}^{s}\tau_j=|\tau|}^{s}\left\|\frac{\partial^{|\tau|}}{\partial x_1^{\tau_1}\ldots\partial x_s^{\tau_s}}f\right\|_{L^p}\le 1,$$

а в случае r=0 полагаем $W_p^r(0,1)^s=L^p(0,1)^s$. Здесь ограничимся классами F функций, заданных на единичном шаре $\Omega_F=V_s$ в R^s, банаховы пространства $Y(V_s)$ и функции $\varphi_N(z_1,\ldots,z_N;\cdot)$ берутся такими как выше указано.

Из результатов [12], полученных для $\delta_N(F;L)_Y$, для преобразования Радона, вытекают следующие оценки снизу:

Теорема 1. Пусть дано целое положительное число $s\ge 2$. Тогда

а) если $2\le p\le q\le\infty$ и целое r> 0 такие, что

$$\frac{r}{s}-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)>0.$$

верно неравенство (N = 1,2,…)

$$\mathrm{N}^{-(r/s-(1/p-1/q))} << \delta_N\left(0; f; W_p^r(0,1)^s; L_N \times \varphi_N\right)_{L^q(0,1)^s} << \delta_N\left(0; f; W_p^r(0,1)^s; R\times\varphi_N\right)_{L^q(0,1)^s}, \qquad (2)$$

б) если $2 \le \mathrm{p} \le \mathrm{q} \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ и $r > 0$ такие, что $(N = 1,2,...)$

$$\frac{r}{s} - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) > 0.$$

верно неравенство

$$\mathrm{N}^{-(r/s-(1/p-1/q))} << \delta_N\left(0; f; B_p^r(0,1)^s; L_N \times \varphi_N\right)_{L^q(0,1)^s} << \delta_N\left(0; f; B_p^r(0,1)^s; R\times\varphi_N\right)_{L^q(0,1)^s}$$

Теорема 2. Пусть дано целое положительное число $s \ge 2$.

а) Пусть дано действительное число $r > \frac{1}{2}$. Тогда имеют место неравенства

$$\frac{\ln^{r(s-1)} N}{N^{r-1/2}} << \delta_N\left(0; f; SW_2^r(0,1)^s; L_N \times \varphi_N\right)_{L^\infty(0,1)^s} << \delta_N\left(0; f; SW_2^r(0,1)^s; R\times\varphi_N\right)_{L^\infty(0,1)^s} \ (N = 2,3,...);$$

б) Пусть дано целое положительное число r. Тогда имеют место неравенства

$$\frac{\ln^{r(s-1)} N}{N^{r}} << \delta_N\left(0; f; SW_2^r(0,1)^s; L_N \times \varphi_N\right)_{L^2(0,1)^s} << \delta_N\left(0; f; SW_2^r(0,1)^s; R\times\varphi_N\right)_{L^2(0,1)^s} \ (N = 2,3,...).$$

Теорема 3. Пусть дано целое положительное число $s \ge 2$, $1 \le q \le p \le 2$ и целое положительное число r. Тогда имеют место неравенства

$$\mathrm{N}^{-r/s} << \delta_N\left(0; f; W_p^r(0,1)^s; L_N \times \varphi_N\right)_{L^q(0,1)^s} << \delta_N\left(0; f; W_p^r(0,1)^s; R\times\varphi_N\right)_{L^q(0,1)^s} \ (N = 1,2,...).$$

Таким образом, в К(В)П-постановке Радоновская проблематика сводится к оценкам сверху величины (1), с последующим нахождением в рамках К(В)П-2 предельной погрешности восстановления по числовым значениям преобразования Радона, с завершением в К(В)П-3.

Модельная ситуация: точный порядок К(В)П-аппроксимации Радоновыми преобразованиями. Справедлива

Теорема 4. Пусть даны числа $r > 1/2$ и $2 \le q \le \infty$.

Тогда при $s = 2$ для $N = n^2$ $(n = 2,3,...)$ справедливы соотношения

$$\delta_N\left(0; f; W_2^r(0,1)^2; L_N \times \varphi_N\right)_{L^q(0,1)^2} \succ\prec \inf_{\substack{\left(\theta^{(j)}, t^{(j)}\right)_{(j=1,\ldots,N)} \\ \varphi_N}} \sup_{f \in W_2^r(0,1)^2} \left\| f(x) - \varphi_N\left(R\left(\left(\theta^{(1)}, t^{(1)}\right); f\right), \ldots, R\left(\left(\theta^{(N)}, t^{(N)}\right); f\right); \cdot\right) \right\|_{L^q(0,1)^2} \succ\prec$$

$$\succ\prec \sup_{f \in W_2^r(0,1)^2} \left\| f(x) - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} R\left(\frac{2\pi}{n} k, \frac{1}{n} j; f\right) D_N^*\left(x - \left(\frac{2\pi}{n} k, \frac{1}{n} j\right)\right) \right\|_{L^q(0,1)^2} \succ\prec N^{-\frac{r}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)}, \quad (7)$$

где $D_N(x_1, x_2) = D_n(x_1) \cdot D_n(x_2)$, $D_n(z) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos 2\pi kz$.

В заключение, отметим, что нами рассмотрена постановка задачи К(В)П с использованием в качестве числовой информации – значений преобразования Радона функций. Основные результаты заключаются в полученных оптимальных порядковых оценок для величины погрешности восстановления функции из классов Соболева. Научные работы проведены в рамках грантового финансирования МОН РК проекта AP05132938 «Преобразование Радона в задачах дискретизации».

Список использованных источников

11. J. Radon, Uber die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten. Berichte Sächsischte Akademie der Wissenschaften, Leipzig, Math.-Phys. Kl., 69 (1917), 262-277.
12. Special issue on 100 years of the Radon transform // Inverse Problems, Volume 33-35.
13. Deans S.R., The Radon Transform and some of its Applications. Wiley, 1983.
14. Наттерер Ф., Математические аспекты компьютерной томографии, Пер. с англ., Москва, Изд-во Мир, 1990, 288 с.
15. Хелгасон С. Преобразование Радона: Пер. с англ. М.: Мир, - 1983. 152 с.
16. Marr R. On the reconstruction of a function on a circular domain from a sampling of its line integrals // J. Math. Anal. Appl. -1974. - №. 45. С.357-374.
17. Naterrer F. A Sobolev Space Analysis of Picture Reconstruction // SIAM Journal on Applied Mathematics. -1980. -V. 39 - № 3. pp. 402-411.
18. Темиргалиев Н. Теоретико-числовые методы и теоретико-вероятностный подход к задачам анализа. Теория вложений и приближений, абсолютная сходимость и преобразования рядов Фурье // Вестник Евразийского университета. – 1997. – № 3. –С. 90-144.
19. Темиргалиев Н. Компьютерный (вычислительный) поперечник. Алгебраическая теория чисел и гармонический анализ в задачах восстановления (метод квази-Монте Карло). Теория вложений и приближений. Ряды Фурье // Вестник ЕНУ им. Л.Н.Гумилева. Спец. выпуск, посвященный научным достижениям математиков ЕНУ им. Л.Н.Гумилева. – Астан, 2010. – С.1-194.
20. Темиргалиев Н., Жубанышева А.Ж. Теория приближений, Вычислительная математика и Численный анализ в новой концепции в свете Компьютерного (вычислительного) поперечника// Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика. Информатика. Механика. -2018. -Т. 124, №3. -С. 8-88.
21. Темиргалиев Н., Жубанышева А.Ж. Компьютерный (вычислительный) поперечник в контексте общей теории восстановления// Известия ВУЗов. Математика. -2019. -№1. -С. 89-97.

22. Н. Темиргалиев, А. Ж. Жубанышева, Порядковые оценки норм производных функций с нулевыми значениями на линейных функционалах и их применения // Изв. вузов. Матем. - 2017. - №3. –С. 89–95.

УДК 517

ТРАНСПОРТ ТЕҢДЕУІНЕ СӘЙКЕС ҚИСЫНДЫ ТАРЫЛУЛАР МЕН КЕҢЕЮЛЕРДІҢ СПЕКТРАЛДЫҚ ҚАСИЕТТЕРІ

Қамбыл Айжан Бауыржанқызы
aizhankb_z97@mail.ru
Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ «6М060100-математика» мамандығының 2 курс магистранты, Нұр-Сұлтан, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі – Бияров Б.Н.

Транспорт теңдеуінің жалпы түрі келесідей болатын дербес туындылы дифференциал-дық теңдеулер:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \nabla u(x,t) = f(x,t)$$

Ізделінді функция $u(x,t)$ екі айнымалыдан тәуелді. t айнымалысының мән қабылдау аралығы $[0,+\infty)$ болса, ал x айнымалысының мән қабылдау жиыны R^n кеңістігіндегі қандай да бір облыс, яғни $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ түріндегі векторлар жиыны. Бұл теңдеудің бір өлшемді жағдайы келесідей болады:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = f(x,t)$$

Жұмыстың мақсаты транспорт теңдеуі үшін максимал және минимал операторларды анықтау. Белгілі бір қисынды есеп табу керек. Сол қисынды оператор арқылы барлық қисынды тарылулуар мен кеңеюлерді сипаттау. Гильберт кеңістігіндегі L сызықты тұйық операторы үшін

1) $D(L) = D(L^*)$,
2) $\forall f \in D(L)$: $\|Lf\| = \|L^* f\|$

шарттары орындалса, онда L операторын қалыпты оператор деп атайды.

$L_2(\Omega)$ гильберт кеңістігінде анықталған,

$$D(L) = \{u \in D(\hat{L}): \quad u(x,0) + u(x,1) = 0 \quad u(0,t) + u(1,t) = 0\}$$

анықталу облысымен берілген $L = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t}$ операторын қарастырайық. Біздің жағдайда Ω облысы ретінде $[0,1] \times [0,1]$ шаршысын алдық. Ал $\hat{L}$ максималдық операторының анықталу облысы $D(\hat{L}) = \left\{u \in L_2(\Omega): \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t}\right) u \in L_2(\Omega)\right\}$ түрінде анықталған. Яғни