$$\theta(\gamma(\tau),4) = (c\tau + d)^2\theta(\tau,4),\ \gamma = \pm\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix} \text{ және } \gamma = \pm\begin{bmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{bmatrix}.$$

Қорыта келе, конгруэнция (лат. congruens, congruentis – сәйкестік (совпадение))термині алгебра курсында да, геометрияда да қолданылады. Топтар тарауындағы конгруэнция тақырыбы көп адамға түсініксіз және математикадағы шешілмеген проблемалар ретінде қарастырылып келеді.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Borel A. and Harish-Chandra, Arithmetic subgroups of algebraic groups, Ann. Math. 75 (1962) 485-535
2. Kazhdan A.A. and Bernstein I.N, The one-dimensional cohomology of discrete subgroups, Funkcional. Anal. i Pril. 4(1970) 1-5
3. Raghunathan M. S., On the congruence subgroup problem I, Publ. Math. IHES 46 (1976) 107–161
4. Raghunathan M. S., On the congruence subgroup problem II, Inv. Math. 85 (1986) 73–117
5. Rapinchuk A. S., On the congruence subgroup problem for algebraic groups, Dokl. Akad. Nauk. SSSR 306 (1989) 1304–1307
6. Serre J-P, Le problem´ e des groupes de congruence pour SL2, Ann. Math. 92 (1970) 489–527
7. S. Axler, F.W. Gehring, K.A. Ribet, Graduate Texts in Mathrmatics 225, (2005) 512. 12-24

УДК 517

КОМПАКТНОСТЬ ОПЕРАТОРА ДРОБНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМ ВЕРХНИМ ПРЕДЕЛОМ

Сейлбеков Болат Нагашбекович

bolat_3084@mail.ru

Докторант, ЕНУ им.Л.Н.Гумилева, г.Нур-Султан, Казахстан

Научный руководитель – А.М.Абылаева

Введение. Пусть $0 < p,q < \infty$, $p > 1$ и v, w-весовые функции т.е. неотрицательные, измеримые и локально суммируемые на $I = (0,+\infty)$. Далее $v \in L_1^{loc}(I)$, $w \in L_1(0,t)$, $\forall t > 0$. Положим $W(x) = \int_0^x w(s)ds,\quad x > 0$. Функция φ строго возрастающая локально абсолютно непрерывная функция со свойством: $\lim_{x\to 0}\varphi(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty}\varphi(x) = \infty$, $\forall x \in I$.

В этой работе рассмотрим вопрос о компактности из $L_{p,w} \equiv L_{p,w}(I)$ в $L_{q,v} \equiv L_{q,v}(I)$ интегрального оператора

$$T_\varphi f(x) = \int_0^{\varphi(x)} \frac{u(s)W^\beta(s) f(s)w(s)ds}{\left(W(x) - W(s)\right)^{1-\alpha}}, \quad \varphi(x) \le x,\quad x \in I, \tag{1}$$

где $L_{p,w}$ - пространство всех измеримых на I функции таких, что

$$\|f\|_{p,w}=\left(\int_0^\infty |f(s)|^p w(s)ds\right)^{\frac{1}{p}}<\infty,\ 0<p<\infty.$$

Когда весовая функция $u(s)=1$ и $\beta=0$ ограниченность и компактность интегрального оператора (1) исследовано в работе [1].

При $\varphi(x)=x$ критерий ограниченности и компактности получены в работе [2].

При $\varphi(x)=x$, а $\alpha\geq 1$ вопрос ограниченности и компактности оператора (1) из $L_{p,w}$ в $L_{q,v}$ вытекает из результатов работы [3-4] и поэтому рассматривается случай $0<\alpha<1$.

Лемма: Пусть $0<\beta<1$ и функция $\gamma(\cdot)$ определена на I, причем $0<\gamma(x)\leq 1$, $\forall x\in I$. Тогда

$$\int_0^{\gamma(x)}\frac{dz}{(1-z)^{1-\beta}}\leq\frac{\gamma(x)}{\beta},\ \forall x\in I.$$

Действительно, используя неравенство $(1-\gamma(x))^\beta\geq 1-\gamma(x)$, имеем

$$\int_0^{\gamma(x)}\frac{dz}{(1-z)^{1-\beta}}=\frac{1}{\beta}\left[1-(1-\gamma(x))^\beta\right]\leq\frac{1}{\beta}\left[1-(1-\gamma(x))\right]=\frac{\gamma(x)}{\beta}.$$

В работе [5] мы получили ограниченность оператора (1) из $L_{p,w}$ в $L_{q,v}$ в следующим в виде:

Теорема А: Пусть $1<p\leq q<\infty$, $\frac{1}{p}<\alpha<1$. Оператор T_φ ограничен из $L_{p,w}$ в $L_{q,v}$ тогда и только тогда, когда

$$A_\varphi=\sup_{z\in I}\left(\int_0^{\varphi(z)}u^{p'}(s)W^{p'\beta}(s)w(s)ds\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_z^\infty W^{q(\alpha-1)}(x)v(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}<\infty,$$

при этом $\|T_\varphi\|\approx A_\varphi$.

Главные результаты

Теорема 1: Пусть $0<\alpha<1$, $\frac{1}{\alpha}<p\leq q<\infty$, $\beta\geq 0$. Тогда оператор T_φ компактен из $L_{p,w}$ в $L_{q,v}$ тогда только тогда, если

a) $A_\varphi=\sup_{s>.0}A_\varphi(s)<\infty$ и b) $\lim_{s\to 0+}A_\varphi(s)=\lim_{s\to\infty-}A_\varphi(s)=0$,

где $A_\varphi(s)=\left(\int_0^{\varphi(s)}u^{p'}(t)W^{p'\beta}(t)w(t)dt\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_s^\infty W^{q(\alpha-1)}(x)v(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}$.

Доказательство. Необходимость. Условие а) тривиально следует из Теоремы ([5]).

Теперь докажем условие b) Для $0<s<\infty$ рассмотрим семейство функций $\{f_s\}_{s>0}$, где

$$f_s(x)=\chi_{(0;\varphi(s))}(x)u^{p'-1}(x)W^{(p'-1)\beta}(x)\left(\int_0^{\varphi(s)}u^{p'}(t)W^{p'\beta}(t)w(t)dt\right)^{-\frac{1}{p}},\ x\in I. \qquad (2)$$

Заметим, что

$$\| f_s \|_{p,w} = \left(\int_0^\infty | f_s(x) |^p w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^{\varphi(s)} | f_s(x) |^p w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\int_0^{\varphi(s)} u^{(p'-1)p}(x) W^{p(p'-1)\beta}(x) \left(\int_0^{\varphi(s)} u^{p'}(s) W^{p'\beta}(s) w(s) ds \right)^{-1} w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} = 1 . \qquad (3)$$

Покажем, что семейство функции (2) слабо сходится к нулю в $L_{p,w}$. В силу теоремы ([6], VI, §2) об общем виде линейных непрерывных функционалов на $L_{p,w}$ имеют вид:

$$\int_0^\infty f(x) g(x) dx, \text{ где } g \epsilon L_{p', w^{1-p'}}.$$

Поэтому, используя неравенство Гельдера с показателями p и $p' = \frac{p}{p-1}$ и с учетом (3), имеем

$$\int_0^\infty f_s(x) g(x) dx = \int_0^{\varphi(s)} f_s(x) g(x) dx \le \left(\int_0^{\varphi(s)} | f_s(x) |^p w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{\varphi(s)} |g(x)|^{p'} w^{1-p'}(x) dx \right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$\le \left(\int_0^\infty | f_s(x) |^p w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{\varphi(s)} |g(x)|^{p'} w^{1-p'}(x) dx \right)^{\frac{1}{p'}} = \left(\int_0^{\varphi(s)} |g(x)|^{p'} w^{1-p'}(x) dx \right)^{\frac{1}{p'}} . \qquad (4)$$

Так как $g \epsilon L_{p', w^{1-p'}}$ то последний интеграл в (4) стремится к нулю, при $s \to 0$, что означает слабую сходимость $f_s \to 0$, при $s \to 0$.

Так как компактный оператор в банаховом пространстве всякую слабо сходящуюся последовательность переводит в сильно сходящуюся ([7], VI.5), то

$$\lim_{t \to 0} \| T_\varphi f_s \| = 0 \qquad (5)$$

Имеем:

$$\| T_\varphi f_s \|_{q,v}^q = \int_0^\infty v(x) \left(\int_0^{\varphi(x)} \frac{u(t) W^\beta(t) f_s(t) w(t) dt}{(W(x) - W(t))^{1-\alpha}} \right)^q dx$$

$$= \int_0^s v(x) \left(\int_0^{\varphi(x)} \frac{u(t) W^\beta(t) f_s(t) w(t) dt}{(W(x) - W(t))^{1-\alpha}} \right)^q dx + \int_s^\infty v(x) \left(\int_0^{\varphi(x)} \frac{u(t) W^\beta(t) f_s(t) w(t) dt}{(W(x) - W(t))^{1-\alpha}} \right)^q dx$$

$$\ge \int_s^\infty v(x) \left(\int_0^{\varphi(x)} \frac{u(t) W^\beta(t) f_s(t) w(t) dt}{(W(x) - W(t))^{1-\alpha}} \right)^q dx$$

$$\ge \int_s^\infty \frac{v(x) dx}{W^{q(1-\alpha)}(x)} \left(\int_0^{\varphi(s)} u^{p'}(t) W^{p'\beta}(t) w(t) dt \right)^{-\frac{q}{p}} \left(\int_0^{\varphi(s)} u^{p'}(\tau) W^{p'\beta}(\tau) w(\tau) d\tau \right)^q$$

$$= \int_s^\infty W^{q(\alpha-1)}(x) v(x) dx \left(\int_0^{\varphi(s)} u^{p'}(t) W^{p'\beta}(t) w(t) dt \right)^{\frac{q}{p'}} = A_\varphi^q(s) . \qquad (6)$$

Из (5) и (6) следует что $\lim_{s \to 0} A_\varphi(s) = 0$.

Осталось показать, это $\lim_{s \to \infty} A_\varphi(s) = 0$.

Из компактности оператора $T_{\varphi}: L_{p,w} \to L_{q,v}$ следует компактность сопряженного оператора

$$T_{\varphi}^{*} g(s) = u(s) W^{\beta}(s) w(s) \int_{\varphi^{-1}(s)}^{\infty} \frac{g(x)dx}{\left(W(x) - W(s)\right)^{1-\alpha}}, \; x \in I$$

из $L_{q',v^{1-q'}}$ в $L_{p',w^{1-p'}}$.

Для $0 < s < \infty$ введем семейство функции:

$$g_s(x) = \chi_{[s;\infty)}(x) \left(\int_s^{\infty} W^{q(\alpha-1)}(x) v(x) dx\right)^{-\frac{1}{q'}} W^{(q-1)(\alpha-1)}(x) v(x), \quad x \epsilon I. \tag{7}$$

Эти функции корректно определены, поскольку интегралы входящие в них конечны в силу условия $A_{\varphi} < \infty$. Покажем, что для любого $s > 0$ функции $g_s \in L_{q',v^{1-q'}}$, более того, что g_s слабо сходится к нулю, при $s \to \infty$.

Также как и в (3) находим норму функционала $\|g_s\|_{q',v^{1-q'}}$. Действительно,

$$\|g_s\|_{q',v^{1-q'}} = \left(\int_0^{\infty} |g_s(x)|^{q'} v^{1-q'}(x) dx\right)^{\frac{1}{q'}} = \left(\int_s^{\infty} |g_s(x)|^{q'} v^{1-q'}(x) dx\right)^{\frac{1}{q'}} = 1$$

Как и в (4), в силу (7) для $f \in L_{q,v}$, получим:

$$\int_0^{\infty} g_s(x) f(x) dx = \left(\int_s^{\infty} |f(x)|^q v(x) dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_s^{\infty} |g_s(x)|^{q'} v^{1-q'}(x) dx\right)^{\frac{1}{q'}} \le \left(\int_s^{\infty} |f(x)|^q v(x) dx\right)^{\frac{1}{q}} .$$

Так как $f \in L_{q,v}$, то последний интеграл стремится к нулю, при $s \to \infty$, что показывает слабую сходимость $g_s \to 0$ в $L_{q',v^{1-q'}}$, при $s \to 0$.

В силу компактности $T_{\varphi}^{*} : L_{q',v^{1-q'}} \to L_{p',w^{1-p'}}$, следует

$$\lim_{s \to \infty} \|T_{\varphi}^{*} g_s\|_{p',w^{1-p'}} = 0. \tag{8}$$

К тому же

$$\|T_{\varphi}^{*} g_s\|_{p',w^{1-p'}} = \left(\int_0^{\infty} w^{1-p'}(t) \left| u(t) W^{\beta}(t) w(t) \int_{\varphi^{-1}(t)}^{\infty} \frac{g_s(x)dx}{\left(W(x) - W(t)\right)^{1-\alpha}} \right|^{p'} dt\right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$\ge \left(\int_0^{\varphi(s)} u^{p'}(t) W^{p'\beta}(t) w(t) dt\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_s^{\infty} W^{q(\alpha-1)}(x) v(x) dx\right)^{-\frac{1}{q'}} \int_s^{\infty} \frac{W^{(q-1)(\alpha-1)}(x) v(x) dx}{W^{1-\alpha}(x)}$$

$$= \left(\int_0^{\varphi(s)} u^{p'}(s) W^{p'\beta}(s) w(s) ds\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_s^{\infty} W^{q(\alpha-1)}(x) v(x) dx\right)^{\frac{1}{q}} = A_{\varphi}(s).$$

Откуда, из (8), вытекает: $\lim_{s \to \infty} A_{\varphi}(s) = 0$. Таким образом, необходимость доказана.

Достаточность. Для $0 < a < b < \infty$ положим $P_a f = \chi_{(0;a]} f$, $P_{ab} f = \chi_{(a;b]} f$, $Q_b f = \chi_{[b;\infty)} f$. Тогда $f = P_a f + P_{ab} f + Q_b f$

и

$$T_{\varphi} f = \left(P_a + P_{ab} + Q_b\right) T_{\varphi} f = (P_a + P_{ab}) T_{\varphi} (P_a + P_{ab} + Q_b) f + Q_b T_{\varphi} f$$

$$=P_aT_\varphi P_a f+P_aT_\varphi P_{ab} f+P_aT_\varphi Q_b f+P_{ab}T_\varphi P_a f+P_{ab}T_\varphi P_{ab} f+P_{ab}T_\varphi Q_b f+Q_bT_\varphi f\ .$$

Так как $P_aT_\varphi P_{ab}\equiv 0$, $P_aT_\varphi Q_b\equiv 0$, $P_{ab}T_\varphi Q_b\equiv 0$, то

$$T_\varphi f=P_aT_\varphi P_a f+P_{ab}T_\varphi P_a f+P_{ab}T_\varphi P_{ab} f+Q_bT_\varphi f\ . \tag{9}$$

Покажем, что оператор $P_{ab}T_\varphi P_{ab}$ компактен из $L_{p,w}(I)$ в $L_{q,v}(I)$.

Так как $P_{ab}T_\varphi P_{ab} f(x)=P_{ab}T_\varphi \chi_{(a;b]}(x) f(x)\neq 0$, при $x\in(a;b]$, то достаточно показать, что оператор $P_{ab}T_\varphi P_{ab}$ компактен $L_{p,w}(a,b)$ в $L_{q,v}(a,b)$, а это в свою очередь эквивалентно компактности оператора

$$Tf(x)=\int_a^b K(x,s)f(s)ds$$

из $L_p(a,b)$ в $L_q(a,b)$, с ядром

$$K(x,s)=\frac{u(s)W^\beta(s)v^{\frac{1}{q}}(x)\chi_{(a,b]}(s)\theta(\varphi(x)-s)w^{\frac{1}{p'}}(s)}{\left(W(x)-W(s)\right)^{1-\alpha}}$$

где $\theta(z)$-единичная шаговая характерическая функция, (это означает что $\theta(z)=1$ для $z\geq 0$ и $\theta(z)=0$ для $z<0$).

Пусть $\{x_k\}_{k\in Z}$ последовательность точек, определенных в доказательстве теоремы из работы [5]. Есть точки $x_i, x_{n+1}, x_i<x_{n+1}$ такие, что $x_i\leq a<x_{i+1}$, $x_n<b\leq x_{n+1}$. Мы предполагаем, что числа a, b выбраны так, что $x_i<x_n$. Поэтому, сделав замену переменной $W(s)=W(x)t$ в приведенном ниже интеграле и применив Лемму, получаем

$$\int_a^b\left(\int_a^b |K(x,s)|^{p'}ds\right)^{\frac{q}{p'}}dx=\int_a^b v(x)\left(\int_a^{\varphi(x)}\frac{\chi_{(a;b]}(s)u^{p'}(s)W^{p'\beta}(s)w(s)ds}{\left(W(x)-W(s)\right)^{(1-\alpha)p'}}\right)^{\frac{q}{p'}}dx$$

$$=\sum_{k=i}^n\int_{x_k}^{x_{k+1}}v(x)\left(\int_0^{\varphi(x)}\frac{u^{p'}(s)W^{p'\beta}(s)w(s)ds}{\left(W(x)-W(s)\right)^{(1-\alpha)p'}}\right)^{\frac{q}{p'}}$$

$$<<\sum_{k=i}^n\int_{x_k}^{x_{k+1}}v(x)\left(\int_0^{\varphi(x_{k-1})}\frac{u^{p'}(s)W^{p'\beta}(s)w(s)ds}{\left(W(x)-W(s)\right)^{(1-\alpha)p'}}\right)^{\frac{q}{p'}}dx+\sum_{k=i}^n\int_{x_k}^{x_{k+1}}v(x)\left(\int_{\varphi(x_{k-1})}^{\varphi(x)}\frac{u^{p'}(s)W^{p'\beta}(s)w(s)ds}{\left(W(x)-W(s)\right)^{(1-\alpha)p'}}\right)^{\frac{q}{p'}}dx$$

$$<<\mu(n-i+1)A_\varphi^q<\infty\ .$$

Следовательно, по признаку Кантаровича ([6], XI, §3), Оператор T компактен из $L_{p,w}(a,b)$ в $L_{q,v}(a,b)$, что равносильно компактности из $L_{p,w}$ в $L_{q,v}$ оператора $P_{ab}T_\varphi P_{ab}$.

Из (9) имеем

$$\left\|T_\varphi-P_{ab}T_\varphi P_{ab}\right\|\leq\left\|P_aT_\varphi P_a\right\|+\left\|P_{ab}T_\varphi P_a\right\|+\left\|Q_bT_\varphi\right\|. \tag{10}$$

Покажем, что правая часть (10) стремится к нулю при $a\to 0$ и $b\to\infty$, тогда оператор T_φ как равномерный предел компактных операторов ([7], VI.12), будет компактен из $L_{p,w}$ в $L_{q,v}$.

На основании Теоремы из работы [5], имеем:

$$\left\|P_aT_\varphi P_a f\right\|_{q,v}=\left(\int_0^a v(x)\left|\int_0^{\varphi(x)}\frac{u(s)W^\beta(s)f(s)w(s)ds}{\left(W(x)-W(s)\right)^{1-\alpha}}\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$<< \sup_{0<z<a}\left(\int_0^{\varphi(z)} u^{p'}(s)W^{p'\beta}(s)w(s)ds\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_z^a W^{q(\alpha-1)}(x)v(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\cdot\|f\|_{p,w}$$

$$\le \sup_{0<z<a} A_\varphi(z)\cdot\|f\|_{p,w}.$$

Следовательно, $\|P_aT_\varphi P_a\| << \sup_{0<z<a} A_\varphi(z)$. Откуда,

$$\lim_{a\to 0+}\|P_aT_\varphi P_a\| << \lim_{a\to 0+}\sup_{0<z<a} A_\varphi(z) = \lim_{z\to 0+} A_\varphi(z) = 0\,. \tag{11}$$

Далее, также оцениваем $\|Q_bT_\varphi f\|_{q,v}$ и $\|P_{ab}T_\varphi P_a f\|_{q,v}^q$:

В результате имеем

$$\lim_{b\to\infty-}\|Q_bT_\varphi\| << \lim_{z\to\infty-} A_\varphi(z) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{a\to 0+}\|P_{ab}T_\varphi P_a\| << \lim_{a\to 0+}\sup_{0<z<a} A_\varphi(z) = \lim_{z\to 0+} A_\varphi(z) = 0\,. \tag{12}$$

Из (11) и (12) следует, что правая часть (10) стремится к нулю при $a\to 0$, $b\to\infty$.
Теорема полностью доказана.

Список использованных источников

1. Abylayeva A. Criterion of the boundedness of a fractional integration type operator with variable upper limit in weighted Lebesgue spaces. International Conference on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2016) AIP Conf. Proc. 1759, 020088-1–020088-5; doi: 10.1063/1.4959702.
2. Abylayeva A., Oinarov R., and Persson L.-E. Boundedness and compactness of a class of Hardy type operators. Journal of Inequal. and Appl. (JIA), № 324, 2016.
3. Ойнаров Р. Двусторонние оценки нормы некоторых классов интегральных операторов // Труды МИ РАН. - 1993. Т. 204, - С. 240-250.
4. Oinarov R. Boundedness and compactness of superposition of fractional integration operators and their applications // Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis: Proceedings: Чехия. - 2005. - С. 213-235.
5. Абылаева А.М., Сейлбеков Б.Н. Ограниченность одного оператора дробного интегрирования с переменним верхним пределом. КазНПУ Вестник №3 (67), 2019. -С.7-11.
6.Канторович Л.В., Акилов Г.Р. Функциональный анализ. М.: Наука 1977.
7. Рид М. Саймон Б. Методы современной математической физики. М.: Мир. Т.1. 1977.

ӘОЖ 517.5

АНИЗОТРОПТЫ ЛОРЕНЦ КЕҢІСТІГІНІҢ ҚАСИЕТТЕРІ

Сынабаева Гулнур Темирхановна

gulmuh87@mail.ru

Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУ механика – математика факультетінің
магистранты, Нұр-Сұлтан, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі – А.Н. Копежанова

Мақалада анизотропты Лоренц кеңістігі анықталады. Анизотропты Лоренц кеңістігінің қасиеттері зерттеледі.

$\Lambda_q(\omega)$ жалпыланған Лоренц кеңістігін анықтайық [2]. Айталық ω - $[0,1]$ кесіндісіндегі теріс емес функция. $\Lambda_q(\omega)$ жалпыланған Лоренц кеңістігі – бұл төмендегідей