ӘОЖ 517.956.4

НҰҚСАНДЫ ЖЫЛУӨТКІЗГІШТІК ТЕҢДЕУІНЕ ҚОЙЫЛҒАН КӨПӨЛШЕМДІ КЕРІ ЕСЕПТЕР

Қаразым Мұхтар
Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУ магистранты, Нұр-Сұлтан, Қазақстан
mukhtarkarazym@gmail.com
Ғылыми жетекшісі – Оспанов Қ.Н.

Нұқсанды параболалық типті теңдеуге қойылған Коши есебі келесі түрде болады

$$\Diamond_a u(x,t) = \partial_t u(x,t) - a(t)\Delta_x u(x,t) = 0, \quad x \in R^n,\ 0 < t \le T < \infty, \tag{1}$$

$$u(x,0) = \Phi(x), \quad x \in R^n, \tag{2}$$

мұндағы,

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \notin \Omega \end{cases} \tag{3}$$

$\varphi \in L_1(\Omega)$ және $\operatorname{supp}(\varphi) \subset \Omega$. Негізгі коэффициент α кейбір нүктелерде нөлге тең болуы мүмкін және / немесе кейбір интервалда теріс мәндерді қабылдауы мүмкін. (1-2) Коши есебінің шешімі Фурье түрлендіруі арқылы табылып, Пуассон интегралы арқылы беріледі және ол жалғыз ([4]).

Бізге белгілі алдыңғы зерттеулерде негізгі коэффициент тек бір-екі нүктелерде ғана нөлге айналды, яғни процестің басталуы моменті мен аяқталуында, дегенмен, жоғарыда айтып өткендей, біздің жағдайда интервалда теріс мәнді де қабылдай алады. Біздің жағдайда анықталу облысының бір нүктесінде екі Коши есебінің шешімінің мәліметі ғана жеткілікті.

(1) теңдеуінің бір өлшемді жағдайында осы теңдеуге қойылған бастапқы шекаралық кері есепті қарастырған автор Игорь Малышев [2] болып табылады. Осы жұмыста [2] еңбектің нәтижелеріне ішінара сүйенеміз. Ескере кететін жайт, осы нәтижелерді біртекті емес теңдеуге дейін жалғастырамыз. Көпөлшемді кері есептеріміз нұқсанды мен нұқсанды емес жағдайларды да қамтиды. Нұқсанды емес (қатаң) параболалық типті теңдеулер үшін кері есептер [1], [3] монографияларында қарастырылған.

Алдыңғы тараудағыдай, $\Omega \subseteq R^n$, $n \ge 2$ ашық, шенелген жиын болсын. q нүктесі Ω жиынының бекітілген нүктесі болсын. Келесі екі Коши есептерін қарастырайық

$$\partial_t u_1(x,t) - a(t)\Delta_x u_1(x,t) = 0, \quad x \in R^n,\ 0 < t \le T < \infty, \tag{4}$$

$$u_1(x,0) = \Phi(x), \quad x \in R^n, \tag{5}$$

және $q \in \Omega$ нүктесіндегі қосымша мәлімет

$$u_1(q,t) = h_1(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{6}$$

ал екіншісі, $$\partial_t u_2(x,t) - a(t)\Delta_x u_2(x,t) = 0, \quad x \in R^n,\ 0 < t \le T < \infty, \tag{7}$$

$$u_2(x,0) = \Delta_x \Phi(x), \quad x \in R^n, \tag{8}$$

және $q \in \Omega$ нүктесіндегі қосымша мәлімет $$u_2(q,t) = h_2(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{9}$$

мұндағы $\Phi \in C^2$ функциясы (3) формуласымен анықталған, h_1, h_2 берілген мәліметтер, α белгісіз коэффициент.

Теорема 1 Айталық (3) формуласымен анықталған Φ функциясы C^2 класында жатсын. $h_1 \in C^1[0,T]$ мен барлық $0 \le t \le T$ үшін $h_2(t) \ne 0$ болатындай h_2 функциясы $C[0,T]$ класында жатсын. h_2 функциясының шарттары

$$u_2(x,0)|_{x=q} = \Delta_x \Phi(x)|_{x=q} = h_2(0) \ne 0,$$

шартын да қамтиды

Сондай-ақ, h_1 мен h_2 функциялар барлық $0 < t \le T$ үшін келесі теңсіздікті

$$\int_0^t \frac{h_1'(\tau)}{h_2(\tau)} d\tau > 0, \tag{10}$$

қанағаттандырсын. Онда (4-9) кері есебінің сәйкес жалғыз

$$a(t) = \frac{h_1'(t)}{h_2(t)}$$

диффузия коэффициенті мен жалғыз (u_1, u_2) шешімі бар.

Келесі екі Коши есептерін қарастырайық

$$\partial_t u_1(x,t) - a(t)\Delta_x u_1(x,t) = F(x,t), \quad x \in R^n,\ 0 < t \le T < \infty, \tag{14}$$

$$u_1(x,0) = \Phi(x), \quad x \in R^n, \tag{15}$$

және $q \in \Omega$ нүктесіндегі қосымша мәлімет

$$u_1(q,t) = h_1(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{16}$$

ал екіншісі,

$$\partial_t u_2(x,t) - a(t)\Delta_x u_2(x,t) = \Delta_x F(x,t), \quad x \in R^n,\ 0 < t \le T < \infty, \tag{17}$$

$$u_2(x,0) = \Delta_x \Phi(x), \quad x \in R^n, \tag{18}$$

және $q \in \Omega$ нүктесіндегі қосымша мәлімет

$$u_2(q,t) = h_2(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{19}$$

мұндағы,

$$F(x,t) = \begin{cases} f(x,t), & x \in \Omega,\ t \in [0,T] \\ 0, & x \notin \Omega,\ t \in [0,T] \end{cases} \tag{20}$$

мұндағы $f(x,t) \in L_1\left(R^n \times (0,T)\right)$, $\operatorname{supp} f(\cdot,t) \subset \Omega,\ t \in [0,T]$ және $\Phi \in C^2$ функциясы (3) формуласымен анықталған, h_1, h_2 берілген мәліметтер, α белгісіз коэффициент.

Теорема 2 Айталық (3) формуласымен анықталған Φ функциясы C^2 класында жатсын және (20) формуласымен анықталған f функциясы $C^{2,0}$ класында жатсын. $h_1 \in C^1[0,T]$ мен барлық $0 \le t \le T$ үшін $h_2(t) \ne 0$ болатындай h_2 функциясы $C[0,T]$ класында жатсын. h_2 функциясының шарттары

$$u_2(x,0)\,|_{x=q} = \Delta_x \Phi(x)\,|_{x=q} = h_2(0) \ne 0,$$

шартын да қамтиды

Сондай-ақ, h_1 мен h_2 функциялар барлық $0 < t \le T$ үшін келесі теңсіздікті

$$\frac{h_1'(t) - f(q,t)}{h_2(t)} \ge 0, \tag{21}$$

қанағаттандырсын. Онда (4-9) кері есебінің сәйкес жалғыз $a(t) = \dfrac{h_1'(t) - f(q,t)}{h_2(t)}$

диффузия коэффициенті мен жалғыз (u_1, u_2) шешімі бар.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1 M. M. Lavrentiev, V. G. Romanov and V. G. Vasiliev. Multidimensional Inverse Problems for Differential Equations, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

2 I. Malyshev. On the inverse problem for a heat-like equation, J. of Appl. Math. and Simulation Vol. 1, No. 2, 81-97, 1987.

3 A. I. Prilepko, D. G. Orlovsky and I. A. Vasin. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics, New York: Dekker, 2000.

4 M. Karazym and D. Suragan, On inverse problems of recovering the thermal diffusivity in multidimensional degenerate parabolic equations, pre-print.