Пусть $\mathrm{Fr}^+(X)$- Δ-PJ фрагмент йонсоновского множества X в счетном языке первого порядка сигнатуры σ. Пусть C является семантической моделью теории $\mathrm{Fr}^+(X)$. Пусть $X \subseteq C$ есть Δ-PJ множество теории $\mathrm{Fr}^+(X)$. Пусть $\sigma_\Gamma(X) = \sigma \cup \{c_a | a \in X\} \cup \Gamma, \Gamma = \{P\} \cup \{c\}$.

Пусть $\mathrm{Fr}^+(X)_X^C = \mathrm{Fr}^+(X) \cup \mathrm{Th}_{\forall\exists^+}(C, a)_{a\in X} \cup \{P(c_a) | a \in X\} \cup \{P(c)\} \cup \{''P \subseteq''\}$, где $\{''P \subseteq''\}$ есть бесконечное множество предложений, выражающих тот факт, что интерпретация символа P есть экзистенциально-замкнутая подмодель в языке сигнатуры σ. Рассмотрим все пополнения центра $(\mathrm{Fr}^+(X))^*$ для фрагмента $\mathrm{Fr}^+(X)$ в языке сигнатуры σ_Γ,где $\Gamma = \{c\}$.Так как $(\mathrm{Fr}^+(X))^*$ является $\Delta - PJ$ теорий, она имеет свой центр и мы обозначим его через $(\mathrm{Fr}^+(X))^C$. При ограничении теории $(\mathrm{Fr}^+(X))^C$ до сигнатуры σ теория $(\mathrm{Fr}^+(X))^C$ становится полным типом. Этот тип мы и назовем центральным типом фрагмента $\mathrm{Fr}^+(X)$. Заметим, что все семантические модели элементарно эквивалентны между собой.

Пусть $(\mathrm{Fr}^+(X))^*$ является центром $\Delta - PJ$ теории ${(\mathrm{Fr}^+(X))_X}^C$и $(\mathrm{Fr}^+(X))^* = \mathrm{Th}_{\forall\exists^+}(C')$, где C' есть семантическая модель теории${(\mathrm{Fr}^+(X))_X}^C$. При ограничении теории ${(\mathrm{Fr}^+(X))_X}^C$ до сигнатуры $\sigma_\Gamma(X)\backslash\{c\}$теория ${(\mathrm{Fr}^+(X))_X}^C$становится полным типом. Этот тип мы и назовем центральным типом теории $\mathrm{Fr}^+(X)$ относительно йонсоновского множества X.

Далее все рассматриваемые Δ-PJ фрагменты будут модулярными и наследственными.

Теорема 1. Если ${(\mathrm{Fr}^+(X))_X}^C$- Δ-PJ теория ω −категорична, то $\mathrm{Fr}^+(X)$ совершенна.

Теорема 2. Если ${(\mathrm{Fr}^+(X))_X}^C$- Δ-PJ теория κ −категорична, то $\#$- компаньон для $(\mathrm{Fr}^+(X))^*$ κ −категоричен, $\kappa \geq \omega$. Все неопределенные в данной работе понятия можно извлечь из [4].

Список использованных источников

13. Itay Ben-Yaacov. Compactness and independence in non first order frameworks /I. Ben-Yaacov // Bulletin of Symbolic logic.—2005. — Vol. 11. — No.1. — P. 28-50.
14. Itay Ben-Yaacov. Fondements de la Logique positive /B. Poizat, I. Ben-Yaacov // Journal of Symbolic Logic. —2007. — Vol. 72.— P. 1141-1162.
15. A.R. Yeshkeyev, M.T. Omarova Central types of convex fragments of the perfect Jonsson theory // Bulletin of the Karaganda University, 1:93 (2019), 95–101.
16. А.Р. Ешкеев, М.Т. Касыметова Йонсоновские теории и их классы моделей // Изд-во КарГУ, Караганда (2016).

УДК 512.74

КОНГРУЭНЦИЯЛЫҚ ІШКІ ТОПТАРДАҒЫ МӘСЕЛЕЛЕР

Садуақас Айнұр Нұржанқызы

saduakasovaa2018@mail.ru

Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия Ұлттық Университетінің магистранты, Нұр-Сұлтан, Қазақстан

Ғылыми жетекшісі – Е.Р.Байсалов

Жалпы топ, группа ұғымдары күнделікті өмірде, ауызекі тілімізде қолданыста бар. Топ ұғымы барлық салада қолданылады, соның ішінде: математикада, психологияда, әлеуметтану мен саясаттану салаларында, менеджмент және т.б. Бұл салалардың көбісінде топ деп белгелі бір іс-әрекеттерімен сипатталатын адамдар жиынын атайды. Ал математика жалпы түрде қарастырады, яғни топтың элементтері тек адамдармен шектелмейді. Топтар теориясы математикада және оның қолданбалы салаларында жиі кездесетін амалдарды мейлінше жалпыланған түрде зерттейді.

Алдымен топ терминінің математикалық тілдегі нақты анықтамасын түсіндіре кетейік: Бір бинарлық алгебралық амалы бар $< G; *>$ алгебралық жүйе төмендегі шарттарды қанағаттандырса,

a) " $*$ "- ассоциативті, яғни $(x * y) * z = x * (y * z)$
b) $\exists\ e\epsilon G: \forall x\epsilon G$ үшін $x * e = e * x = x$
c) $\forall x\epsilon G$ үшін $\exists x^{-1}\epsilon G: x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$

орындалатын болса, онда $< G; *>$ алгебралық жүйе ***топ*** деп аталады.

Енді ішкі топ ұғымына тоқталайық. $< G; *> -$топ, $H \subset G, H -$ ішкі жиыны. Егер H жиыны сол амалға қатысты топ болса, онда H – G тобының ***ішкі тобы (подгруппа)*** деп аталады.

$SL_2(Z)$ тобындағы Γ ішкі тобы конгруэнциялық ішкі топ болып табылады, егер $\Gamma(N) \subset \Gamma$ кейбір $N \in Z^+$үшін болса, және осы жағдайда Γ N дәреженің **конгруэнциялық ішкі тобы** болады. Осылайша, әрбір Γ конгруэнциялық ішкі топ $SL_2(Z)$ тобында ақырлы индекс болады. Конгруэнциялық ішкі топтардың ең маңыздылары болып келесілерді айтуға болады:

$$\Gamma_0(N) = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(Z): \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & * \end{bmatrix} (mod\ N)\right\}$$

(мұндағы «*» - белгісіз) және

$$\Gamma_1(N) = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(Z): \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (mod\ N)\right\},$$

қанағаттандыратын

$$\Gamma(N) \subset \Gamma_1(N) \subset \Gamma_0(N) \subset SL_2(Z).$$

Лемма. Барлық $\gamma, \gamma' \in SL_2(Z)$ және $\tau \in \mathcal{H}$ үшін

(a) $j(\gamma\gamma', \tau) = j(\gamma, \gamma'(\tau))j(\gamma', \tau)$,
(b) $(\gamma\gamma')(\tau) = \gamma(\gamma'(\tau))$,
(c) $[\gamma\gamma']_k = [\gamma]_k[\gamma']_k$ (бұл операторлар теңдігі)
(d) $\mathrm{Im}(\gamma(\tau)) = \frac{\mathrm{Im}(\tau)}{|j(\gamma,\tau)|^2}$,
(e) $\frac{\mathrm{d}\gamma(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{j(\gamma,\tau)^2}$ орындалады.

Дәлелдеуі. Әрбір $\gamma \in SL_2(Z)$ элементі үшін көбейту арқылы баған векторларына әсер етеді және бөлшектік сызықты түрлену ретінде осы қимылдардың байланысы арасындағы матрицаның элементтерімен есептеледі,

$$\gamma \begin{bmatrix} \tau \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{h} \begin{bmatrix} \gamma(\tau) \\ 1 \end{bmatrix} j(\gamma, \tau).$$

Бұл сәйкестікті бірнеше рет қолдану арқылы алатынымыз:

$$\gamma\gamma' \cdot \begin{bmatrix} \tau \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\gamma\gamma')(\tau) \\ 1 \end{bmatrix} j(\gamma\gamma', \tau),$$

$$\gamma \cdot \gamma'^{\begin{bmatrix} \tau \\ 1 \end{bmatrix}} = \gamma \begin{bmatrix} \gamma'(\tau) \\ 1 \end{bmatrix} j(\gamma', \tau) = \begin{bmatrix} \gamma\big(\gamma'(\tau)\big) \\ 1 \end{bmatrix} j\big(\gamma, \gamma'(\tau)\big) j(\gamma', \tau).$$

Сол жақтағылар тең, демек оң жақ та. Оң жақ төменгі кірістерді туралау (a) бөлігін дәлелдейді, содан кейін жоғарғы кірістерді теңестіру (b) бөлігін дәлелдейді. Бұдан әрі әрбір $f: \mathcal{H} \to C$ үшін есептейміз

$$(f[\gamma\gamma']_k)(\tau) = j(\gamma\gamma', \tau)^{-k} f\big((\gamma\gamma')(\tau)\big), \big((f[\gamma]_k)[\gamma']_k\big)(\tau) = j(\gamma', \tau)^{-k} (f[\gamma]_k)\big(\gamma'(\tau)\big) =$$

$$= j(\gamma', \tau)^{-k} j\big(\gamma, \gamma'(\tau)\big)^{-k} f\big(\gamma\big(\gamma'(\tau)\big)\big).$$

Оң жақтары (a) және (b) бөліктері бойынша тең, демек сол жақтар да (c) бөлігін дәлелдейді. (d) және (e) бөліктері үшін γ элементінің жанындағылармен қатынасының екі көшірмесін салыстырамыз:

$$\gamma \begin{bmatrix} \tau & \tau' \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma(\tau) & \gamma(\tau') \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j(\gamma, \tau) & 0 \\ 0 & j(\gamma, \tau') \end{bmatrix}.$$

Анықтауыштарды алып, $\tau' \to \tau$ орнына қойсақ, (e)-ні аламыз. $\tau' = \bar{\tau}$ (комплексті жұптастыру), $\gamma(\bar{\tau}) = \overline{\gamma(\tau)}$ және $j(\gamma, \bar{\tau}) = \overline{j(\gamma, \tau)}$ деп қабылдап, (d) бөлігін аламыз.

Конгруэнциялық ішкі топтардағы проблемалар:

Бірінші сұрақ: $SL_n(Z)$-дағы ақырлы индекстің барлық ішкі топтары конгруэнцияның ішкі тобы болады ма? Конгруэнциялық ішкі топтардың санының өте көп болуына байланысты, сонымен қоса олардың қиылысуы сәйкестендіру элементтерінен тұратын болғандықтан, бұл сұрақ ерекше назар аударуды талап етеді. XIX ғасырдың соңында Фрике мен Кляйн егер $n = 2$ болса, онда бұл сұрақтың жауабы теріс болатынын көрсетті. Расымен де, рангі 2 еркін топ 2-дәрежелі $\Gamma(2)$ тобының басты конгруэнциялық ішкі тобы болады, кез келген 2-туындаушы ақырлы топ осы топтың бөлігі болып табылады. Бірақ $\Gamma(2)$ тобының бөлігі болатындай, сәйкес ядросы $SL_2(Z)$ конгруэнциялық ішкі тобы бола алмайтын ақырлы, жай 2-туындаушы топтар көп.

$SL_2(Z)$ индексі бойынша конгруэнцияланбайтын ішкі топтар бар. $SL_2(Z)$ -те конгруэнциялық ішкі топтарға қарағанда, конгруэнциялық емес ішкі топтардың ақырлы индексі көп екенін көрсетуге болады. 1962 жылы Басс-Лазард-Серр мен Меннике бұл сұрақтың жауабы $n \geq 3$ болғанда дұрыс болатынын көрсетті. Соңынан 1965 жылы Басс- Мильнор-Серр мұны арнайы сызықтық және симплектикалық топтарға жинақтаған.

Меннике кейінірек, $SL_2(Z[1/p])$ тобының ақырлы индексті ішкі топтары конгруэнц-ішкі топ болатынын көрсетті, және бұл $SL(2, Z)$ тобындағы Гекке операторы тек қана конгруэнц-ішкі топтарда болады деп тұжырымдаудың басты себебі болып табылады.

$SL(2, Z)$ 2×2 квадрат матрицада анықтауышы 1 болатын тобы – бұл математикада әртүрлі контексте өсетін топ. Нормальды ішкі топтардың табиғи жиыны(ақырлы индексті). Егер $I \subset Z$-нөлдік емес идеал болса, онда $\{g \in SL(2, Z) | g \equiv 1 (mod\ I)\}$ ішкі тобы ақырлы индексінің ішкі тобы болып табылады, біз оны $SL(2, I)$ деп белгілейміз. Ақырлы $SL(2, Z/I)$ тобына $SL(2, Z)$ тобының табиғи гомоморфизмінің енуінің ядросы екені анық. XIX ғасырдың соңына қарай ақырлы индексті нормальді ішкі тобының басқа да мысалдарының бар-жоғы туралы сұраққа жауап көтерілген болатын. Сонымен, Фрике-Кляйн мынадай ішкі топтардың сюръективті гомоморфизмін көрсетті: $\phi: SL(2, Z) \to A_5$ (5 символға кезектесетін топ).

$\Gamma = kernel\ \phi.$

Мысалы, ішкі топ сандар теориясындағы төртбұрышты квадраттың тапсырмасынан туындайды (егер ондай табылса). Берілген теріс емес бүтін n оң саны осы төртбұрышты квадраттың суммасы болуы мүмкін. Бұл тапсырманы шешу үшін k квадрат көмегімен n санын ұсыну арқылы теріс емес бүтін n мен k сандарын анықтаймыз.

$$r(n,k) = \# \{v \in Z^k : n = v_1^2 + \ ... \ + v_k^2\}.$$

Назар аударыңыз, егер $i + j = k$ болса, онда $r(n,k) = \sum_{l+m=n} r(l,i)r(m,j)$, n-ге қосылатын l және m мәндерінің қосындысы. Бұл ереже келесіге ұқсайды

$c_n = \sum_{l+m=n} a_l b_m$, екінші дәрежелі қатарлардың көбейтіндісіндегі формальды коэффициентке қатысты

$(\sum_{l=0}^{\infty} a_l q^l)(\sum_{m=0}^{\infty} b_m q^m) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n q^n$ болады.

Сонымен, n-дәрежелі қатардың $r(n,k)$ коэффициентімен сандарды көрсететін туындаушы функцияны қарастырамыз:

$$\theta(r,k) = \sum_{n=0}^{\infty} r(n,k)q^n, q = l^{2\pi i\tau}, \tau \in \mathcal{H}.$$

Түрлендірілген формуланы θ қанағаттандыратыны анық, $\theta(\tau+1,k) = \theta(\tau,k)$.

θ үшін осындай басқаша заңдылықты алу үшін $\theta(\tau,1)$-ға $\theta(\tau)$ жазып, орын ауыстыру жүзеге асуы үшін сандардың анықтамалары абсолютті бірігумен үйлесім табады

$$\theta(\tau) = \sum_{d\in Z} l^{2\pi i d^2 \tau}.$$

Бұл Пуассон формуласының сол жақ бөлігінің жиынтығына ұқсайды, $x = 0$ және $h(d) = e^{2\pi i d^2 \tau}$. Трансформациялау заңын ала отырып қорытынды жасаймыз:

$$\theta\left(-\frac{1}{4\tau}\right) = \sqrt{-2i\tau}\theta(\tau).$$

$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ матрицасы τ-дан $-1/(4\tau)$-ға дейінгі мәндерді қабылдайтын, анықтауышының мәндерінде 1 жоқ. Бірақ ол

$\begin{bmatrix} 0 & 1/4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, τ-дан $\tau/(4\tau+1)$ дейін қабылдайды. Түрлендіру мен түрлендірулердің заңдылықтарын қолдана отырып, θ келесіні береді:

$$\theta\left(\frac{\tau}{4\tau+1}\right) = \theta\left(-\frac{1}{4\left(-\frac{1}{4\tau}-1\right)}\right) = \sqrt{2i\left(\frac{1}{4\tau}+1\right)}\ \theta\left(-\frac{1}{4\tau}-1\right) =$$

$$= \sqrt{2i\left(\frac{1}{4\tau}+1\right)}\ \theta\left(-\frac{1}{4\tau}\right) = \sqrt{2i\left(\frac{1}{4\tau}+1\right)(-2i\tau)}\,\theta(\tau) = \sqrt{4\tau+1}\,\theta(\tau)\ .$$

Енді $\theta(\tau,4) = \theta(\tau)^4$ қатынасының көбейтіндісі төртбұрышты квадрат үшін екінші түрлендіруші формуласын береді:

$$\theta\left(\frac{\tau}{4\tau+1}, 4\right) = (4\tau+1)^2\theta(\tau,4).$$

яғни,

$$\theta(\gamma(\tau),4)=(c\tau+d)^2\theta(\tau,4),\ \gamma=\pm\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix} \text{ және } \gamma=\pm\begin{bmatrix}1&0\\4&1\end{bmatrix}.$$

Қорыта келе, конгруэнция (лат. congruens, congruentis – сәйкестік (совпадение))термині алгебра курсында да, геометрияда да қолданылады. Топтар тарауындағы конгруэнция тақырыбы көп адамға түсініксіз және математикадағы шешілмеген проблемалар ретінде қарастырылып келеді.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Borel A. and Harish-Chandra, Arithmetic subgroups of algebraic groups, Ann. Math. 75 (1962) 485-535
2. Kazhdan A.A. and Bernstein I.N, The one-dimensional cohomology of discrete subgroups, Funkcional. Anal. i Pril. 4(1970) 1-5
3. Raghunathan M. S., On the congruence subgroup problem I, Publ. Math. IHES 46 (1976) 107–161
4. Raghunathan M. S., On the congruence subgroup problem II, Inv. Math. 85 (1986) 73–117
5. Rapinchuk A. S., On the congruence subgroup problem for algebraic groups, Dokl. Akad. Nauk. SSSR 306 (1989) 1304–1307
6. Serre J-P, Le problem´ e des groupes de congruence pour SL2, Ann. Math. 92 (1970) 489–527
7. S. Axler, F.W. Gehring, K.A. Ribet, Graduate Texts in Mathrmatics 225, (2005) 512. 12-24

УДК 517

КОМПАКТНОСТЬ ОПЕРАТОРА ДРОБНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМ ВЕРХНИМ ПРЕДЕЛОМ

Сейлбеков Болат Нагашбекович
bolat_3084@mail.ru
Докторант, ЕНУ им.Л.Н.Гумилева, г.Нур-Султан, Казахстан
Научный руководитель – А.М.Абылаева

Введение. Пусть $0<p,q<\infty$, $p>1$ и v, w-весовые функции т.е. неотрицательные, измеримые и локально суммируемые на $I=(0,+\infty)$. Далее $v\in L_1^{loc}(I)$, $w\in L_1(0,t)$, $\forall t>0$. Положим $W(x)=\int\limits_0^x w(s)ds,\quad x>0$. Функция φ строго возрастающая локально абсолютно непрерывная функция со свойством: $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=\infty$, $\forall x\in I$.

В этой работе рассмотрим вопрос о компактности из $L_{p,w}\equiv L_{p,w}(I)$ в $L_{q,v}\equiv L_{q,v}(I)$ интегрального оператора

$$T_\varphi f(x)=\int\limits_0^{\varphi(x)}\frac{u(s)W^\beta(s)f(s)w(s)ds}{\left(W(x)-W(s)\right)^{1-\alpha}},\quad \varphi(x)\le x,\quad x\in I, \tag{1}$$